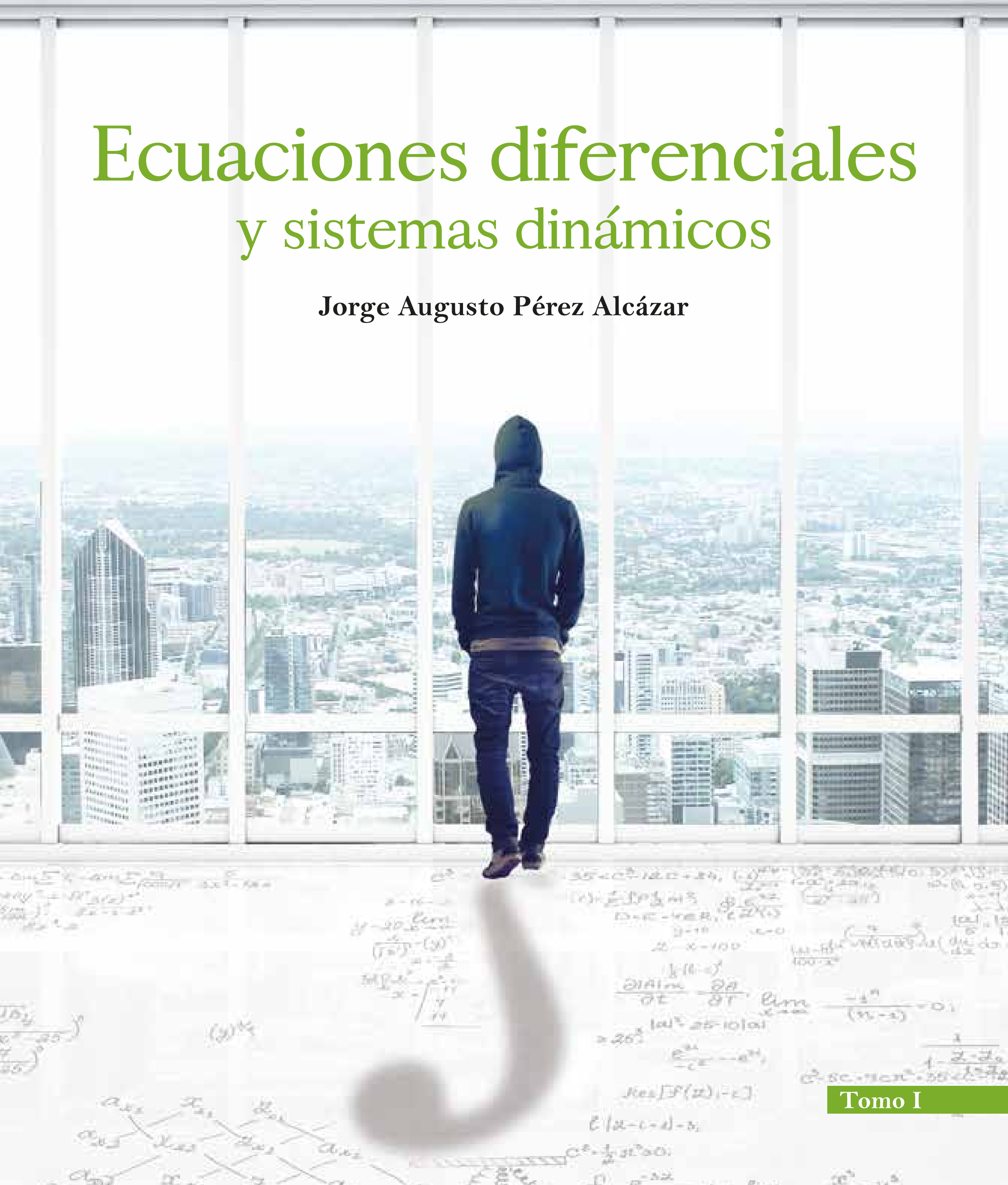
ean universidad

# Ecuaciones diferenciales
## y sistemas dinámicos

**Jorge Augusto Pérez Alcázar**



Tomo I

# Ecuaciones ∂iferenciales y sistemas dinámicos

Tomo I

Catalogación en la fuente: Biblioteca Universidad EAN

Pérez Alcázar, Jorge Augusto
Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos / Tomo I / Jorge Augusto Pérez Alcázar.
Descripción: 1a edición / Bogotá: Universidad EAN, 2018
618 páginas.

9789587566055 (Electrónico, 2018)

1. Ecuaciones diferenciales 2. Sistemas dinámicos diferenciales 3. Derivadas (Matemáticas) 4. Ecuaciones – Problemas, ejercicios, etc.

515.35 CDD 23

**Edición**
Gerencia de Investigaciones

**Gerente de Investigaciones**
Carolina Mejía Corredor

**Coordinadora de Publicaciones**
Laura Cediel Fresneda

**Revisor de estilo**
Juan Carlos Velásquez

**Diseño, diagramación**
Cesar Rubiano

Publicado por Ediciones EAN, 2020.


ISBNe: 9789587566055



Producido en Colombia.

# Contenido

## CAPÍTULO 2
## CONCEPTOS BÁSICOS (IDEAS CUALITATIVAS)



## CAPÍTULO 3
## ECUACIONES DIFERENCIALES AUTÓNOMAS

# CAPÍTULO 4
## SOLUCIONES NUMÉRICAS Y CUANTITATIVAS DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL



# CAPÍTULO 5
## MÁS SOBRE MÉTODOS CUANTITATIVOS

## CAPÍTULO 6
## ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN Y MODELOS



## CAPÍTULO 7
## APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

# CAPÍTULO 8
## ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y DE GRADO SUPERIOR

# JUSTIFICACIÓN

Hace varios años la Universidad EAN creó en el Departamento de Ciencias Básicas la línea de investigación en Pensamiento Complejo; línea en la que se han realizado varias investigaciones conducentes a implementar y difundir el pensamiento complejo en la Universidad.

Siguiendo este lineamiento, se mostrará a los estudiantes cómo este nuevo paradigma de la ciencia de la complejidad ha venido permeando todas las áreas del conocimiento, en particular el modo en que se enseñan ciertos temas de matemáticas, principalmente en una unidad fundamental como es la de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los diferentes textos de ecuaciones diferenciales ordinarias, en su gran mayoría, solamente trabajan las soluciones de estas, desde una mirada netamente analítica (esto es de manera cuantitativa). Significa enseñarles a los estudiantes una gran cantidad de métodos de integración que hacen de los cursos de ecuaciones diferenciales cursos áridos y carentes de utilidad y aplicación en su vida cotidiana.

Con el avance de la ciencia y la tecnología ya se cuentan con diferentes maneras de enfrentar las soluciones de una ecuación diferencial de manera: gráfica, numérica, analítica y descriptiva.

Son muy escasos los textos que se tienen hoy en día en la literatura en español que enfoquen la enseñanza de las ecuaciones diferenciales desde este punto de vista. Por esta razón, y teniendo en cuenta que el Proyecto Educativo Institucional (PEI) de la Universidad EAN tiene como base fundamental la competencia tecnológica, la sistémica y la complejidad, se propone un texto que involucre los cuatro aspectos antes mencionados, donde la tecnología y el pensamiento complejo sean su columna fundamental en esta unidad de estudio.

Es necesario un cambio en las herramientas y las estrategias de la enseñanza en los cursos de ecuaciones diferenciales y, sobre todo, en la innovación de unidades de aprendizaje que a través del texto propuesto facilite a los estudiantes el trabajo autónomo y el autoaprendizaje adaptativo, logrando así involucrar al educando en el modelo pedagógico de la Universidad EAN.

El texto que se está proponiendo trata básicamente del cambio, el flujo, el movimiento y, en particular, de la rapidez a la que estos cambios se dan en los diferentes fenómenos de la naturaleza. Cada ser viviente experimenta cambios. Representar estos cambios debe ser el marco de trabajo de cualquier documento de ecuaciones diferenciales. Es por ello que el presente texto trabaja en particular, la dinámica del estudio de los sistemas que evolucionan con el paso del tiempo.

Se busca presentar una introducción sólida y, no obstante, muy accesible a los diferentes conceptos de las ecuaciones diferenciales ordinarias, desde la perspectiva de los sistemas dinámicos y recurriendo a las herramientas tecnológicas, para abordarlos desde el punto de vista gráfico, numérico y analítico. Este texto se diseñará pensando en los estudiantes de la Universidad EAN que cursan la unidad de estudio ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para terminar, es bueno decir que este es un texto netamente didáctico, que trata de mostrar el curso de ecuaciones diferenciales desde un punto de vista moderno.

CAPÍTULO 1.

# INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

## Contenido



## Competencias

1. Identificar el concepto de cambio y sistemas dinámicos.
2. Identificar el concepto de modelo.
3. Recordar y aplicar el concepto de derivada e integral.
4. Dar el concepto intuitivo de ecuación diferencial.

# Introducción

El presente libro está basado en las nuevas visiones de la teoría de ecuaciones diferenciales, que se han hecho necesarias por la creciente sofisticación alcanzada por la tecnología. No significa el abandono de métodos cuya utilidad se ha comprobado en la práctica y que siguen teniendo vigencia. Más aún, se ha querido permanecer fiel a la motivación original de las ecuaciones diferenciales: la mecánica y la física clásica.

La enseñanza de las Matemáticas y de la ciencia en general, está siendo profundamente modificada desde sus propias bases, con el desarrollo de la tecnología computacional y los nuevos paradigmas científicos como son la dinámicas de sistemas, la complejidad y el caos, todo esto reducido a la llamada: Teoría del Caos. Esta teoría se aplica al mundo físico, está cambiando nuestras percepciones de la vida, del universo, de la cultura, de la sociedad y todo lo demás.

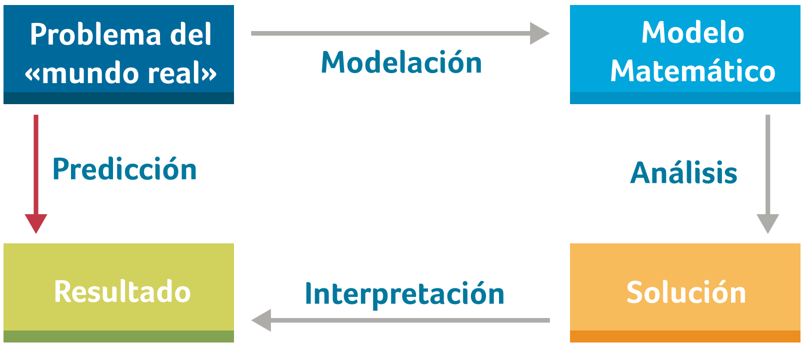
La Universidad EAN ha tenido la visión de encaminar su PEI con esta mirada desde La Teoría del Caos y ha empezado a trabajar con sus estudiantes en esta nueva visión del mundo. Por esta razón, escribir un libro de Ecuaciones Diferenciales con este objetivo, en donde el estudiante sea capaz de plantear correctamente las ecuaciones que describen un fenómeno dado, esto es más importante que imponerle desarrollar una gran maestría en técnicas de resolución que, sin desconocer de manera alguna su ingenio, pequen por una excesiva especificidad que oculte la esencia de la teoría, esta mirada encaja perfectamente en lo que está propuesto en el PEI. En otras palabras, el énfasis debe estar puesto en la modelación matemática, resaltando los aspectos cualitativos y desarrollando las técnicas de resolución más generales que dan justificación al tratamiento simbólico y numérico mediante programas computacionales.

# 1.1 Modelación con ecuaciones diferenciales

Hace muchos siglos, las personas creían que la energía solar era causada por un dragón tratando de tragarse el sol y que los terremotos eran causados por dioses descontentos en el inframundo. Estas teorías fueron construcciones mentales que les ayudaron a explicar el mundo que les rodeaba. La historia humana es un largo recuento de esas visiones interesantes de la realidad, que ilustran una vieja creencia de que los fenómenos pueden entenderse en comparación con el sistema más sencillo basado en la versión limitada del objeto real. Dragones chinos míticos y dioses mayas del inframundo eran modelos religiosos. Por otra parte, los antiguos griegos, después de observar el cielo desde hace muchos siglos construyeron un modelo del universo físico que consiste en una gran esfera hueca con la tierra en su centro y los cuerpos celestes que se mueven a lo largo de varios caminos en su superficie. Si bien este modelo mostró razonablemente buen acuerdo con los datos disponibles en ese momento, desde entonces ha sido sustituido por una descripción más precisa y completa del universo físico.

Así vemos que los diferentes modelos pueden servir para responder a diferentes preguntas en diferentes momentos y circunstancias. Los modelos son la forma de entender el mundo que nos rodea. Para explicar la turbulencia alrededor de un ala de avión, un ingeniero hablará sobre el número de Reynolds, un físico sobre la resonancia no lineal y un matemático sobre el estiramiento y plegado de modelos de variedades suaves, todos ellos son un sello distintivo del método científico, ese proceso filosófico por el cual el conocimiento científico se extiende y refina. El esquema de la siguiente figura ilustra los pilares del método y la naturaleza cíclica de su evolución.

**Figura 1.** Proceso en la modelación de problemas del mundo real.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

A partir de observaciones cuidadosas del problema del mundo real, se formula el modelo matemático, se plantea la solución y se analiza el resultado. Las predicciones sobre la base de los modelos y soluciones se someten entonces a simulación y verificación por una nueva ronda de observaciones. Si el acuerdo con las observaciones es imperfecto, hipótesis viejas son modificadas y nuevas son formuladas; y el proceso continúa. La historia de la ciencia es un registro de perfeccionamiento continuo en la comprensión de nuestro mundo.

Un modelo no está destinado a ser la «cosa real», pero representa las características o aspectos de la realidad seleccionada. Los ingenieros estructurales construyen modelos para simular suficientes propiedades importantes de puentes, presas, edificios y predecir su comportamiento cuando está bajo la presión por inundación o terremoto, o la ingeniería robótica construye modelos de acciones claves de las articulaciones y los músculos.

# 1.2 Tipos de modelos

Aunque la física moderna sugiere que todos los sistemas son en última instancia discretos y los cambios ocurren en saltos en puntos distintos en el tiempo, la escala de tales cambios los hace más comprensibles al ser tratados como que cambian de forma continua con el tiempo. Incluso una población de moscas de la fruta es tratada por el biólogo como un cambio continuo. Más comúnmente estos sistemas de tiempo continuo son modelados por ecuaciones diferenciales, ejemplos de estos hechos se verán a lo largo de este libro. Cuando los intervalos de tiempo son muy grandes, los cambios pueden ser tratados como si fueran separados a saltos; variaciones diarias, semanales o anuales en las variables económicas tales como precios de las acciones o de los ingresos fiscales, o variables ecológicas como las poblaciones anuales de animales o plantas. Para este tiempo discreto o datos muestreados, los sistemas de un modelo matemático útil son la ecuación en diferencia.

# 1.3 Sistemas dinámicos

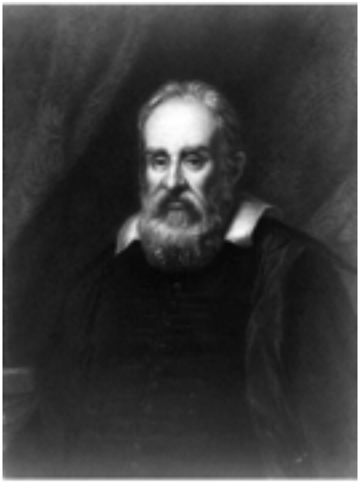
En este libro se estudian los modelos matemáticos aplicados a los sistemas dinámicos: **los sistemas** que cambian con el tiempo. Vamos a modelar eventos como terremotos, no con los dioses del inframundo, sino con variables matemáticas y las relaciones entre ellas (ecuaciones algebraicas principalmente, ecuaciones diferenciales y ecuaciones iterativas). Nuestra meta puede ser entender de manera más completa el sistema como lo es ahora (¿cómo los electrones giran alrededor del núcleo del átomo? Preguntó Erwin Schrödinger) o puede ser para predecir los estados futuros.

Los fenómenos que estudiamos, físicos, biológicos o sociales se modelan mediante diferentes configuraciones o estados, que se caracterizan por un conjunto de mediciones u observaciones, y cómo estos cambian o evolucionan con el paso del tiempo.

De acuerdo con lo anterior, cuando se quiere modelar un fenómeno de la naturaleza, en necesario tener en cuenta que todos ellos se dan en el tiempo y que por tanto, dicho fenómeno está cambiando constantemente en dicho tiempo. Desde Newton y Leibniz, padres del cálculo y prácticamente de las ecuaciones diferenciales, sabemos que se tiene una herramienta poderosa para modelar el cambio, dicha herramienta es la derivada. Por esta razón, cualquier ecuación que permita modelar un fenómeno de la naturaleza, necesariamente involucra la derivada de una función.

## A. Modelos de mecánica

**Figura 2.** Galileo Galilei (1564-1642).



**Fuente.** Tomada de Perero (1994).

Galileo Galilei fue el primer modelador de los tiempos modernos, es decir, el creador de la ciencia moderna. Galileo nació en Pisa Italia en 1564. Aunque se le conoce mejor por su trabajo en astronomía, sus experimentos con objetos, los cuales dejaba caer desde cierta altura, así como el movimiento en planos inclinados, desembocaron en un modelo para los cuerpos que caen, el cual relaciona la distancia recorrida con el tiempo transcurrido, lo que finalmente condujo a la ley de la aceleración. Después de tales experimentos Galileo apuntó su telescopio a los cielos y descubrió cuatro de las lunas que giran alrededor de Júpiter. Con sus observaciones respaldó el modelo del sistema solar de Copérnico. La conexión entre los mundos matemáticos y físico encuentra feliz expresión en una frase de Galileo: «La filosofía está descrita en el gran libro del universo, siempre, siempre abierto a nuestra mirada... Y está escrita en el lenguaje de las matemáticas».

## En mecánica

Isaac Newton fue el responsable de un gran número de descubrimientos en física y matemáticas, pero quizás los tres más importantes son los siguientes:

- El sistemático sobre el desenvolvimiento del cálculo. Newton es el responsable de acabar la realización y utilización del hecho de que la integración y la derivada son operaciones inversas la una de la otra.

- El descubrimiento de las leyes de la mecánica. Su principal trabajo fue la segunda ley de Newton, la cual nos dice que la acción de una fuerza sobre una masa (ver figura 3) es igual a la razón de cambio del momento con respecto al tiempo. El momento está definido por el producto de la masa y la velocidad, es decir mv. Entonces la fuerza es igual a la derivada del momento. Si la masa es constante.

**Figura 3.** Acción de una fuerza sobre una masa.


**Fuente.** Elaborada por el autor.

$$\frac{d}{dt}(mv)=m\frac{dv}{dt}=ma \quad (1)$$

Donde a es la aceleración. La segunda ley de Newton dice que la razón de cambio del momento es igual a la fuerza F. Expresando esta igualdad de estas dos formas podemos ver que la razón de cambio no es otra cosa que:

$$F= ma \quad (2)$$

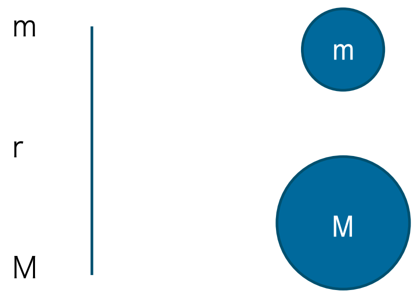
Que es la expresión estándar de la segunda ley de Newton.

- El descubrimiento de la ley universal de la gravitación. Esta ley dice que todo cuerpo con masa M atrae a otro cuerpo con masa m en forma directamente proporcional al producto de las magnitudes de las dos masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancia de separación entre ellas. Esto significa que existe una constante G tal, la cual es universal, que la magnitud de la fuerza es:

$$F = \frac{G.M.m}{r^2} \quad (3)$$

Donde r es la distancia entre los centros de masa de los dos cuerpos.

**Figura 4.** Representación de la ley universal de gravitación.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

Todos estos descubrimientos fueron hechos en el periodo comprendido entre 1665 y 1671. Los descubrimientos fueron presentados originalmente por Newton en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, mejor conocida como *Principia Mathematica*, publicada en 1687[1]. Estos descubrimientos son los que hacen posible el uso de la teoría de ecuaciones diferenciales. Sus leyes de mecánica crean un modelo completo para el movimiento en general.

1 La primera edición del Principia fue muy pequeña, no superó 200 ediciones.

El ejemplo más simple es el movimiento de un balón sobre la superficie de la tierra:

**Figura 5.** Una aplicación de la ley de gravitación universal.


**Fuente.** Elaborada por el autor.

Si x mide la distancia del balón sobre la tierra, entonces la velocidad y la aceleración del balón son:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad y, a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (4)$$

Como se asume que el balón se mueve a una corta distancia, comparada con el radio de la tierra, la fuerza dada por (3) se asume que es constante. Observe que m, la masa del balón, se da en la fórmula (3). Se puede asumir entonces que F = m. g, donde g = $Gm/r^2$ y r es el radio de la tierra. La constante g es llamada la aceleración de la tierra y se le da el nombre de la gravedad. El signo menos refleja el hecho de que el desplazamiento x es medido positivamente sobre la superficie de la tierra, y la fuerza de gravedad tiende a que x decrezca. De la segunda ley de Newton, dada en (2), tenemos:

$$-mg = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (5)$$

La masa se cancela y se obtiene la ecuación diferencial:

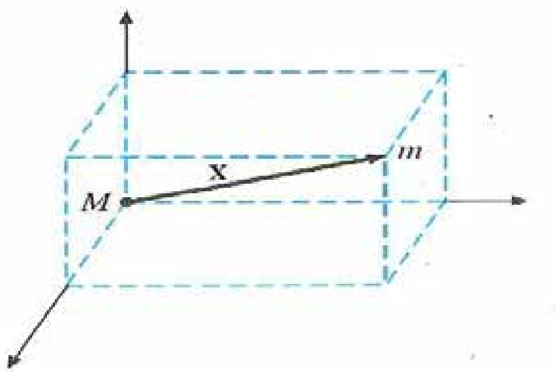
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -g \qquad (6)$$

La cual es el modelo matemático para el movimiento del balón.

La ecuación en (6) es llamada una ecuación diferencial porque involucra una función desconocida x(t) y al menos una de sus derivadas. En este caso la mayor derivada que ocurre en la ecuación es de grado dos, por ello esta ecuación es llamada una ecuación de segundo orden.

Otro ejemplo muy interesante de aplicación de las ideas de Newton fue la del movimiento planetario. Para este caso se asume que la masa del sol es M y está fijo en el origen de nuestro sistema de coordenadas. Denotamos por x(t) el vector que da la localización de un planeta respecto al sol.

**Figura 6.** Ley de gravitación aplicada a nuestro sistema solar.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

El vector x (t) tiene tres componentes. Su derivada es:

$$V = \frac{dX}{dt}$$

la cual es el vector velocidad del planeta. Para este ejemplo, la segunda ley de Newton y su ley de gravitación nos da:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GMm}{|x|^2} \cdot \frac{x}{|x|}$$

Este sistema es una ecuación diferencial de segundo orden, es el modelo de Newton para el movimiento planetario. Veamos otros modelos.

## B. Modelo poblacional

Consideremos una población P (t) que va variando en el tiempo[2]. Matemáticamente se puede decir que la razón por la cual la población está cambiando respecto al tiempo está dada por la derivada:

$$\frac{dP}{dt}$$

En otras palabras, en una población biológica se puede decir que la razón de cambio es proporcional a la población presente en un momento dado. Esto significa que existe una constante r, llamada la razón de reproducción, tal que la razón de cambio es igual a r.P(t), luego colocando estas ideas en una sola expresión matemática tenemos la ecuación:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \qquad (7)$$

Esta es la ecuación para la función P (t), e involucra tanto a P (t) como a su derivada, este es otro ejemplo de una ecuación diferencial. No es difícil demostrar por sustitución directa que la función exponencial:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

Donde $P_0$ es una constante que representa la población inicial, es una solución de la ecuación diferencial. Si se asume que la razón de reproductividad r es positiva, entonces la población muestra un crecimiento exponencial.

2 Por el momento, la población puede ser cualquier cosa: humanos, paramecios, mariposas, etc.

Si se asume que la razón de crecimiento r no es constante, entonces debemos asumir que para pequeñas poblaciones a largo tiempo las raciones de comida y el espacio son limitados. Cuando esto sucede, el mejor modelo para la razón de reproductividad es la función $r\left(1-\frac{P(t)}{K}\right)$, y entonces la mejor expresión para la razón a la cual la población cambia es $r\left(1-\frac{P(t)}{K}\right)P(t)$, donde r y K son constantes.

Cuando igualamos nuestras dos ideas acerca de la razón de cambio de la población obtenemos la ecuación:

$$\frac{dP(t)}{dt}=r\left(1-\frac{P(t)}{K}\right)P(t)$$

Esta ecuación para la función P (t) es llamada la ecuación logística. Veremos más adelante cómo solucionar este tipo de ecuaciones diferenciales.

## C. Modelos de decaimiento radioactivo

El núcleo de un átomo está formado por combinaciones de pro-tones y neutrones. Muchas de estas combinaciones son inestables, es decir, los átomos se desintegran o se convierten en átomos de otras sustancias. Por ejemplo, con el tiempo, el radio Rn – 226, intensamente radiactivo, se transforma en el radiactivo gas radón, Rn-222. Para modelar el fenómeno de decaimiento radiactivo, se supone que la razón dA/dt con la que los núcleos de una sustancia se desintegran, es proporcional a la cantidad (más precisamente, el número de núcleos, A (t)) de la sustancia que queda en el tiempo t, es decir:

$$\frac{dA}{dt}\propto A \text{ ó } \frac{dA}{dt}=kA \qquad (8)$$

Observemos que las ecuaciones (7) y (8) son exactamente iguales; la diferencia radica solo en la interpretación de los símbolos y de las constantes de proporcionalidad. En el caso de la ecuación (7),

$k > 0$ significa crecimiento de la población y en la ecuación (8) $k < 0$ significa desintegración radiactiva.

Estos dos modelos que se interpretan con una sola ecuación de la forma $dC/dt = r.C$, describen otros tipos de crecimientos o decrecimientos, como por ejemplo el crecimiento de un capital cuando está a una tasa anual de interés r compuesto continuamente, también se puede aplicar a sistemas biológicos tales como la determinación de la vida media de un medicamento, es decir, el tiempo que le toma al 50 % del medicamento para ser eliminado del cuerpo por excreción o metabolización. En química el modelo del decaimiento, ecuación (8), se presenta en la descripción matemática de una reacción química de primer orden. Lo importante de todos estos fenómenos es que: «Una sola ecuación diferencial puede servir como modelo matemático de muchos fenómenos de la naturaleza» (esto es como una regla en la teoría de modelos).

## D. Modelos geométricos

Algunos problemas de naturaleza geométrica requieren de la solución de una ecuación diferencial para su respuesta. Recordemos que para una curva plana con ecuación $y = f(x)$ el ángulo Ø para el cual la tangente a la curva en el punto $(x, y)$ forma con el eje x, está dado por la relación:

$$\tan \varnothing = \frac{dy}{dx}$$

El radio de curvatura R en el punto $(x, y)$ de la curva $y = f(x)$ está dado por:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

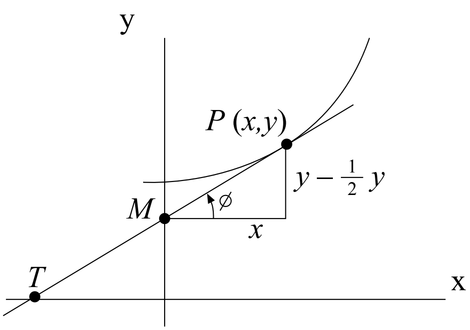
Si hablamos de la ecuación de todas las curvas para las cuales se tiene la propiedad de que la pendiente o el radio de curvatura tiene alguna relación específica para los puntos de coordenadas de la curva, entonces se obtiene una ecuación diferencial. La solución nos da la curva requerida.

**Así, por ejemplo:**

a) Hallar todas las curvas del plano para el cual la parte comprendida entre el eje x y el punto de tangencia es bisecado por el eje y.

Como el eje y biseca la parte de la tangente entre el eje x y el punto P(x, y) de tangencia (figura 7). El punto en el cual la tangente cruza al eje y, tiene coordenadas $(0, \frac{1}{2}y)$. La pendiente de la tangente está dada por:

**Figura 7.** Aplicación de la curvatura de una curva.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

$$\tan \varnothing = \frac{dy}{dx} = \frac{y - \frac{1}{2}y}{x - 0} = \frac{y}{2x}$$

Y la ecuación diferencial del problema toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Este ejemplo nos da otra ecuación diferencial. Para el ejemplo geométrico siguiente, recordemos que el radio de curvatura R de una curva tiene la forma:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (9)$$

b) Determinar todas las curvas del plano, donde su radio de curvatura en el punto (x, y) es igual a k- veces la distancia de este punto al origen del sistema.

Se tiene que la distancia de cualquier punto del plano al origen está dada por:

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

Y como el radio de curvatura R es k- veces esta distancia, obtenemos la ecuación:

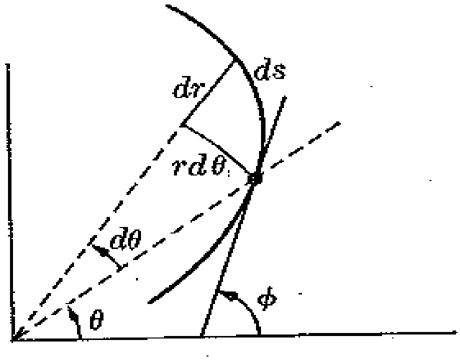
$$R = k\sqrt{x^2 + y^2} \qquad (10)$$

Luego, recordando del cálculo el valor del radio de la curvatura (9), e igualando (9) y (10) se tiene que:

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = k\ (x^2 + y^2)^{1/2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

Observe que esta ecuación ya no es tan fácil de resolver, como lo sería la ecuación del ejemplo «a». Veremos más adelante que si este problema se plantea en coordenadas polares podemos obtener una ecuación diferencial mucho más fácil de resolver (figura 8).

**Figura 8.** Relación entre la curvatura y la distancia al origen de una curva.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

## E. Modelo mediante antiderivadas

Consideremos el ejemplo de encontrar la antiderivada más general de la función f(x)= x. Si llamamos a su antiderivada F(x), entonces la antiderivada de f(x) es F(x); es decir F(x) satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dF(x)}{dx} = x \qquad (11)$$

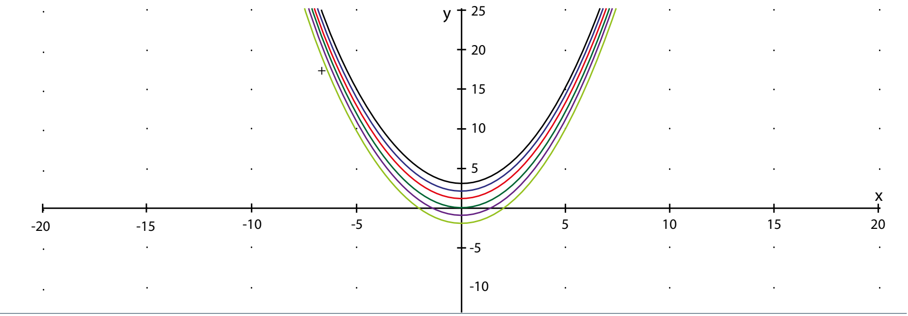
debido a que cualquier antiderivada de f(x) puede ser escrita como:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad (12)$$

Donde C es una constante arbitraria. Es razonable llamar a F(x), las soluciones de nuestra ecuación diferencial (11).

Como consecuencia de la constante arbitraria, tenemos un número infinito de soluciones, una diferente para cada C ((12) es llamada una familia de soluciones). La figura 9 muestra algunas de las soluciones (parábolas que abren hacia arriba) donde se nota el papel de la constante C para el corrimiento vertical de dichas parábolas. Es decir, cuando dos soluciones de la misma ecuación diferencial difieren entre sí por una translación vertical. Por esta razón, dos soluciones diferentes no se intersecan.

**Figura 9.** Gráficas de antiderivadas de la función f(x) = x.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Otro problema de antiderivada se nos da considerando la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (13)$$

Y queremos encontrar la antiderivada más general, F(x) de la función f(x) = 1/x, es decir, determinar las soluciones de la ecuación diferencial (13). Como todas las antiderivadas de 1/x pueden escribirse como:

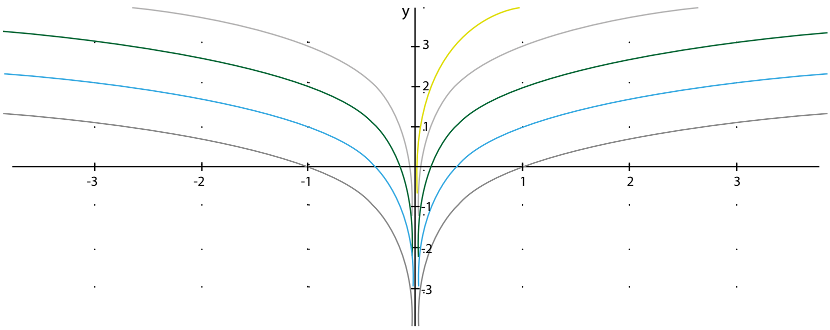
$$F(x) = \ln |x| + C$$

O como

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C & \text{Si } x > 0 \\ \ln(-x) + C & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

Donde C es una constante arbitraria, y estas son las soluciones. De nuevo, como consecuencia de la constante arbitraria, tenemos una familia de soluciones. Ver figura (10), donde se ve claramente el papel de la constante C, en la posición vertical de las soluciones. Si x > o, todas las soluciones de esta ecuación diferencial tienen la misma forma, y cualesquiera dos soluciones diferirán entre sí por una translación vertical. Lo mismo es verdadero para $x < 0$.

**Figura 10.** Antiderivadas de la función f(x) = 1/x.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## F. Modelo de enfriamiento/calentamiento de Newton

De acuerdo con la ley de Newton de enfriamiento/calentamiento, la rapidez con que la temperatura de un cuerpo cambia es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea, que se llama temperatura del medio ambiente. Si T (t) representa la temperatura del cuerpo en el tiempo t, Tm es la temperatura del medio ambiente que lo rodea, y d T (t) /d t es la rapidez con que cambia la temperatura del cuerpo, entonces la ley de Newton de enfriamiento/calentamiento traducida en una expresión matemática es:

$$\frac{dT}{dt} \propto T - Tm \quad o, \qquad \frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - T_m) \qquad (14)$$

Donde k es una constante de proporcionalidad. En ambos casos, enfriamiento o calentamiento, si Tm es una constante, se establece que $k < 0$ o $k > 0$.

# 1.4 Ejercicios

La frase «y es proporcional a x» implica que y está relacionado con x mediante una ecuación de la forma y = k x, donde K es una constante. De manera similar «y es proporcional al cuadrado de x implica que: $y = kx^2$, y es proporcional al producto de x y z» implica y = k x z, y «y es inversamente proporcional al cubo de x» implica $y = k/x^3$. Por ejemplo, cuando Newton propuso que la fuerza de atracción de un cuerpo a otro es proporcional, el producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos, podemos escribir inmediatamente:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Donde G es la constante de proporcionalidad, usualmente conocida como la constante de gravitación universal, M y m son las masas de los dos cuerpos y r, la distancia entre ellos. Use estas ideas para modelar cada una de los siguientes fenómenos mediante una ecuación diferencial. Todas las razones son asumidas respecto al tiempo.

1. La razón de crecimiento de una bacteria en un disco Petri, es proporcional al número de bacterias en el disco.

2. La razón de crecimiento de una población de ratones en un campo, es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la población.

3. Una cierta área puede sustentar una población máxima de 100 hurones. La razón de crecimiento de una población de hurones en esta área, es proporcional al producto de la población actual y a la diferencia entre la población actual y la población máxima sostenible.

4. La razón de decadencia de una cierta sustancia radioactiva, es proporcional a la cantidad de sustancia restante.

5. La razón de decadencia de una cierta sustancia radioactiva, es inversamente proporcional a la cantidad de sustancia restante.

6. Una papa que se está cocinando por algún tiempo, es removida del sartén. Si la temperatura de la cocina es 65 °F, la razón de cambio a la cual pierde la temperatura la papa, es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuarto y la temperatura de la papa.

7. Un termómetro está localizado sobre el vidrio de un congelador y se deja enfriar por un determinado periodo de tiempo. El termómetro es removido del congelador y se coloca en el cuarto que está a una temperatura de 77 °F. La razón por la cual el termómetro se calienta es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuarto y la temperatura del termómetro.

8. Una partícula se mueve a lo largo del eje x, su posición respecto al origen en un tiempo t es x (t). Una fuerza actúa sobre la partícula y es proporcional al movimiento, pero opuesta al desplazamiento de él. Use la ley de Newton para encontrar una ecuación diferencial para el movimiento del objeto.

9. Use la ley de Newton para encontrar la ecuación del movimiento de la partícula en el ejercicio 8, si la fuerza es proporcional, pero opuesta al cuadrado de la velocidad de la partícula.

10. Use la ley de Newton para encontrar la ecuación del movimiento de la partícula en el ejercicio 8, si la fuerza es inversamente proporcional, pero opuesta al cuadrado del desplazamiento de la distancia al origen.

11. El voltaje a través de un inductor, es proporcional a la razón a la cual está cambiando la corriente con respecto al tiempo.

12. Determine la ecuación diferencial de todas las curvas para las cuales la normal entre el punto (x ,y) y el eje x, es constante de longitud a.

13. Determine la ecuación diferencial de todas las curvas del plano, con la propiedad que el radio vector desde el origen al punto (x, y) de la curva, es el doble de la longitud de la porción de la tangente de este punto al eje x.

# 1.5 La derivada

**Figura 11.** Pierre de Fermat (1601-1665).

**Fuente.** Tomada de Perero (1994).

Fermat, matemático francés, abogado de profesión, quien junto con René Descartes fue considerado uno de los grandes matemáticos del siglo XVII, descubrió el cálculo diferencial antes que Newton y Leibniz; fue cofundador de la teoría de probabilidades junto a Blaise Pascal e independientemente de Descartes, descubrió el principio fundamental de la geometría analítica. Sin embargo, es más conocido por sus aportaciones a la teoría de números, en especial por el conocido como último teorema de Fermat, que preocupó a los matemáticos durante aproximadamente 350 años, hasta que fue demostrado en 1995 por Andrew Wiles, ayudado por Richard Taylor, sobre la base del teorema de Shimura-Taniyama (Aczel, 2004).

Empezamos esta unidad respondiendo a la pregunta, ¿qué es la derivada? Algunas respuestas se vienen a nuestra mente recordando nuestro curso de cálculo. Algunas de ellas serían las siguientes:

- La razón de cambio de una función.
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función.
- La mejor aproximación lineal de una función.
- El límite de las diferencias de los siguientes cocientes:

$$f^{/}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Una tabla que contiene las reglas y propiedades básicas de la derivada como la siguiente:

**Tabla 1.** Tabla de derivadas básicas.

| $f(x)$ | $f^{/}(x)$ |
|---|---|
| C | 0 |
| X | 1 |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| cos (x) | - sen (x) |
| Sen (x) | Cos (x) |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\ln(\lvert x \rvert)$ | $1/x \quad x \neq 0$ |

**Fuente.** Elaborada por el autor.

Todas estas respuestas son correctas. Cada una de ellas nos da una diferente forma de ver la derivada. Para el trabajo de ecuaciones diferenciales es muy bueno recordar a fondo cada una de ellas.

## A. La razón de cambio

En cálculo aprendemos que una función tiene una razón de cambio instantánea, y esta razón es igual a la derivada. Por ejemplo, si tenemos la función distancia x (t) medida desde un punto fijo sobre una línea, entonces la razón a la cual cambia x (t) con respecto al tiempo es la velocidad v. Entonces se tiene que:

$$v(t) = x^{/}(t) = \frac{dx}{dt}$$

De forma similar, la aceleración a (t) es la razón de cambio de la velocidad, es decir:

$$a(t) = v^{/}(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Estos hechos acerca del movimiento lineal son reflejados en muchos otros campos. Por ejemplo en economía, en las leyes de oferta y demanda se dice que el precio de un producto está determinado por la oferta del producto y por la demanda de este. Si se asume que la demanda es constante, entonces el precio P está en función de la oferta S, o P = P(S). La razón con la cual cambia el precio cuando cambia la oferta es llamada el precio marginal. En términos matemáticos, el precio marginal es simplemente la derivada $P^{/} = \frac{dP}{dP}$. También se puede hablar de la razón de cambio de la masa de un material radioactivo, del tamaño de una población, de la carga sobre un capacitor, del aumento del dinero en una cuenta o de muchas otras cantidades[3]. En todos y cada uno de ellos, la cantidad del cambio se mide con respecto al tiempo. Muchas de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias involucran la razón de cambio respecto al tiempo. Por esta razón, t es usualmente las variables independientes.

Sin embargo, hay casos donde las cosas pueden cambiar dependiendo de otros parámetros, como se verá más adelante. En este texto veremos estos ejemplos y muchos otros. El punto es que todas las cantidades cambien, la razón por la cual cambia es la derivada de dicha cantidad. Es un hecho importante hacer el proceso de modelamiento y realizar el estudio de la ecuación diferencial, por esta razón nos referimos a la proposición de que la derivada es la razón de cambio como modelando la definición de la derivada.

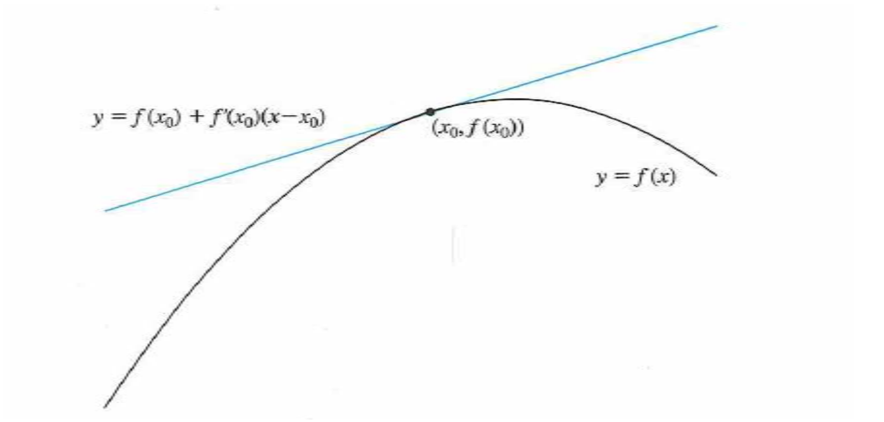
## B. La pendiente de la recta tangente

Esta idea nos permite una buena visualización de la derivada (figura 12). En ella se puede ver la gráfica de una función f, y la recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$. La ecuación de la recta tangente está dada por:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (15)$$

De esta fórmula, es fácil ver que la pendiente de la recta tangente es $f'(x_0)$

**Figura 12.** Recta tangente a una curva en un punto dado.




**Fuente.** Polking, Bogees y Arnold (2006).

Mirando de nuevo la figura 12, podemos visualizar la razón de cambio de la función f cuando x cambia cerca de $x_0$. Este cambio es el mismo al cual los cambios de las pendientes de las rectas secantes se van acercando.

Podemos referirnos a esta caracterización de la derivada como la definición geométrica de la derivada.

## C. La mejor aproximación lineal

Sea

$$L(x) = f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0) \qquad (16)$$

L es una función lineal (o afín) de x. El teorema de Taylor dice que existe una función residuo R(x), tal que:

$$f(x) = L(x) + R(x) \text{ y } \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} \qquad (17)$$

Este límite nos dice que R(x) es cada vez más pequeño a medida que $x \to x_0$. En efecto, este hecho nos dice que R(x) $=0$ es mucho más pequeño que $x - x_0$, ya que dicho cociente tiende a cero. Esto también nos dice que la función L(x) definida anteriormente, es la única función lineal que tiene esta propiedad. Esto es lo que significa cuando decimos que L es la mejor función lineal que aproxima a la función no lineal f. También se puede observar que la gráfica de la recta tangente en la figura 12 es la gráfica de L(x). La figura 12 también nos muestra que L(x) es una buena aproximación para f(x), siendo x cercano a $x_0$.

La fórmula en (16) define L(x) en términos de la derivada de f. En este sentido la derivada nos da la mejor aproximación para la función no lineal f cercano a $x = x_0$. (Realmente para la fórmula dada en 16 se requieren tres hechos importantes, $x_0$, $f(x_0)$, y $f^{/}(x_0)$, pero es claro que la derivada es el dato más importante de estos tres).

Como la aproximación lineal es un objeto algebraico, nos referimos a esta forma como la definición algebraica de la derivada.

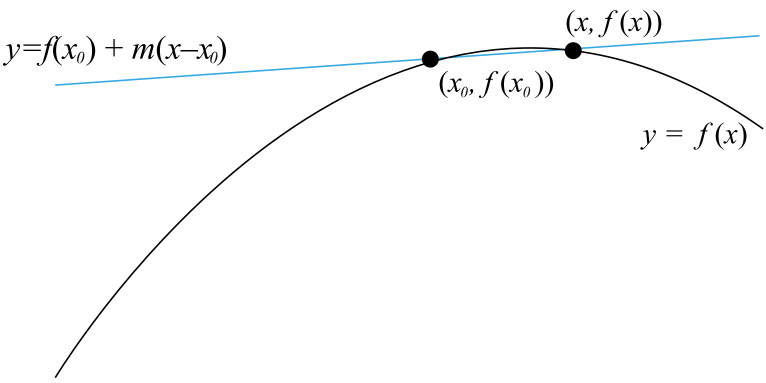
## D. El límite de cocientes de diferencias

Consideremos el cociente de diferencias:

$$m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (18)$$

Este cociente es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos ($x_0$, f($x_0$)) y (x, f(x)), tal como se muestra en la siguiente figura.

**Figura 13.** Recta secante a una curva.




**Fuente.** Polking, Bogees y Arnold (2006).

Nosotros nos referimos a esta línea como la línea secante. Cuando x se aproxima a $x_0$, las líneas secantes se aproximan a la recta tangente, como se muestra en la figura 13. Esto refleja el hecho que:

$$f^{/}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (19)$$

Esta es la pendiente de la recta tangente: $f^{/}(x_0)$, es el límite de las pendientes de las rectas secantes.

El cociente de diferencias en 18, es también el promedio de las razones de cambio de la función f entre $x_0$ y x. Como el intervalo entre $x_0$ y x es cada vez más pequeño, este promedio de razones se aproxima al cambio instantáneo de f. Este hecho nos permite ver entonces la conexión con nuestra definición de modelos.

La definición dada en (19) se llama la definición del límite del cociente. Esta es la definición que más piensan los matemáticos cuando hablan de la derivada. Además, como pudimos ver, es muy útil cuando queremos encontrar modelos matemáticos.

## E. La tabla de derivadas

Mediante la memorización de una tabla de derivadas y el manejo de unas pocas reglas, especialmente la regla de la cadena, podemos lograr las habilidades de la diferenciación. No es difícil ver que se puede calcular la derivada de cualquier función. Esta habilidad es muy importante. Muchas veces, es claro que esta definición formulista de derivada es diferente de las dadas previamente.

Un completo entendimiento de la definición por fórmulas es muy importante, pero estas no proveen de toda la información dada anteriormente por las otras definiciones, por lo tanto, no nos ayuda a aplicar la derivada, en el modelado de la naturaleza, ni da entender sus propiedades. Por esta razón la definición mediante fórmulas no es suficiente.

Esto no es cierto en las otras definiciones. A partir de una de ellas, es posible construir una tabla que nos dará las fórmulas que necesitemos. Es cierto que esto sería una tarea muy difícil, pero es lo que se hizo (o se debería haber hecho) en su primer curso de cálculo.

En resumen, hemos examinado las cinco definiciones de la derivada, todas ellas enfatizan en diferentes aspectos o propiedades. Las iremos usando todas ellas a medida que avancemos en el curso de ecuaciones diferenciales. Además, un completo entendimiento de la derivada requiere entender estas cinco definiciones. Incluso si su respuesta no está en la lista de estas cinco, puede ser correcta. El famoso matemático William Thurston hizo una lista de 49 «definiciones» de la derivada, claramente muchas de ellas solo se ven en cursos avanzados de matemáticas, pero lo que es claro es que la derivada aparece en muchas partes de las matemáticas y sus aplicaciones.

# 1.6 Ejercicios

Recordemos las siguientes reglas de derivación de su curso de cálculo. Sean f y g funciones diferenciables, entonces:

a. $(cf)' = cf'$ b. $(f \pm g)' = f' \pm g'$ c. $(f.g)' = f'.g + f.g'$

d. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$

También se tiene la regla de la cadena:

$$(f \circ g)' = f'(g(x)).g'(x)$$

Use estas reglas y la tabla 1 dada inicialmente en esta sección, para encontrar la derivada de cada una de estas funciones.

| | |
|---|---|
| 1. $f(x) = 4x - 5$ | 2. $f(x) = 6x2 - 7x - 9$ |
| 3. $f(x) = 5.\mathrm{sen}\,(3x)$ | 4. $F(x) = \cos\,(2\pi x)$ |
| 5. $f(x) = e^{3x}$ | 6. $F(x) = 7e^{x^2}$ |
| 7. $f(x) = \ln(\lvert 7x \rvert)$ | 8. $F(x) = \ln x(\cos(3x))$ |
| 9. $f(x) = x.\ln x$ | 10. $F(x) = e^x \mathrm{sen}(\pi x)$ |
| 11. $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$ | 12. $F(x) = \frac{x.\ln x}{\cos x}$ |

13. Suponga que f es diferenciable en $x_0$. Sea L «la mejor aproximación lineal» definida por $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$. Dado que $R(x) = f(x) - L(x)$. Muestre que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

Para cada una de las siguientes funciones, trace la gráfica de f y su Linealización $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$.

En el punto $x_0$ dado en el mismo sistema de coordenadas.

14. $f(x) = e^x$, si $x_0 = 0$.

15. $f(x) = \cos x$, si $x_0 = \frac{\pi}{4}$

16. $f(x) = \sqrt{x}$, si $x_0 = 1$

17. $f(x) = \ln(1+x)$, si $x_0 = 0$

La manera en que $R(x) / (x - x_0)$ en la ecuación 17, se aproxima a cero cuando $x \to x_0$, el numerador $R(x)$ se aproxima a cero tan rápido como el denominador $x - x_0$ lo hace. Para cada uno de los siguientes ejercicios, haga un bosquejo de la gráfica de $y = x - x_0$, y $R(x) = f(x) - L(x)$ sobre el mismo sistema de coordenadas. Haga aproximar ambos $x - x_0$ y $R(x)$ a cero. ¿Cuál se aproxima a cero más rápidamente $R(x)$ o $x - x_0$?

18. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, en $x_0 = 1$

19. $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, en $x_0 = \frac{\pi}{8}$

20. $f(x) = \sqrt{x+1}$, en $x_0 = 0$

21. $f(x) = x\,e^x\text{-}1$ en $x_0 = 1$

# 1.7 La integral de Riemann

**Figura 14.** Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

**Fuente.** Katz (1998).

Fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la hipótesis de Riemann, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann. Sus estudios iniciales fueron en Teología y Filosofía y necesitó el permiso de su padre para estudiar Matemáticas.

Podemos empezar de nuevo haciendo la siguiente pregunta, ¿qué es la integral? Esta vez nuestra lista de posibles respuestas no es tan larga:

1. El área por debajo de la gráfica de una función.
2. La antiderivada.

3. Una tabla que contiene elementos tales como vemos en el siguiente cuadro:

**Tabla 2.** Tabla de antiderivadas inmediata.

| f(x) | $\int f(x)dx$ | f(x) | $\int f(x)dx$ |
|---|---|---|---|
| 0 | C | Cos(x) | Sen(x) + C |
| 1 | X + C | Sen(x) | -cos(x) + C |
| X | $\frac{x^2}{2} + C$ | $e^x$ | $e^x + C$ |
| $x^n$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | $\frac{1}{x}$ | Ln \|x\| + C |

**Fuente:** Elaborada por el autor.

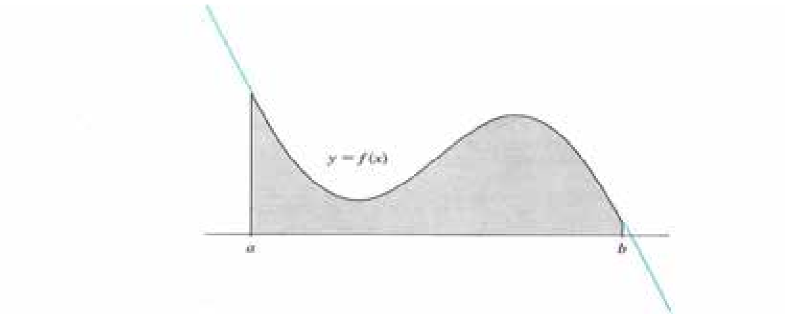
## A. El área bajo la gráfica de una función

La primera respuesta enfatiza la integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Es interpretada como el área bajo la gráfica de la función f positiva entre x = a y x = b. Esta integral representa el área sombreada en la siguiente figura.

**Figura 15.** Área bajo una curva.




**Fuente** Polking, Bogees y Arnold (2006).

Esta es la definición más fundamental de la integral, fue inventada para resolver el problema de encontrar el área de las regiones que no son simples rectángulos ni círculos. Después de su origen como un método para usar esta aplicación, se han encontrado numerosos ejemplos.

## B. La antiderivada

Esta respuesta enfatiza la definición de la integral indefinida. En efecto, la frase integral indefinida es sinónimo de antiderivada. Esta definición es reconocida en la siguiente equivalencia:

$$f' = g \quad \text{sí y solo sí} \quad \int g(x)dx = f(x) + C \qquad (20)$$

En 20, se hace referencia a una constante arbitraria de integración. Entonces el proceso integración indefinida involucre el proceso de la antiderivada. Dada una función g, debemos encontrar una función f, tal que $f' = g$.

La conexión entre la integral definida y la indefinida está dada por el teorema fundamental del cálculo. Este dice que si $f' = g$, entonces:

$$\int_a^b g(x)dx = f(b) - f(a) \qquad (22)$$

## C. La tabla de fórmulas

Esta formulación para la integral tiene las mismas características y fracasos, como la formulación aproximada de la derivada, la cual conduce a la habilidad práctica de la integración, pero no conduce a ningún entendimiento profundo de la integral.

Todas estas aproximaciones para la integral son muy importantes. Pero es muy importante entender los dos primeros y la forma en que están conectados por el teorema fundamental. Sin embargo, para la parte primaria del estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, realmente la segunda y tercera aproximación son las más importantes, es decir, la de la tabla y la de encontrar antiderivada.

# 1.8 Soluciones por integración

La solución de una importante clase de ecuaciones diferenciales se logra mediante la antiderivada. Una ecuación diferencial de primer orden se puede escribir en la forma:

$$y' = f(t, y) \qquad (23)$$

Donde el lado derecho es función que depende de la variable independiente t y la función desconocida y. Si el lado derecho solamente depende de la variable independiente t, entonces la ecuación toma la forma:

$$y' = f(t)$$

Y de acuerdo a (20), se tendría inmediatamente la solución:

$$y(t) = \int f(t)dt. \qquad (24)$$

## Ejemplo 1:

Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = \cos t$$

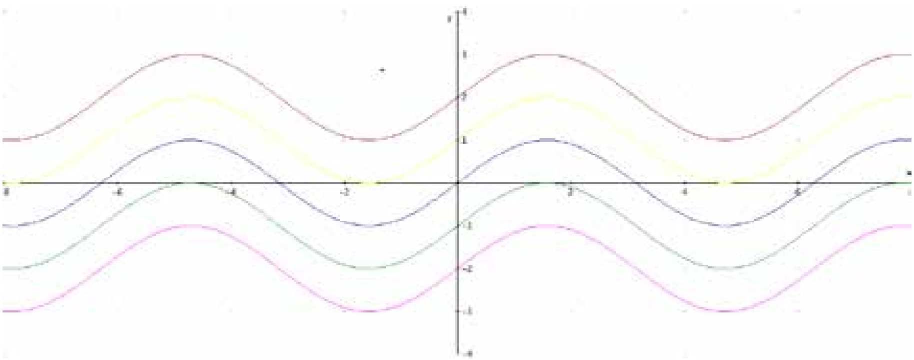
### Solución:

De acuerdo a (24), la solución es:

$$y(t) = \int \cos(t)dt = \mathrm{sen}(t) + C \qquad (25)$$

Donde C es una constante arbitraria, esto es bastante fácil, es precisamente el proceso de integración, muy conocido en sus cursos de cálculo. Resolver ecuaciones más generales de la forma (24), puede ya no ser tan fácil como recordamos en nuestro curso de cálculo. La constante de integración dada en (25) hace que nuestra solución sea una familia infinita uniparamétricas de soluciones definida en $(-\infty, \infty)$. Este es un ejemplo de una solución general de la ecuación diferencial. Algunas de las gráficas de las soluciones para algunos valores de C, se dan en la figura 16.

**Figura 16.** Antiderivadas de la función cos x.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Lo anterior significa que las gráficas de la curva solución de la ecuación son las dadas en la figura anterior, nos muestra que son translaciones verticales de una de ellas, lo que nos dice que toda solución se puede obtener a partir de una de ellas mediante una translación vertical.

Este siempre es el caso para las soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(t)$. De acuerdo a (21), si $y(t) = F(t)$ es una solución para la ecuación, entonces todas las otras soluciones son de la forma $y(t) = F(t) + C$, para alguna constante C. Las gráficas de tales funciones son translaciones verticales de la gráfica de $y(t) = F(t)$.

La constante de integración se puede calcular si se conoce una condición extra sobre la solución.

## Ejemplo 2:

Encuentre la solución para $y^{/}(t) = t\,e^{t}$ que satisface $y(0) = 2$.

### Solución:

Este es un ejemplo de un problema con condición inicial. Este tipo de problema siempre requiere encontrar una solución particular que satisface la condición inicial $y(0) = 2$. De acuerdo a (21) la solución general para la ecuación diferencial está dada por:

$$y(t) = \int te^{t}dt \qquad (26)$$

Recordemos que esta integral se resuelve usando integración por partes. Ya que este método es muy útil, se basa en general que:

$$\int u.dv = u.v - \int vdu \qquad (27)$$

Donde u y v son funciones. Si ellas son funciones de t, entonces $du = u^{/}(t)\,dt$, y $dv = v^{/}(t)dt$. Para la integral dada en (26), tenemos $u(t) = t$, $dv = v^{/}(T) = e^{t}\,dt$. Entonces $du = d(t)$, $v(t) = ey^{t}$ y por la ecuación (27), tenemos:

$$\int te^{t}dt = \int udv = uv - \int vdu = te^{t} - \int e^{t}dt$$

Después de evaluar la última integral tenemos:

$$y(t) = t\,e^{t} - e^{t} + C = e^{t}(t-1) + C \qquad (28)$$

Esta es una familia uniparamétrica de soluciones y es la solución general de la ecuación $y^{/} = te^{t}$ Cada miembro de la familia existe sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. La condición $y(0) = 2$ puede ser usada para determinar la constante C y dar la solución particular.

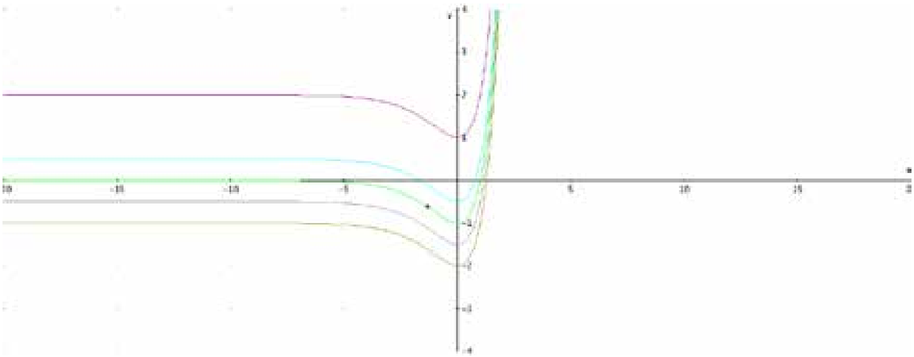
$$2 = y(0) = e^0 (0 - 1) + C = -1 + C$$

Entonces C = 3 y la solución del problema con valor inicial es:

$$y(t) = e^t (t - 1) + 3 \qquad (29)$$

Es importante observar que la curva solución definida por la ecuación (29), es un miembro de la familia de curvas solución dada por (28) que pasa por el punto (0,2), como se muestra en la figura 17.

**Figura 17.** Algunas antiderivadas de la función $f(t) = te^t$.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

El uso de la condición inicial para determinar una solución particular, puede ser encontrado desde el comienzo del proceso de solución usando la definición de la integral definida. Así, en el ejemplo 2 podemos usar el teorema fundamental del cálculo:

$$y(t) - y(0) = \int_0^t y'(t)dt$$

Entonces:

$$y(t) - y(0) = \int_0^t ue^u du$$

$$y(t) = y(0) + \int_0^t ue^u du$$

$$= 2 + (ue^u - e^u)\Big]_0^t$$

$$= e^t(1 - t) + 3$$

No siempre es necesario usar la letra t para la variable independiente, se puede usar cualquier otra letra, lo mismo se puede decir para la variable dependiente.

## Ejemplo 3:

Encontrar la solución del problema con condición inicial:

$$y' = \frac{1}{x}, \text{ con } y(1) = 3$$

### Solución:

Aquí, tomamos a x como la variable independiente. Integrando, encontramos que:

$$y\,(x) = \ln(|x|) + C$$

Para hallar la constante C y poder dar la condición inicial tenemos en cuenta que y (1) = 3, es decir:

$$3 = y\,(1) = \ln\,(1) + C = C.$$

Entonces, C = 3.

Una solución para una ecuación diferencial debe tener derivada en todo punto de su dominio. Entonces debe ser continua. Como la función y (x) = Ln (x) + 3, no está definida en x = 0, entonces debe ser continua en $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. Como necesitamos una solución que esté definida en x = 1, entonces escogemos $(0, \infty)$. Entonces la solución será:

$$y\,(x) = \ln\,(x) + 3 \text{ para } x > 0$$

## Ejemplo 4. El movimiento de una pelota:

Anteriormente vimos cómo podíamos aplicar la ley de Newton al movimiento de un balón cerca de la superficie de la tierra. El modelo que derivamos fue:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

Donde x (t) representa la altura del balón sobre la superficie de la tierra y g es la aceleración debida a la gravedad. Si nuestras medidas son x en pies y el tiempo medido en segundos, entonces g = 32pies/seg$^2$.

Supongamos que se lanza una pelota en el aire con velocidad inicial $v_0$ = 20 pies/seg. Y también asumimos que el balón es lanzado desde una altura de $x_0$ = 6 pies ¿cuánto tiempo se tarda para que la pelota golpee el suelo?

### Solución:

Podemos resolver esta ecuación usando el método dado en esta sección. Primero introducimos la velocidad, para reducir la ecuación de segundo grado a un sistema de dos ecuaciones de primer orden, así:

$$\frac{dx}{dt} = v, y \quad \frac{dv}{dt} = -g \qquad (30)$$

Resolviendo la segunda ecuación, integrando a ambos lados tenemos:

$$v\,(t) = -\,g\,t + C_1$$

Evaluando esta ecuación en t = 0, encontramos la constante de integración $C_1$ = v (0) = $v_0$ = 20, la velocidad inicial. Luego la velocidad está dada por v (t) = - g t + $v_0$ = - 32t + 20. Entonces la primera ecuación en (30) nos queda:

$$\frac{dx}{dt} = -g\,t + v_0 = -32\,t + 20$$

Resolviendo e integrando, tenemos:

$$v\,(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2 = -16t^2 + 20t + C_2$$

Una vez más, evaluamos esta ecuación en t = 0, para obtener $C_0$ = x (0) = $x_0$ = 6. Esta es la altura inicial de la bola. Entonces la solución final es:

$$x(t) = -\frac{1}{2}\,gt^2 + v_0t + x_0 = -16\,t^2 + 20t + 6$$

La pelota toca el suelo cuando x (t) = 0. Resolviendo la ecuación 0 = - 16 $t^2$ + 20 t + 6 y usando solamente la solución positiva, vemos que el balón está en el suelo después de 15 segundos.

# 1.9 Ejercicios

En el siguiente ejercicio, encuentre la solución general de la ecuación diferencial. En cada caso chequee al menos seis de las ecuaciones de las curvas solución.

| | |
|---|---|
| 1. $y' = 2t + 2$ | 2. $y' = 3t^2 + 2t + 3.$ |
| 3. $y' = \text{sen}(2t) + 2\cos(3t)$ | 4. $y' = 2\,\text{sen}(3t) - \cos(5t)$ |
| 5. $y' = \frac{1}{1+t^2}$ | 6. $y' = \frac{3t}{1+2t^2}$ |
| 7. $y' = t^2 e^{3t}$ | 8. $y' = t\cos(3t)$ |

En los siguientes ejercicios cada ecuación tiene la forma $y' = f(t, y)$, siendo el objetivo encontrar una solución de la forma $y = y(t)$; es decir, encontrar y en función de t. Por supuesto, usted es libre de elegir diferentes letras, tanto para las variables dependientes e independientes. Por ejemplo, en la ecuación diferencial $s' = s.e^x$ , se entiende que $s' = ds / dt$, y que se debe encontrar una solución s como función de x, es decir $s = s(x)$. En los siguientes ejercicios se pide encontrar la solución general de la ecuación diferencial dada. En cada caso chequee seis miembros de la familia de soluciones particulares.

| | |
|---|---|
| 9. $s' = e^{(2w)}\text{sen}(w)$ | 10. $y' = x.\,\text{sen}(3x)$ |
| 11. $x' = s^2 e^{-s}$ | 12. $s' = e^{-u}\cos(u)$ |
| 13. $r' = \frac{1}{u(1-u)}$ | 14. $y' = \frac{3}{x(4-x)}$ |

Observación: para resolver los ejercicios 13 y 14 se debe usar fracciones parciales.

En los siguientes ejercicios, encuentre la solución particular de cada problema con condición inicial.

| | |
|---|---|
| 15. $y' = 4t - 6$, $y(0) = 1$ | 16. $y' = x^2 + 4$ $y(0) = -2$ |
| 17. $x' = t.e^{-t^2}$, $x(0) = 1$ | 18. $r' = \frac{t}{(1+t^2)}$, $r(0) = 1$ |
| 19. $s' = r^2.\cos(2r)$ $s(0) = 1$ | 20. $P' = e^{-t}\cos(4t)$ $P(0) = 1$ |
| 21. $x' = \sqrt{4-t}$, $x(0) = 1$ | 22. $u' = \frac{1}{(x-5)}$, $u(0) = -1$ |
| 23. $y' = \frac{t+1}{t(t+4)}$, $y(-1) = 0$ | 24. $u' = \frac{r^2}{r+1}$, $v(0) = 0$ |

En los siguientes ejercicios, asuma que el movimiento del balón tiene lugar en un espacio libre de fricción. Es decir, que la única fuerza que actúa sobre el balón es la fuerza de la gravedad.

25. Un balón es lanzado al aire desde una altura de 3 m con una velocidad inicial de 50 m/seg. ¿Cuál es la velocidad del balón después de 3 seg.?

26. Una pelota se deja caer desde una altura de reposo 200 m. ¿Cuál es la velocidad y posición del balón 3 seg. después?

27. Se lanza una pelota al aire desde una altura inicial de 6 m con una velocidad inicial de 20 m/seg. ¿Cuál será la altura máxima de la pelota y en qué momento se producirá este hecho?

28. Una bola es impulsada hacia abajo desde una altura inicial de 1000 m con una velocidad inicial de 25 m/seg. Calcule el tiempo que tarda la pelota en tocar el suelo.

29. Para finalizar esta unidad de prerrequisitos se propone una serie de integrales que le permitan al estudiante recordar algunos métodos analíticos de integración.

| | |
|---|---|
| 29-1 $\int \text{sen } t \, dt$ | 29-2 $\int \cos 2t \, dt$ |
| 29-3 $\int e^{5t} \, dt$ | 29-4 $\int (3x+7) \, dx$ |
| 29-5 $\int \text{sen } 2\theta \, d\theta$ | 29-6 $\int (x^3-1)^4 \, dx$ |
| 29-7 $\int \left(x^{3/2}+x^{2/3}\right) dx$ | 29-8 $\int (e^x+3^x) \, dx$ |
| 29-9 $\int (r+1)^3 \, dr$ | 29-10 $\int \left(\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right) dx$ |
| 29-11 $\int \left(\frac{x^3+x+1}{x^2}\right) dx$ | 29-12 $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x} \, dx$ |
| 29-13 $\int t e^{t^2} \, dt$ | 29-14 $\int x\cos x \, dx$ |
| 29-15 $\int \text{sen } x\sqrt{2+3\cos x} \, dx$ | 29-16 $\int x^2 e^{2x} \, dx$ |
| 29-17 $\int x\sqrt{1-x} \, dx$ | 29-18 $\int x\ln x \, dx$ |
| 29-19 $\int y \,\text{sen}\, y \, dy$ | 29-20 $\int (\ln x)^2 \, dx$ |
| 29-21 $\int \ln(x^2) \, dx$ | 29-22 $\int e^{0.5-0.2t} \, dt$ |
| 29-23 $\int \text{sen}^2 \theta \cos\theta \, d\theta$ | 29-24 $\int x\sqrt{1-x} \, dx$ |
| 29-25 $\int \frac{(u+1)^3}{u^2} \, du$ | 29-26 $\int \frac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \, dy$ |
| 29-27 $\int \frac{1}{\cos^2 z} \, dz$ | 29-28 $\int \cos^2 x \, dx$ |

29-29 $\int t^{10}(t-10)\, dt$

29-30 $\int \tan(2x-6)\, dx$

29-31 $\int_1^3 \ln(x^3) dx$

29-32 $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

29-33 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \operatorname{sen} 2x dx$

29-34 $\int_0^{10} z e^{-z} dz$

29-35 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta \, d\theta$

29-36 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^3 \cos(x^2) dx$

29-37 $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

29-38 $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$

29-39 $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

29-40 $\int \frac{(t+2)^2}{t^3} dt$

29-41 $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right) dx$

29-42 $\int \frac{t+1}{t^2} dt$

29-43 $\int t e^{t^2+1}\, dt$

29-44 $\int \tan \theta \; d\theta$

29-45 $\int \operatorname{sen}(5\theta)\cos(5\theta)\, d\theta$

29-46 $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

29-47 $\int \frac{dz}{1+z^2}$

29-48 $\int \frac{dz}{1+4z^2}$

29-49 $\int \cos^3 2\theta \operatorname{sen} 2\theta \; d\theta$

29-50 $\int \operatorname{sen}(5\theta)\cos^3(5\theta)\, d\theta$

29-51 $\int \operatorname{sen}^3 \theta \cos^3 \theta \; d\theta$

29-52 $\int t(t-10)^{10} dt$

29-53 $\int \cos \theta \sqrt{1 + \operatorname{sen} \theta} \; d\theta$

29-54 $\int x e^x dx$

29-55 $\int t^3 e^t dt$

29-56 $\int_1^3 x(x^2+1)^{70} dx$

29-57 $\int (3z+5)^3 dz$

29-58 $\int \frac{du}{9+u^2}$

29-59 $\int \frac{\cos w}{1+\operatorname{sen}^2 w} dw$

29-60 $\int \frac{1}{x} \tan(\ln x) dx$

29-61 $\int \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) dx$

29-62 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

29-63 $\int \frac{w\,dw}{\sqrt{16-w^2}}$

29-64 $\int \frac{e^{2y}+1}{d^{2y}}\,dy$

29-65 $\int \frac{\operatorname{sen} w\,dw}{\sqrt{1-\cos w}}$

29-66 $\int \frac{dx}{x\ln x}$

29-67 $\int \frac{du}{3u+8}$

29-68 $\int \frac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

29-69 $\int \frac{t^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dt$

29-70 $\int u e^{ku}\,du$

29-71 $\int w(w+5)^4 dw$

29-72 $\int e^{\sqrt{2}x+3} dx$

29-73 $\int r(\ln r)^2 dr$

29-74 $\int (e^x + x)^2 dx$

29-75 $\int u^2 \ln u\,du$

29-76 $\int \frac{5x+6}{x^2+4}\,dx$

29-77 $\int \frac{1}{sen^3(2x)}\,dx$

29-78 $\int \frac{dr}{r^2-100}$

29-79 $\int y^2 sen(cy)dy$

29-80 $\int e^{-ct} senkt\,dt$

29-81 $\int e^{5t}\cos(3t)dt$

29-82 $\int \left(x^{\sqrt{k}} + \sqrt{k}^{x}\right) dx$

29-83 $\int \sqrt{3+12x^2}\,dx$

29-84 $\int (x^2-3x+2)e^{-4x}dx$

29-85 $\int \frac{dx}{x^2+5x+4}$

29-86 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$

29-87 $\int \frac{x^3}{x^2+3x+3}\,dx$

29-88 $\int \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}\,dx$

29-89 $\int \frac{dx}{ax^2+bx}$

29-90 $\int \frac{dx}{x^2+5x+4}$

29-91 $\int \frac{dz}{z^2+z}$

29-92 $\int \left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^2 dx$

29-93 $\int \frac{2^t}{2^t+1}\,dt$

29-94 $\int 10^{1-x}dx$

29-95 $\int (x^2+5)^3 dx$

29-96 $\int v\,arcsenv\,dv$

29-97 $\int sen^2(2\theta)cos^3(2\theta)\, d\theta$.

29-98 $\int cos\,(2sen(x)cos(x)\, dx$

29-99 $\int \sqrt{4-x^2}dx$

29-100 $\int \frac{z^3}{z-5}dz$

29-101 $\int \frac{sen\, w cos\, w}{1+cos^2 w}\, dw$

29-102 $\int \frac{1}{tan 3\theta}d\theta$

29-103 $\int \frac{x}{cos^2 x}dx$

29—104 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$

29-105 $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

29-106 $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$

29-107 $\int \frac{e^{2y}}{e^{2y}+1}dy$

29-108 $\int \frac{z}{(z^2-5)^2}\, dz$

29-109 $\int \frac{z}{(z-5)^3}\, dx$

29-110 $\int \frac{(1+tanx)^3}{cos^2 x}\, dx$

20-111 $\int \frac{(2x-1)e^{x^2}}{x^2+3x+3}\, dx$

29-112 $\int(x+senx)^3(1+cosx)dx$

29-113 $\int(2x^3+3x+4)sen(2x)dx$

# CAPÍTULO 2.

# CONCEPTOS BÁSICOS (IDEAS CUALITATIVAS)

## Contenido



## Competencias

1. Deducir el concepto de ecuación diferencial.
2. Resolver cualitativamente una ecuación diferencial.
3. Aprender a hacer un análisis cualitativo de las soluciones de una ecuación diferencial.
4. Reconocer un Problema con Valor Inicial (PVI).

**Figura 1.** Sir Isaac Newton (1642-1727).

**Fuente.** Perero (1994).

Comenzó a trabajar en la ciencia y las matemáticas al entrar en el Colegio de la Trinidad en Cambridge, en 1661. En 1665 se graduó sin honores y volvió a casa para evitar la peste, que se difundió con rapidez por toda Inglaterra ese mismo año. Durante los dos años siguientes, descubrió el cálculo, determinó los principios fundamentales de la gravedad y el movimiento de los planetas y reconoció que la luz blanca está compuesta por todos los colores; mantuvo en secreto estos descubrimientos. En 1667, Newton volvió al Colegio de la Trinidad, obtuvo su grado de maestro y permaneció como profesor. Newton continuó su trabajo relacionado con sus antiguos descubrimientos, formuló la ley de la gravitación, teoría básicas de la luz, la termodinámica y la hidrodinámica e inventó el primer telescopio de reflexión.

En 1687 fue persuadido para que publicara su obra *Philosophae Naturalis Principia Mathematica*, que contenía las leyes básicas del movimiento; se le considera uno de los libros científicos más influyentes jamás escritos. A pesar de sus grandes logros, Newton se decía a sí mismo: «Creo que he estado jugando como niño en la ribera divirtiéndome ahora y encontrando después un guijarro más liso o una caracola más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad yace ante mí con todos sus secretos».

Las ecuaciones diferenciales surgieron por primera vez en los trabajos de Newton y Leibniz. En 1671, en el capítulo 2 de su trabajo «Método de fluxiones y series infinitas» Isaac Newton hizo una lista de tres tipos de ecuaciones diferenciales:

a. $\frac{dy}{dx} = f(x).$ b. $\frac{dy}{dx} = f(x, y).$ c. $x_1 \frac{\delta y}{\delta x_1} + x_2 \frac{\delta y}{\delta x_2} = y.$

Resolvió estas y otras ecuaciones, usando series infinitas y discutió la no unicidad de las soluciones.

# Introducción

La idea de esta sección es formalizar el concepto de lo que es una ecuación diferencial y desarrollar métodos para analizar ecuaciones diferenciales ordinarias, aprovechando todas las ideas dadas en la sección anterior, en donde se vio la potencia del cálculo diferencial e integral. Lograremos este objetivo abordando los diferentes temas desde los puntos de vista geométrico (gráfico), numérico y analítico. Debido a que cada una de estas perspectivas en ocasiones proporciona información incompleta, siempre necesitamos comparar la consistencia de los resultados.

Las estrategias propuestas en esta sección le permitirán analizar adecuadamente las soluciones de una ecuación diferencial, incluso aunque no resulte posible expresar analíticamente dichas soluciones.

# 2.1 Definición y ejemplos de una ecuación diferencial y su clasificación

Empezamos dando una definición de lo que es una Ecuación Diferencial:

> «Es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes».

- Una **Ecuación Diferencial Ordinaria** (EDO) contiene solo derivadas ordinarias.
- Una **Ecuación Diferencial Parcial** (EDP) contiene derivadas parciales.
- El **orden** de una ecuación diferencial hace referencia al orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

## Ejemplo 1:

a. $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con variable independiente t, y variable dependiente y.

b. $\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, y^/)$ es una ecuación diferencial ordinaria de segundo grado con variable independiente t, y variable dependiente y.

c. $2\frac{d^2y}{dt^2} + y\frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$, es también una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con variable independiente t y variable dependiente y.

d. $\frac{d^5y}{dt^5} - \frac{dy}{dt} = 4yt$, es una ecuación diferencial ordinaria de quinto grado con variable independiente t y variable dependiente y.

e. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=xyz$, es una ecuación diferencial parcial de segundo orden con variables independientes x y, t, y variables dependientes y, y, z.

## Ecuaciones diferenciales simples y soluciones explícitas

Ya vimos en la unidad 1, dos de los muchos ejemplos de ecuaciones diferenciales que abarca el cálculo. Todos los problemas donde aparece la integral indefinida (o antiderivada) de una función g(x), podrían haberse abordado tratando de encontrar y(x) como una solución de:

$$\frac{dy}{dx}=g(x) \qquad (1)$$

La soluciones de (1) tienen la forma:

$$y(x) = \int g(x)dx + C \qquad (2)$$

Donde $\int g(x)dx$ es cualquier antiderivada específica de g(x). La constante arbitraria C indica que tenemos un número infinito de soluciones relacionadas entre si por una translación vertical.

Antes de entrar a dar el mecanismo de soluciones de ecuaciones diferenciales, veamos una definición:

Definición 2-1. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación diferencial que contiene la primera derivada de una función desconocida. Si y es una función desconocida que depende de x, entonces la ecuación diferencial de primer orden se escribe:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=g(x,y)} \qquad (3)$$

Donde g(x, y) es una función de las variables x, y, y.

El miembro derecho de la ecuación (3) puede contener a x, y, y explícitamente, por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

Sin embargo, en esta unidad vamos a analizar ecuaciones diferenciales en donde g solamente depende de la variable x, luego veremos cuando g depende solamente de y, y por último, cuando g depende de x, y de y. Recordemos que si y es una función de x (y = f(x)), se dice que x es la variable independiente y, y es la variable dependiente.

Definición 2-2. Una solución explícita de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y) \quad (4)$$

Es una función y = y(x), con una derivada en un intervalo a < x < b, la cual satisface idénticamente la ecuación diferencial (4).

## Observaciones:

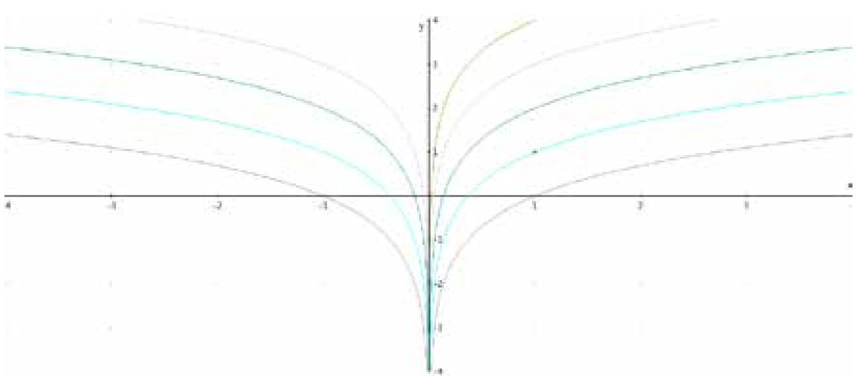
Debido a que una solución explícita tiene una derivada en el intervalo a < x < b, debe ser continua en ese intervalo, ya que tiene derivada. Una solución explícita nunca posee una tangente vertical (ya que tiene derivada en dicho intervalo).

Una solución explícita puede contener una constante arbitraria. Si la tiene, tendremos un número infinito de soluciones, que constituyen una familia de soluciones explícitas. Si no contiene una constante arbitraria, tendremos una solución explícita. Con frecuencia las soluciones explícitas particulares se conocen simplemente como soluciones particulares.

La gráfica de una solución particular se conoce como curva solución de la ecuación diferencial.

Por ejemplo, en la sección 1 ejemplo 1 donde $\frac{dy}{dx} = cos\ (t)$, vimos que la familia de soluciones está dada por: y(x) = sen (t) + C. Por otro lado, si observamos el ejemplo 3 de la sección 1, donde se tiene $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, con y (1) = 3, encontramos que y(x) = ln(x) + 3, es una solución explícita de la ecuación diferencial dada. Si además queremos resolver esta misma ecuación, pero con la condición y (-1)= 0, entonces tenemos como solución y(x) = ln(x), ya que y (-1) = ln $|-1| + C = 0$ de donde C = 0. Las gráficas de estas curvas solución se dan en la figura 2.

**Figura 2.** Familia solución para $\frac{dy}{dx} = lnx$.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

En general cuando nos dan una ecuación diferencial, con una condición inicial, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y) \qquad y(x_1) = y_1$$

Se llama problema con condición inicial, y el punto ($x_1$, $y_1$) se conoce como valor inicial, condición inicial o punto inicial.

## 2.2 Escribiendo soluciones en la forma de integrales

**Figura 3.** Gottfried Leibniz (1646-1717).

**Fuente.** Perero (1994).

Leibniz, matemático y filósofo, descubrió el cálculo aproximadamente al mismo tiempo que Newton, pero independiente de él. Ambos se disputaron el crédito del descubrimiento. Resolvió las ecuaciones diferenciales tal como lo hacemos nosotros hoy en día.

Hay otra forma de expresar la solución de (3) cuando se especifica una condición inicial como ($x_0$, $y_0$), también puede expresarse como:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + y(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + y_0 \quad (5)$$

Esta última forma de solución es particularmente útil, cuando resulta imposible evaluar la integral en términos de funciones conocidas. Veamos un ejemplo.

## Ejemplo 2. La función error:

Una función importante, empleada de manera extrema en la aplicación de la teoría de probabilidades y procesos de difusión, es la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \qquad (6)$$

restringida a las condiciones iniciales siguientes:

$$y(0) = 0 \qquad (7)$$

La solución explícita de (5) se puede expresar como:

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt + C \qquad (8)$$

Esta integral no se puede resolver por métodos analíticos, por lo tanto, para hallar la solución particular utilizamos la ecuación dada en (5) con $x_0$ = 0 y $y_0$ = 0, para obtener:

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

# 2.3 Soluciones gráficas usando el cálculo

## Ejemplo 3:

Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$dy/dx = y' = \frac{1}{x}, \qquad (9)$$

Trazar la gráfica de la función.

### Solución:

Al tener la derivada 1/x de la función que estamos buscando, y recordando nuestro curso de cálculo podemos analizar:[4]

- Monotonía: ¿Dónde son crecientes las soluciones y dónde decrecientes?
- Concavidad: ¿Dónde tienen concavidad hacia arriba las soluciones y dónde la tienen hacia abajo?
- Simetría: ¿Existen algunas simetrías?
- Singularidades: ¿Es posible comenzar en una curva solución donde $x < 0$ y continuar a lo largo de la curva para llegar finalmente a valores positivos de x?
- Unicidad: ¿Se intersecan algunas soluciones?

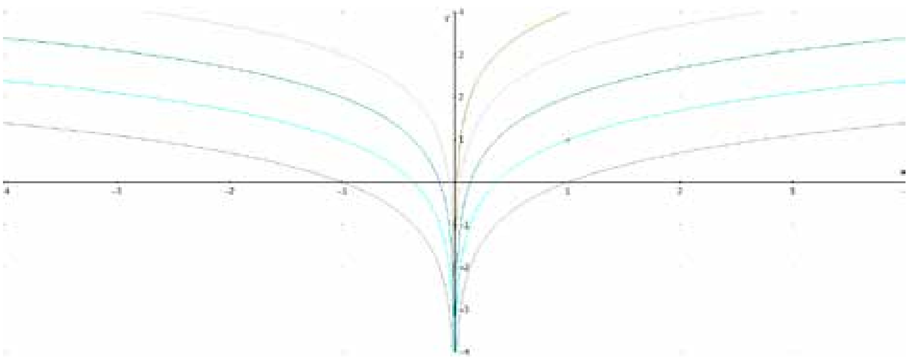
Vimos en la sección 1.8, ejemplo 3, que la gráfica de la solución general de dicha ecuación diferencial, es:

$$y = \ln|x| + C, \text{ o } y(x) = \begin{cases} \ln x + C & si\ x > 0 \\ \ln(-x) + C & si\ x < 0 \end{cases}$$

4 Este método cualitativo no es más que recordar la aplicación de la derivada del curso de cálculo diferencial.

Algunas de las soluciones se muestran en la siguiente figura.

**Figura 4.** Familia solución para $\frac{dy}{dx} = 1/x$.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

A partir de esta figura podemos ver:

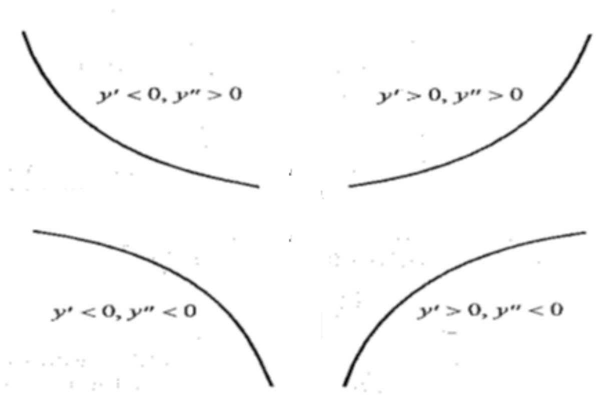
a. Monotonía: las gráficas son decrecientes para x <0 y crecientes para x >0.
b. Concavidad: es cóncava hacia abajo para x $\neq 0$.
c. Simetría: sí (es simétrica respecto al eje y). No obstante ninguna solución particular tiene simetría. **Es la familia de soluciones la que tiene esta simetría.** Es decir, esta es una propiedad global mas no local.
d. Singularidades: no para ninguna solución particular, ya que el eje y es una asíntota como se ve en la gráfica.
e. Unicidad: en esta gráfica la respuesta es afirmativa.

Ahora imaginémonos que no se pudiera integrar explícitamente el lado derecho de la ecuación (9), por lo tanto, no podríamos dibujar las soluciones particulares, tal como se hizo en este ejemplo para dar respuesta a los cinco ítems analizados.

Veamos cómo se haría un análisis cualitativo de esta ecuación diferencial, haciendo uso del conocimiento del cálculo diferencial.

Del cálculo sabemos que si $y' > 0$ sobre un intervalo abierto I, entonces se requiere que y sea creciente en dicho intervalo, y que si $y' < 0$ significa que y es decreciente en el intervalo. También sabemos que si $y'' > 0$ en un intervalo I requiere que la función y tenga concavidad hacia arriba en dicho intervalo, y si $y'' < 0$ significa que la función tiene concavidad hacia abajo en el intervalo. La figura 5 muestra las diferentes formas generales de la curva solución para los cuatro casos: a) $y' < 0$, $y'' > 0$; b) $y' > 0$, $y'' > 0$; c) $y' < 0$ y, $y'' < 0$; d) $y' > 0$, $y'' < 0$.

**Figura 5.** Tipos concavidad y monotonía de una curva.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Con esta información podemos regresar a hacer el análisis cualitativo de la solución de nuestra ecuación diferencial:

$$dy / dx = y' = \frac{1}{x}$$

a) Monotonía: de la función 1/x, sabemos que ella es positiva si x > 0, por lo tanto, la derivada es positiva para x > 0 y por lo tanto, y es creciente en este intervalo. Del mismo modo se tiene que 1/x es negativa si x < 0 y por lo tanto, y es decreciente para x < 0.

b) Concavidad: Si calculamos $y''$ con respecto a x, se tiene que:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Es siempre negativa para $x \neq 0$. De manera que las soluciones deben tener siempre concavidad hacia abajo para todo $x \neq 0$.

c) Simetría: la simetría a través del eje y implica que no hay cambio alguno en la familia de soluciones si se reemplaza x por – x en ambos miembros de la igualdad de (9). Si reemplazamos x por – x obtenemos:

$$\frac{dy}{-dx} = -\frac{1}{-x} \text{ ó } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Que es exactamente la ecuación original. Así, la familia de soluciones que satisface a (9), permanece inalterada por el intercambio de x por – x, y de este modo debe ser simétrica respecto al eje y.

d) Singularidades: debido a que la ecuación diferencial (9) no está definida en x = 0, entonces se daña la continuidad de la función en dicho valor, luego aquí se tiene un punto de singularidad.

e) Unicidad: el enunciado de que dos soluciones se intersecan significa que existe un punto común $(x_0, y_0)$ a través del cual pasan dos distintas soluciones particulares de (9), digamos $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Debido a que tanto $y_1$ como $y_2$ son soluciones de (9) debemos tener que $y_1' = 1/x$, y $y_2' = 1/x$, de manera que $y_1' = y_2'$, ó $(y_1' - y_2') = 0$. Esto implica que $y_1(x) - y_2(x) = C$. El hecho de que $y_0 = y_1(x_0)$ y $y_0 = y_2(x_0)$ requiere que C = 0, de modo que $y_1(x) = y_2(x)$. En otras palabras, las dos curvas son una misma. Esto significa que solamente una solución de (9) puede pasar a través de cualquier punto de $(x_0, y_0)$. Otra manera de decir esto es que, una solución de la ecuación diferencial (9) que pasa por cualquier punto dado es única.

Este último argumento es válido para cualquier ecuación diferencial de la forma y/ = g(x), y entonces sirve para demostrar que dos soluciones no pueden intersecarse para ecuaciones.

## Ejemplo 4. La función de error de nuevo:

Apliquemos el análisis gráfico a la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

### Solución:

- Monotonía: la derivada de y que es $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ para todo valor de x representa un numero positivo, por lo tanto la función y es siempre creciente.
- Concavidad: si derivamos de nuevo a dy/dx se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

  Se puede ver que $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ si x < 0, y $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ si x > 0
  Luego todas las funciones solución serán cóncavas hacia arriba si x < 0, y cóncava hacia abajo si x > 0-.
- Simetría: si cambiamos x por – x, en la ecuación diferencial dada tenemos que el lado derecho no cambia por estar x al cuadrado, pero el lado izquierdo cambia de signo, luego nos queda:

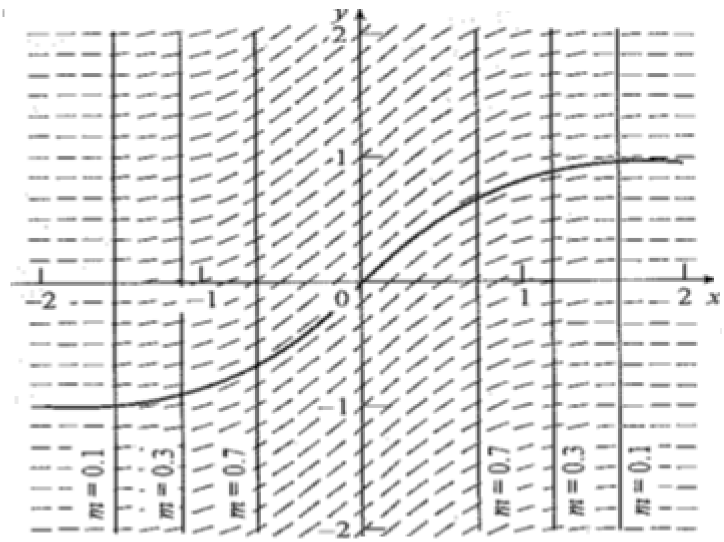
$$-\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

  La familia de soluciones no es simétrica respecto al eje y. Pero si cambiamos x por –x y, y por – y simultáneamente la ecuación no nos cambia, es decir que las funciones solución son simétricas respecto al origen.

- Singularidades: no hay puntos en donde la derivada sea cero o donde la derivada no exista.
- Unicidad: un argumento semejante al del ejemplo tres nos muestra que las soluciones no se pueden intersecar.

Basados en toda la información anterior se puede hacer un bosquejo de la familia de soluciones de la ecuación diferencial anterior.

**Figura 6.** Campo de pendientes y una curva solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

# 2.4 Campos de pendientes e isóclinas[5]

En la sección anterior vimos cómo, aplicando técnicas del cálculo, era posible obtener una gran cantidad de información cualitativa acerca de las soluciones de $y' = g(x)$ a partir de los signos de la primera y segunda derivadas. Sin embargo, todavía hay información en la ecuación diferencial, porque además de los signos también nos proporciona la magnitud de la pendiente de la recta tangente en cada punto de la curva solución.

En esta sección veremos cómo encontrar las soluciones gráficas de una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$y' = f(x, y)$$

Comenzaremos con un ejemplo bien sencillo.

5 Estos conceptos son clave en el análisis cualitativo de una ecuación diferencial ordinaria. Estos son los mismos elementos que usamos para la gráfica de funciones en el Cálculo. Una completa referencia de estos métodos y pruebas son dadas por J. H. Hubbard & B. H. West Differential Equations: A Dynamical Systems Approch. Springer Verlang, 1989.

## Ejemplo 5:

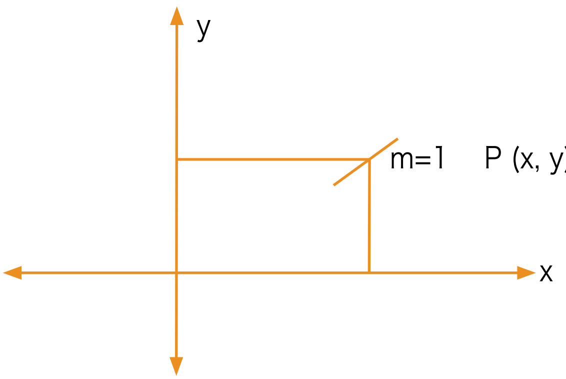
Consideremos la ecuación diferencial, hacer un análisis gráfico de las soluciones:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \qquad (10)$$

### Solución:

Esta ecuación describe la función cuya razón de cambio es siempre 1. Con los conocimientos de cálculo, tracemos algunas curvas solución de (10). Debido a que el lado de la derecha es positivo, se tiene que las soluciones son crecientes en todo punto de su dominio. También se tiene que para todos los puntos (x, y), la solución de esta ecuación diferencial tiene una línea tangente cuya pendiente es 1. Para transferir esta información a una gráfica podemos seleccionar varias coordenadas (x, y) y trazar segmentos cortos de recta con pendiente 1, tal como se muestra en la siguiente figura.

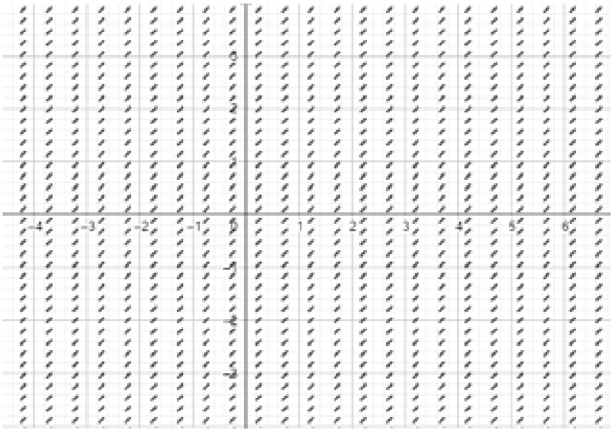
**Figura 7.** Segmento de pendiente en el punto (x,y).




**Fuente.** Elaborada por el autor.

Si lo repetimos en cada punto, obtenemos una figura como la siguiente.

**Figura 8.** Campo de pendientes para la curva $\frac{dy}{dx} =$.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Esta colección, formada por segmentos cortos de la recta tangente en cada punto, recibe el nombre de campos de pendientes, o campos de direcciones de la ecuación diferencial, ya que proporciona un segmento corto de la línea tangente a la curva solución por cada punto seleccionado.

Ahora, si se quiere construir una curva solución cuyas líneas tangentes sean consistentes con el campo de pendientes. Si intentamos trazar una curva cuya línea tangente tenga pendiente 1 en todos partes, terminamos dibujando una línea recta con pendiente 1. De hecho, la familia de rectas $y = x + C$ constituye las curvas solución de (10).

Cómo trazar el campo de pendientes para $y' = g(x, y)$

1. Seleccione una ventana rectangular en el plano $x - y$ en la cual visualizar el campo de pendientes.
2. Subdivida la región rectangular en una cuadrícula de puntos $(x, y)$ igualmente espaciados. El número de puntos en la dirección de $x$, y la dirección de $y$ puede ser diferente.
3. En cada uno de estos puntos $(x, y)$ determine el valor numérico de $g(x, y)$ y dibuje un segmento de recta corto en $(x, y)$ con pendiente $g(x, y)$.

## Ejemplo 6:

Consideremos ahora la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x \qquad (11)$$

Hacer un análisis de su campo de pendientes y trazar dicho campo.

### Solución:

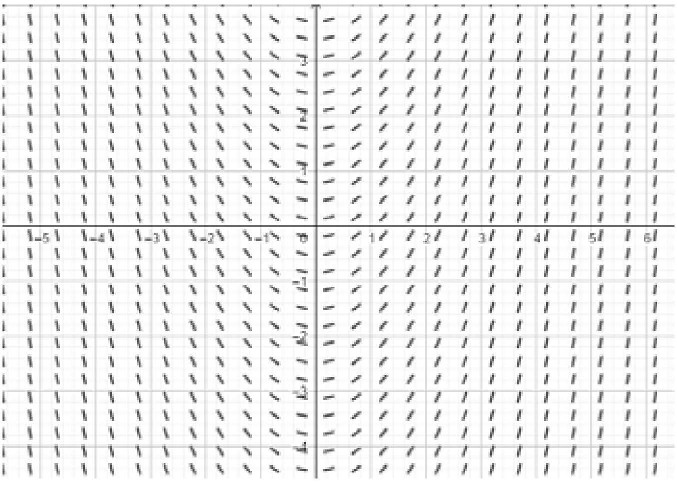
Esta ecuación diferencial modela la situación en donde la razón de cambio de la función desconocida es igual al valor de la variable independiente.

Recordando nuestros conocimientos de cálculo, vemos que (11) indica que las soluciones $y = f(x)$ crecen si $x > 0$ y decrecen si $x < 0$. Además, debido a que $y'' = 1$, la segunda derivada es siempre positiva, de modo que $y$ tiene concavidad hacia arriba en todo su dominio. Finalmente, si sustituimos $x$ por $-x$ en (11) la ecuación diferencial permanece sin cambios, así que la familia de soluciones es simétrica respecto al eje $y$.

Debido a que el miembro de la derecha de la ecuación (11) está definido para todos los valores de $x$, no hay singularidades. Además, tal como se mostró en el ejemplo 3 de la sección 2.3, las soluciones no se intersecan.

Si se construye el campo de pendientes, como se muestra en la figura 9, se puede obtener más información: tenemos una pendiente cero en x = 0, y las pendientes de los segmentos de recta cortos se incrementan a medida que x aumenta. Observe que el campo de pendientes es simétrico respecto al eje y.

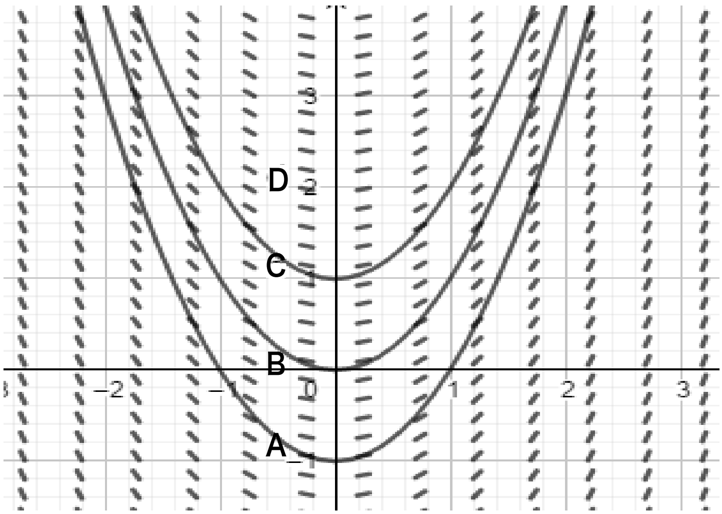
**Figura 9.** Campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$.




**Fuente** . Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Debido a que el campo de pendientes de una ecuación diferencial proporciona la inclinación de la recta tangente a las soluciones en muchos puntos, la gráfica de cualquier solución particular de ecuación diferencial debe ser consistente con estas rectas tangentes. Nótese que las curvas solución de (11) tienen tangentes horizontales para x = 0, pendientes positivas para x > 0 y pendientes negativas para x < 0. Observe también que estas pendientes llegan a ser mayores a medida que x crece.

**Figura 10.** Campo de pendientes con algunas curvas solución.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Para trazar a mano una curva solución en la gráfica del campo de pendiente, se comienza en algún punto (ver figura 10), por ejemplo, en donde ya se ha trazado una tangente corta. Como la solución será una función diferenciable, la línea tangente cercana a cada punto resulta ser una buena aproximación de la gráfica. Así, podemos proceder avanzando una corta distancia hacia la derecha en la dirección indicada por las tangentes y observando el aspecto del campo de pendientes allí. Luego ajustamos la dirección de nuestra curva para que cambie de manera consistente con el campo de pendientes. La figura 10 nos muestra un caso específico. Considérese la curva solución que pasa a través del punto (0,1). Conforme nos movemos hacia la derecha a partir de este punto, la curva cambia de inclinación horizontal, de tal manera que la pendiente aumenta continuamente. Esto da como resultado la curva A que se muestra en la figura. Observe que la concavidad que se obtiene en dicha curva es hacia arriba, tal como lo predijimos anteriormente del análisis cualitativo. La figura 10 muestra otras curvas solución dibujadas a mano.

## Cómo trazar a mano curvas solución a partir del campo de pendientes de $y' = g(x, y)$

1. Primero trace el campo de pendientes de la ecuación diferencial dada.
2. Comience en un punto inicial y coloque en él un puntito. Si el punto cae sobre un segmento de recta corto, la pendiente de la curva solución se localiza en ese punto. De lo contrario, estime el valor de la pendiente de la tangente en ese punto examinando las pendientes cercanas. Este valor muestra la dirección del campo de pendientes en ese punto.
3. Avance en esta dirección una distancia corta hacia la derecha. Coloque un puntito en el lugar donde termine.
4. Ajuste su dirección de tal modo que sea consistente con la dirección del campo de pendientes en la vecindad del punto donde se quiere terminar.
5. Repita los pasos 3 y 4 la cantidad de veces que sea necesario, uniendo los puntos con una curva.
6. Comience con un nuevo punto inicial y regrese al paso 2.

### Ejemplo 7:

Consideremos de nuevo la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (12)$$

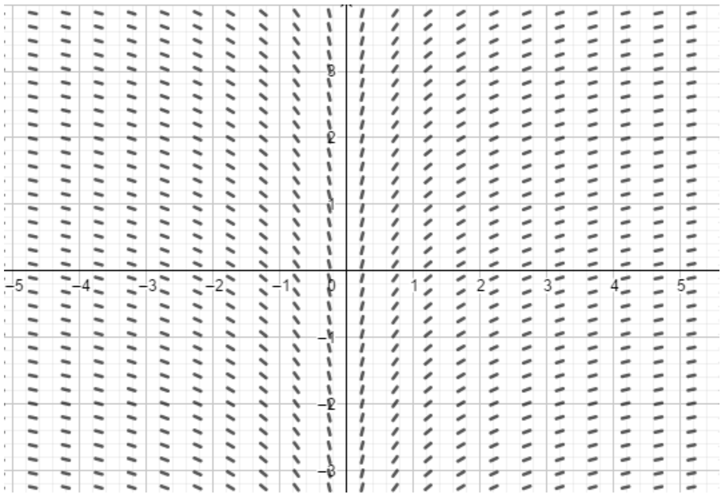
Analizar su campo de pendientes.

## Solución:

De acuerdo al análisis previo, sabemos que la gráfica de cualquier curva solución, siempre tiene concavidad hacia abajo, forma decreciente para x < 0 y con forma creciente para x > 0. También sabemos que la familia de soluciones es simétrica respecto al eje y.

Al dibujar el campo de pendientes de (12), véase la figura 11.

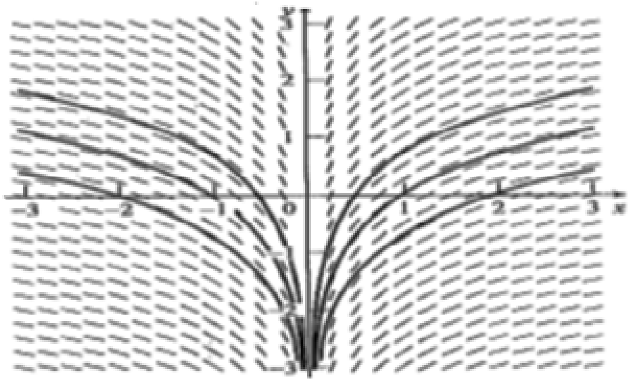
**Figura 11.** Campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.




**Fuente** . Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Observamos que las curvas solución, consistente con este campo de pendientes, aumentan para x > 0 y decrecen para x < 0, y que las pendientes ubicadas por encima de un cierto valor específico de x son iguales. La figura 12 muestra unas cuantas curvas solución trazadas sobre este campo de pendientes. Nótese que las curvas solución tienen concavidad hacia abajo en todas partes y que el campo de pendientes parece ser simétrico respecto al eje y. Obsérvese también que cada una de las curvas solución son translaciones verticales de las otras.

**Figura 12.** Campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ con algunas soluciones particulares.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Ahora que se tienen algunas curvas solución sobre el campo de pendientes de la figura 12, parecería que un campo de pendientes sería el resultado de trazar muchas curvas solución y posteriormente borrar partes de ellas, dejando segmentos cortos que asemejan a segmentos de las rectas tangentes. Esta es una de las principales aplicaciones de los campos de pendientes, a saber, determinar la gráfica de una solución de una ecuación diferencial, ya sea que resulta, o no, posible de obtener fácilmente, una solución explícita en términos de funciones conocidas. Los campos de pendientes también son utilizados para verificar la consistencia con sus hallazgos concernientes a monotonía y concavidad.

Es muy claro que la derivada $1/x$ nunca es igual a cero, es decir que ninguna curva solución tiene una tangente horizontal. Pero a pesar de esto podemos proporcionar a la derivada un valor constante y observar para cuál valor (o valores) de x las curvas de solución tendrán pendiente constante. Así por ejemplo, ya que $1/x = 1$ para $x = 1$, los segmentos de recta cortos tendrán una pendiente de 1 para todos los puntos en el campo de pendientes donde x sea igual a 1.

En general, podemos decir que las curvas solución tendrán una pendiente igual a m dondequiera que:

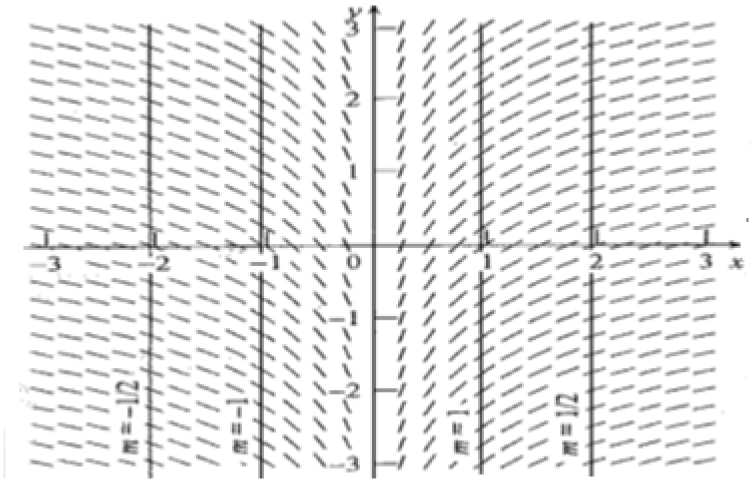
$$\frac{1}{x} = m$$

Es decir: $$x = \frac{1}{m}$$

Que es una línea vertical a través del punto (1/m, o).

A esta línea vertical se le denomina isóclina «de igual inclinación» de la ecuación diferencial. Todas las curvas solución de $y' = 1/x$ tendrán la misma pendiente m cuando crucen la isóclina para este valor de x. Por ejemplo, las curvas solución de dicha ecuación diferencial tendrán una pendiente 1 cuando x = 1, una pendiente de ½ cuando x = 2, una pendiente de - ½ cuando x = - 2. Podemos ver que la figura 13 es consistente con esta información que muestra isóclinas para $m = \pm\frac{1}{2}$, y $m = \pm 1$.

**Figura 13.** Campo de pendientes de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ con algunas isoclinas.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

## En resumen:

### Definición

Una isóclina correspondiente a la pendiente m de la ecuación diferencial $y' = g(x, y)$, es la curva caracterizada por la ecuación $g(x, y) = m$.

Cómo trazar a mano isóclinas para $y' = g(x, y)$

### Procedimiento

Escriba:

1. $g(x, y) = m$ ( 13 )
2. Donde m es una constante.
3. Dé valores diferentes para m. Para cada valor de m resuelva dicha ecuación para y en términos de x y de m, o para x en términos de y, y, m. Si no se puede resolver, intente identificar las curvas definidas implícitamente por la ecuación (13). Esto da la isoclina correspondiente a la pendiente de m.
4. Para cada valor de m, grafique la isóclina correspondiente a la pendiente m.

Si se construyen campos de pendientes a mano, dibuje segmentos de recta cortos con Pendiente m, que crucen a la isóclina apropiada.

### Es bueno observar que:

- Para cualquier m particular, la isóclina correspondiente a la pendiente m puede componerse de más curvas.
- A la isóclina correspondiente a la pendiente m también se le conoce como isóclina para la pendiente m.
- Si $g(x, y)$ no incluye la y, las isóclinas son verticales.
- En el caso general en que $g(x, y)$ dependa tanto de x como de y, las isóclinas pueden no ser rectas. Por ejemplo, si $g(x, y) = x^2 + y^2$ entonces las isóclinas $x^2 + y^2 = m$ son círculos con centro en el origen y radio $\sqrt{m}$.

## Ejemplo 8. De nuevo la función error:

Consideremos la ecuación diferencial que da origen a la función error:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$$

Analizar su campo de pendientes.

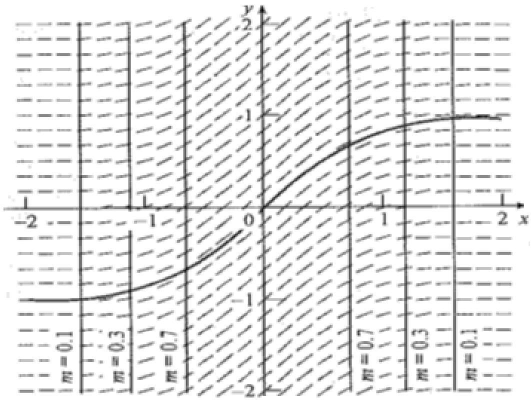
### Solución:

La isóclina correspondiente a la pendiente m está dada por:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2} = m \qquad (14)$$

Esta condición nos dice que no hay isóclina para las pendientes m $\leq 0$, o pendientes m > $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1.128$. Si resolvemos (14) para x obtenemos x = $\pm\left\{ln\left[{}^{2}\!/_{(m\sqrt{\pi})}\right]\right\}^{1/2}$ como ecuación de la isóclina correspondiente a la pendiente m. las isóclinas para las pendientes 0.1; 0.3; y 0.7 se ilustran en la siguiente figura.

**Figura 14.** Campo de pendientes para la función de error con algunas isóclinas.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Nótese que en este caso cada isóclina se compone de rectas verticales.

# 2.5 Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden. Esboce la solución explícita para tres diferentes valores de la constante arbitraria C. Luego encuentre el valor específico de C y la fórmula y(x) para la solución particular que pasa por el punto dado.

1. $\frac{dy}{dx} = x^3$ P (1,1)
2. $\frac{dy}{dx} = x^4$ P (1,1)
3. $\frac{dy}{dx} = cosx$ P (0,0)
4. $\frac{dy}{dx} = senx$ P (0,2)
5. $\frac{dy}{dx} = e^{-x}$ P (0,1)
6. $\frac{dy}{dx} = 1/x^2$ P (1,1)
7. $\frac{dy}{dx} = 1/x$ P (-1,1)
8. $\frac{dy}{dx} = 1/(1+x^2)$ P $(1,\frac{\pi}{4})$
9. $\frac{dy}{dx} = 1/[x(1-x)]$ P (2,1)
10. $\frac{dy}{dx} = Lnx$ P (1,1)
11. $\frac{dy}{dx} = x^2e^{-x}$ P (0,1)
12. $\frac{dy}{dx} = e^{-x}xenx$ P (0,1)
13. **La integral de Fresnel.** Con la ayuda de (5) escriba una integral que represente la solución del problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\text{sen}x^2 \quad y\ (0) = 0.$$

Esta solución, conocida como la integral seno de Fresnel, que se denota por S (x), no puede ser expresada en términos de funciones conocidas.

a) ¿Cuál es el valor de S (0)?
b) ¿Cuál es la relación entre S(x) y S (-x)?
c) Mediante un programa de computadora o calculadora con integración numérica, obtenga valores aproximados (digamos tres cifras decimales) de S(x) en x = 2 y x = 4. Utilice esta información y los resultados de los encisos a. y b. para graficar S(x) en el intervalo [-5, 5]. ¿Cuánta confianza tiene la exactitud de la gráfica que se obtuvo?
d) Repita el enciso c. para x = 1, 3 y 5. ¿Cambiaron estos valores la precisión de su anterior gráfica para S(x)?
e) Repita el enciso c. para x = 0.5, 1.5, 2.5, 3.5 y 4.5. ¿Cambiaron estos valores la precisión de su anterior gráfica para S(x)?
f) ¿Qué piensa que le ocurre a S(x) a medida que x tiende a $\infty$?

**Figura 15.** Augustin-Jean Fresnel (1788-1827).

**Fuente.** Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual de la Universidad EAN).

Fresnel fue un físico e ingeniero francés que contribuyó significativamente a la teoría ondulatoria de la luz, y estudió el comportamiento de la luz tanto teórica como experimentalmente.

14. **La integral seno.** Utilizando (5) escriba a continuación una integral que represente la solución al problema de valor inicial dt /dx = g(x), y (0) = 0, donde

$$G(x) = \begin{cases} \frac{senx}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Esta solución, conocida como la integral seno, se nota por S(x), no puede ser expresada en términos de funciones conocidas. Utilice las ideas del ejercicio 3 para graficar la solución a esta ecuación diferencial. ¿Qué piensa que le ocurre a S(x) a medida que x tiende a $\infty$?

15. Encuentre la familia de soluciones para cada una de las ecuaciones diferenciales $\frac{dy}{dx} = e^x\ y\ \frac{dy}{dx} = e^{-x}$. Dibuje estas dos familias de soluciones en un solo plano, empleando la misma escala para los ejes x y y. ¿Qué advierte acerca del ángulo de intersección entre estas dos familias de soluciones? ¿Podría deducirlo directamente a partir de las ecuaciones diferenciales sin resolverlas?

16. Escriba algunas funciones impares y encuentre sus antiderivadas. ¿Qué propiedad comparten estas antiderivadas? Haga una conjetura que comience así: la antiderivada de una función impar... Y demuestre su conjetura.

17. Utilice las propiedades de monotonía, concavidad, simetría, singularidades y unicidad para trazar varias curvas solución para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden. Posteriormente, dibuje la curva solución particular, de manera que pase por el punto P. Cuando haya terminado su análisis compárelas con las obtenidas en el ejercicio 1.

a) $\frac{dy}{dx} = x^3$ P (1, 1)

b) $\frac{dy}{dx} = x^4$ P (1, 1)

c) $\frac{dy}{dx} = cosx$ P (0, 0)

d) $\frac{dy}{dx} = senx$ P (0, 2)

e) $\frac{dy}{dx} = e^{-x}$ P (0, 1)

f) $\frac{dy}{dx} = 1/x^2$ P (1, 1)

g) $\frac{dy}{dx} = 1/x$ P (-1,1)

h) $\frac{dy}{dx} = 1/(1+x^2)$ P$(1, \frac{\pi}{4})$

i) $\frac{dy}{dx} = 1/[x(1-x)]$ P (2, 1)

j) $\frac{dy}{dx} = Lnx$ P (1,1)

k) $\frac{dy}{dx} = x^2e^{-x}$ P (0, 1)

l) $\frac{dy}{dx} = e^{-x}xenx$ P (0, 1)

---

18. Nuestra intuición sugiere que si g(x) $\rightarrow 0$ a medida que x $\rightarrow \infty$, entonces las soluciones de la ecuación diferencial $y' = g(x)$ tendrán asíntotas horizontales. Explique por qué es errónea.

19. Para la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{4}{x(x-4)}$$

Encuentre la solución explícita que satisface la condición inicial.

a. y (-1) = 0 b. y (1) = 0 c. y (5) = 0

---

20. ¿Para qué valores de a y $x_0$, la solución del problema de valor inicial es válida para todo x > 0?

$$y' = \frac{1}{x(x-a)}, \qquad y(x_0) = 0$$

---

21. De nuevo la integral del seno de Fresnel. Valiéndose de las propiedades de monotonía, concavidad, simetría, singularidades y unicidad, trace diversas curvas solución para la ecuación diferencial $y' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, sen x^2$. Luego dibuje la gráfica de la solución particular que satisface y (0) = 0. ¿Qué piensa que ocurre a y(x) a medida que x → ∞? Compare sus respuestas con la que encontró para el ejercicio 3.

---

22. De nuevo la integral seno. Valiéndose de las propiedades de monotonía, concavidad, simetría, singularidades y unicidad, trace diversas curvas solución para la ecuación diferencial.

$$y' = G(x) = \begin{cases} \frac{sen x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

---

Luego dibuje la gráfica de la solución particular que satisface y (0) = 0. ¿Qué piensa que ocurre a y(x) a medida que x → ∞? Compare sus respuestas con la que encontró para el ejercicio 4.

---

23. El teorema de la unicidad. Demuestre que si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones del problema de valor inicial $y'(x) = g(x)$, $y(x_0) = y_0$ donde $g(x)$ es continua, entonces $y_1(x) = y_2(x)$. ¿Cómo garantiza este resultado el hecho de que las soluciones diferentes de la ecuación diferencial $y' = g(x)$ no se intersecan?

24. Demuestre que la familia de antiderivadas de una función par es simétrica con respecto al origen. ¿Bajo qué condiciones una antiderivada de una función par será una función impar? Proporcione algunos ejemplos.

25. Trace el campo de pendientes para las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden. En cada caso dibuje algunas isóclinas para confirmar su trazo. Enseguida dibuje la curva solución a través del punto P Cuando haya terminado su análisis compárelas con las obtenidas en el ejercicio 1 y 7.

a) $\frac{dy}{dx} = x^3$ P (1, 1)

b) $\frac{dy}{dx} = x^4$ P (1, 1)

c) $\frac{dy}{dx} = cosx$ P (0, 0)

d) $\frac{dy}{dx} = senx$ P (0, 2)

e) $\frac{dy}{dx} = e^{-x}$ P (0, 1)

f) $\frac{dy}{dx} = 1/x^2$ P (1, 1)

g) $\frac{dy}{dx} = 1/x$ P ( -1,1)

h) $\frac{dy}{dx} = 1/(1 + x^2)$ P$(1, \frac{\pi}{4})$

i) $\frac{dy}{dx} = 1/[x(1-x)]$ P (2, 1)

j) $\frac{dy}{dx} = Lnx$ P (1,1)

k) $\frac{dy}{dx} = x^2e^{-x}$ P (0, 1)

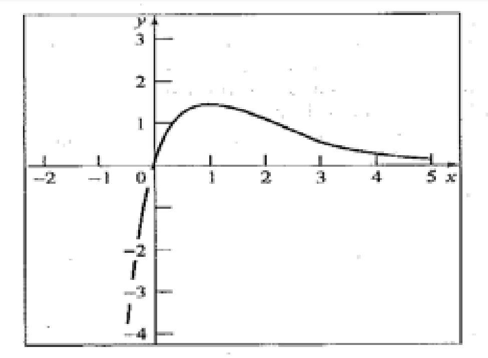
l) $\frac{dy}{dx} = e^{-x}xenx$ P (0, 1)

26. Explique por qué es útil utilizar la gráfica de las isóclinas correspondientes a una pendiente infinita, aun cuando ningún punto sobre la curva solución tenga una tangente vertical.

27. La figura 16 muestra un miembro de una familia de soluciones de la ecuación diferencial $y' = g(x)$ donde $g(x)$ es una función dada.

    a) Aproveche esta información para trazar la gráfica de otros miembros de la familia de soluciones. No intente encontrar y(x) o, g(x).
    b) ¿Puede obtenerse cada solución de la ecuación diferencial mediante la técnica del enciso a?

**Figura 16.** Una solución de la ecuación diferencial y´= g(x).



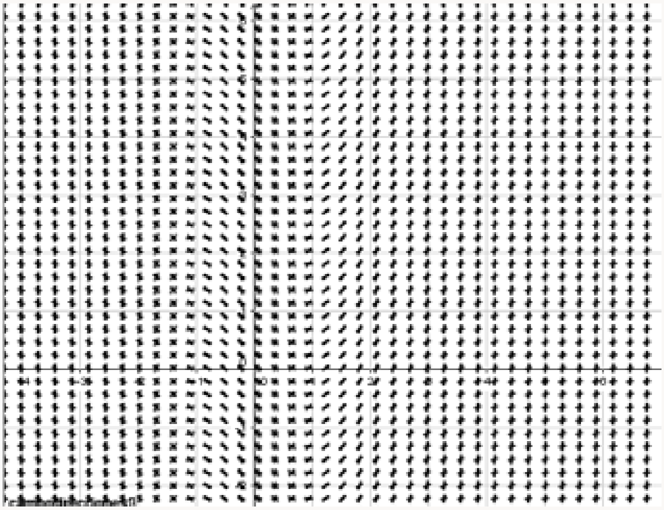

**Fuente** . Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

28. Considere las siguientes cuatro ecuaciones diferenciales:

$y' = x + 1$, $y' = x - 1$, $y' = \ln|x|$, $y' = x^2 - 1$.

a. El campo de pendientes de una de las ecuaciones anteriores está representado en la figura 17. Relacione la ecuación apropiada con la figura y explique cuidadosamente sus razones. No grafique ningún campo de pendientes para responder a esta pregunta.
b. Bosqueje brevemente una estrategia para este proceso de identificación.

**Figura 17.** Campo de pendientes de una función.



**Fuente** . Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

29. Si un objeto se deja caer de un aeroplano, su velocidad de caída después de x segundos se expresa aproximadamente mediante la ecuación:

$$y' = \frac{g}{k}(1 - e^{-kx})$$

Donde g = 9.8 $\frac{m}{seg^2}$ y k = 0.2 seg-1. Aquí y(x) es la distancia recorrida en caída libre al tiempo x; de modo que y(x) = 0. Si este objeto cae desde 5000 metros de altura, calcule cuántos segundos recorre antes de que impacte con la superficie de la tierra por medio de:

a) Campos de pendientes, monotonía y concavidad.

b) Encontrando la solución explícita.

# 2.6 Ecuaciones diferenciales autónomas

En la unidad 2.2 analizamos las ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = g(x)$, donde el lado derecho es una función en términos de la variable independiente x. En esta unidad vamos a analizar las ecuaciones diferenciales de primer grado de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Donde la función ahora depende de la variable dependiente y.

En esta sección aplicaremos las técnicas vistas en la unidad 2, el análisis gráfico y las soluciones explícitas, a dicho tipo de ecuaciones.

**Definición**

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \qquad (14)$$

Donde g (y) es una función de y solamente, se denomina autónoma.

## Ejemplo 9:

El primer ejemplo de una ecuación diferencial autónoma, tomando el ejemplo análogo de la unidad 2.2 ($y' = 1/x$) es:

$$y' = \frac{1}{y} \qquad (15)$$

Encontrar una función que tenga la propiedad de que su derivada es la recíproca de la función dada.

## Solución:

Veamos qué información cuantitativa podemos obtener de las soluciones de (15), aplicando los conceptos del cálculo.

Si y > 0 entonces $y^{/} > 0$ y las curvas de solución son crecientes. Si y < 0, entonces $y^{/} < 0$ y las curvas solución son decrecientes. Para determinar la concavidad de las curvas, necesitamos $y^{//}$. Si derivamos con respecto a x, encontramos que:

$$y^{//} = -\frac{1}{y^2} \cdot y^{/} \qquad (16)$$

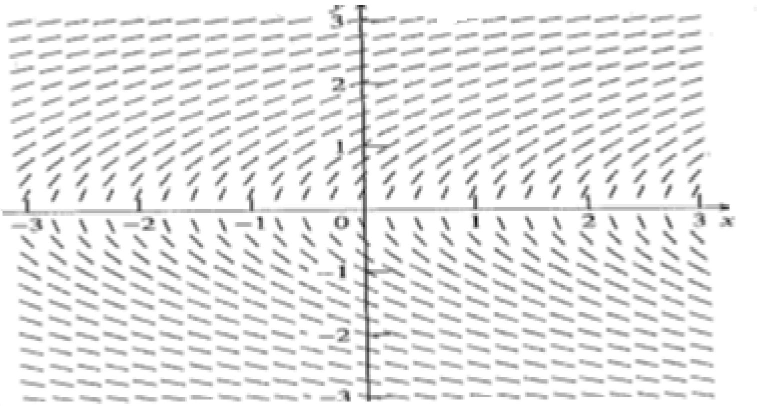
Y en este caso difiere de la situación de la unidad 2.2, en la que la segunda derivada eran funciones explícitas de x. Aquí encontramos expresada la segunda derivada en términos de la primera. Sin embargo, podemos sustituir el valor de $y^{/}$ por el de la ecuación (15) en (16) para hallar:

$$y^{//} = -\frac{1}{y^3} \qquad (17)$$

Aun cuando el miembro de la derecha de (17) no sea función explícita de x, este indica que el signo de la segunda derivada está determinado por el signo de y. De modo que si y > 0, las curvas solución tienen concavidad hacia abajo, mientras que si y < 0 tendrán concavidad hacia arriba.

Construyendo ahora el campo de pendientes de (15). Al calcular las pendientes de las curvas solución en puntos equidistantes (x, y), observamos que a lo largo de la recta y = 0 (el eje x), las pendientes son infinitas. A lo largo de la recta y = 1 las pendientes son iguales 1. A lo largo de la recta y = 2 las pendientes tienen un valor ½. A lo largo de la recta y = - 1 todas las pendientes son iguales a – ½. Exactamente como en el caso $y^{/} = g(x)$, podemos construir el campo de pendientes, que se muestra en la siguiente figura.

**Figura 18.** Campo de pendientes de la ecuación autónoma $y'=\frac{1}{y}$.



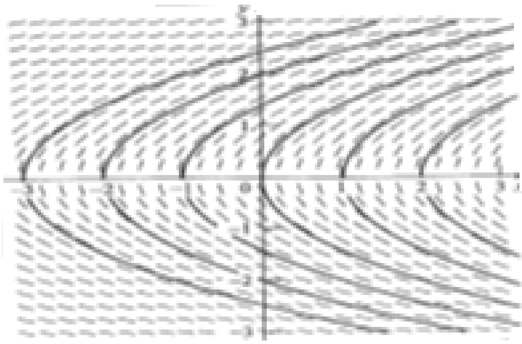

**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Analicemos ahora el caso de las isóclinas, a saber: ¿Dónde es la pendiente de la curva igual a m? ¿Cómo podemos decir si esta afirmación es correcta? La simetría a lo largo del eje x significa que al sustituir y por – y se obtiene la misma imagen. Si en (15) sustituimos y por – y, en ambos lados de la ecuación, obtenemos de nuevo (15); así que la familia de soluciones correspondientes a ella debe ser simétrica al eje x.

Notemos que (15) dio pendiente infinita si y = 0. Esto significa que y = 0 (el eje x) se excluye del dominio de cualquier solución. Aunque parece que ningún par de curvas solución se intersecan, no podemos verificar este hecho por el momento.

Así sin resolver (15) explícitamente, hemos sido capaces de obtener la forma general de las curvas solución, con técnicas gráficas. La figura (19) muestra estas soluciones (observe que la figura contiene 12 soluciones y no 6).

**Figura 19.** Campo de pendientes de la ecuación autónoma $y' = \frac{1}{y}$ con algunas curvas soluciones.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Por último, podemos dar la solución analítica. Si intentamos aplicar la técnica del capítulo 1 a (15), escribiendo a continuación:

$$y(x) = \int \frac{1}{y} dx$$

nos proporcionaría una solución para y(x), porque para evaluar la integral tendríamos que conocer y de manera explícita como función de x. De haberla conocido explícitamente como función de x tendríamos ya la solución. Esto no significa que no haya soluciones explícitas de (15). Si tanto y y, $y'$ estuvieran en el mismo miembro estaríamos en una mejor posición para integrar. Multiplicando ambos lados de la ecuación (15) por y se obtiene:

$$y\,y' = 1$$

De esta forma podemos integrar ambos lados de la ecuación con respecto a x para encontrar:

$$\int y.y' dx = \int dx$$

El lado izquierdo se puede integrar para obtener:

$$\int y.y^{/}dx = \int y.\frac{dy}{dx}.dx = \int ydy = \frac{1}{2}y^2 + C_2$$

Lo cual nos lleva a que:

$$\frac{1}{2}y^2 + C_2 = x + C_1$$

Donde $C_2$ y $C_1$ son constantes arbitrarias. Si hacemos $C = C_1 - C_2$, entonces la solución de (15) es:

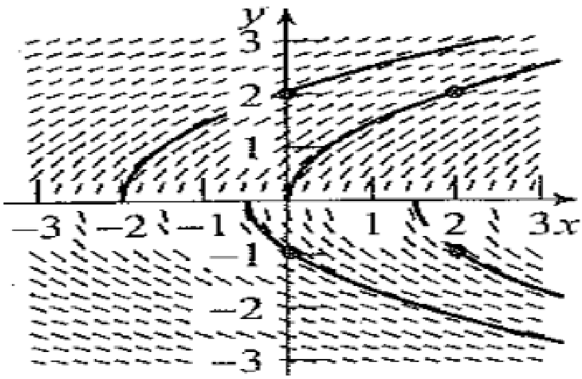
$$\frac{1}{2}y^2 = x + C$$

Observe que es posible expresar este resultado como una función explícita para y, resolviendo encontramos la familia de soluciones:

$$y\,(x) = \pm\sqrt{(2x + C)} \qquad (18)$$

Parecería que en contraste con la situación planteada en el capítulo 1, la constante arbitraria en (18) no representa una translación vertical entre ningún par de soluciones, sino una translación horizontal. La figura (20) muestra varias soluciones particulares de esta familia con valores iniciales (0,2), (0,-1), (2,2), (2,-1).

**Figura 20.** Campo de pendientes de la ecuación autónoma y´= $\frac{1}{y}$ con algunas curvas soluciones particulares.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Observe que las soluciones dibujadas a mano (figura 19) y las gráficas de nuestras soluciones explícitas (figura 20) coinciden.

## Ejemplo 10:

Consideremos ahora la ecuación diferencial autónoma:

$$\frac{dy}{dx} = 4y(1 - y) \qquad (19)$$

Hacer un análisis cualitativo de la ecuación diferencial.

### Solución:

Observe que el lado derecho no depende de la variable independiente x.

Si $0 < y < 1$ entonces $y' > 0$ y las curvas de solución son crecientes en dicho intervalo. Por otra parte si $y < 0$ o si $y > 1$, entonces $y' < 0$ y las curvas solución son decrecientes en estos intervalos. Para determinar la concavidad de las curvas, necesitamos $y''$. Si derivamos implícitamente con respecto a x, encontramos que:

$$y'' = (4y - 4y^2)' = 4y' - 8yy' \qquad (20)$$

En este caso difiere de la situación de la unidad 2.2, donde la segunda derivada eran funciones explícitas de x. Aquí encontramos expresada la segunda derivada en términos de la primera. Sin embargo, podemos sustituir el valor de $y'$ por el de la ecuación (19) en (20) para hallar, usando derivación implícita:

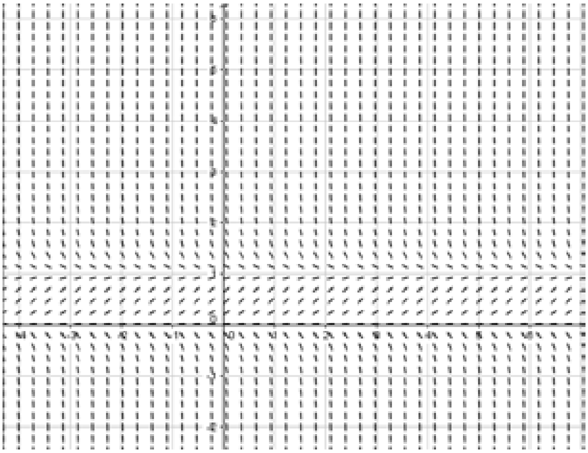
$$y'' = 32y^3 - 48y^2 + 16y = 16y(2y^2 - 3y + 1) \qquad (21)$$

$$= 16.y.\,(y - 1)\,(y - ½)$$

Aun cuando el miembro de la derecha de (21) no sea función explicita de x, este indica que el signo de la segunda derivada está determinado por el signo de y. De modo que si $y > 1$, o $0 < y < ½$ las curvas solución tienen concavidad hacia arriba, mientras que si $y < 0$ o $½ < y < 1$ tendrán concavidad hacia abajo.

Construyendo ahora el campo de pendientes de (19). Al calcular las pendientes de las curvas solución en puntos equidistantes (x, y), observamos que a lo largo de la recta y = 0 (el eje x), o, y = 1 las pendientes son infinitas. A lo largo de la recta y = 2 las pendientes son iguales -8. A lo largo de la recta y = -2 las pendientes tienen un valor -24. A lo largo de la recta y = - 1 todas las pendientes son iguales a – 8. Exactamente como en el caso $y' = g(x)$, podemos construir el campo de pendientes, que se muestra en la figura 21.

**Figura 21.** Campo de pendientes de la ecuación autónoma y´= 4y(1-y).



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

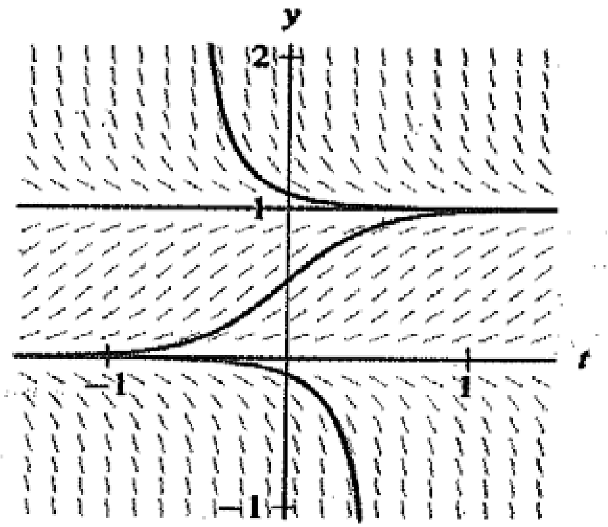
Analicemos ahora el caso de las isóclinas, a saber: ¿Dónde es la pendiente de la curva igual a m? ¿Cómo podemos decir si esta afirmación es correcta? La simetría a lo largo del eje x significa que al sustituir y por – y se obtiene la misma imagen. Si en (19) sustituimos y por – y en ambos lados de la ecuación, no se obtiene la igualdad (19); así que la familia de soluciones correspondientes a ella no debe ser simétrica al eje x.

Notemos que (19) dio pendiente infinita si y = 0, y 1. Esto significa que y = 0 (el eje x), y, y = 1 se excluye del dominio de cualquier solución. Aunque parece que ningún par de curvas solución se interseca, no podemos verificar este hecho por el momento.

Así sin resolver (19) explícitamente, hemos sido capaces de obtener la forma general de las curvas solución, con técnicas gráficas.

La figura 22 muestra estas soluciones.

**Figura 22.** Forma general de las curvas solución.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Por último, podemos dar la solución analítica, si intentamos aplicar la técnica del capítulo 1 a (19), escribiendo a continuación:

El ejemplo anterior sugiere algunas observaciones generales acerca de las ecuaciones diferenciales autónomas de la forma $y^{/} = g$ (y).

Las soluciones de una ecuación diferencial autónoma son siempre funciones definidas explícitamente para x (y), aunque no necesariamente para y(x). En ocasiones es posible resolver x = x (y) para y = y(x).

1. Las isóclinas de las ecuaciones diferenciales autónomas son siempre líneas horizontales.

2. Si $y' = g(y)$ permanece sin cambios después de sustituir $y$ por $-y$ en ambos lados de la igualdad de la ecuación diferencial, entonces la familia de soluciones es simétrica a lo largo del eje x.
3. Si $y' = g(y)$ permanece sin cambios después de sustituir simultáneamente $y$ por $-y$ así como $x$ por $-x$ en ambos lados de la ecuación diferencial, entonces la familia de soluciones es simétrica con respecto al origen.
4. Empleamos la expresión curva de solución analítica para describir la gráfica de una solución explícita de una ecuación diferencial. Esta denominación la distingue de una curva solución trazada a mano, obtenida directamente del campo de pendientes de la ecuación diferencial.
5. Si conocemos una solución de una ecuación diferencial autónoma, digamos $y(x) = f(x)$ entonces $y(x) = f(x + C)$ donde $C$ es una constante, es otra solución, porque la gráfica de $f(x + C)$ es una translación horizontal de la gráfica de $f(x)$.

## Ejemplo 11. Un modelo de crecimiento poblacional ilimitado como una ecuación autónoma[6]:

El modelo elemental de crecimiento poblacional se basa en la hipótesis de que «la razón de crecimiento de una población en un tiempo t es proporcional al tamaño de la población en ese tiempo t». Modelar, mediante una ecuación diferencial este problema.

6 También llamado Modelo de Malthus, del crecimiento poblacional. Este artículo es incluido por J. R. N Newman, en *El mundo de la Matemática*, volumen 2, 1996.

## Solución:

Nuestra hipótesis no dice que la razón de cambio de la población solo depende del tamaño de la misma. En este modelo de crecimiento no se tiene en cuenta las limitaciones de espacio o recursos naturales. Por tal razón, a este modelo se le puede considerar muy incipiente.

Ahora, si llamamos:

- t = tiempo (variable independiente)
- P (t) = Población en el tiempo t (Variable dependiente)
- k = constante de proporcionalidad, (parámetro) entre el cambio de crecimiento y el tamaño de la población.

Con la notación anterior podemos expresar nuestro modelo como:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \qquad (22)$$

Es decir, la razón de cambio de P(t) es proporcional a P(t). Si la constante k es mayor que cero entonces estamos diciendo que la población está creciendo, mientras que para k menor que cero la población está decreciendo.

Monotonía y concavidad: de acuerdo con lo visto en cálculo tenemos que si $k > 0$, entonces la función P (t) será creciente, y si $k < 0$ entonces P (t) está decreciendo. Para ver la concavidad calculamos la segunda derivada (22) con respecto a t, y tenemos:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k\frac{dP(t)}{dy}$$

Sustituyendo por (22), se tiene:

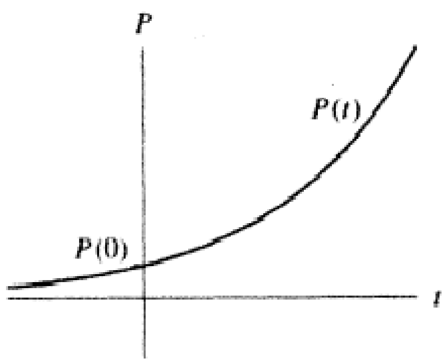
$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P(t)$$

Como $K^2 > 0$, entonces el signo de la segunda derivada solamente está determinada por P (t). Como la población siempre es positiva entonces la segunda derivada es positiva y la concavidad de las soluciones siempre es hacia arriba.

Campos de pendientes y simetría: construyendo ahora el campo de pendientes de (22). Al calcular las pendientes de las curvas soluciones en puntos igualmente espaciados (x, y), observamos que a lo largo de la recta P (t) = 0 (el eje t), las pendientes son cero. A lo largo de la recta P (t) = 1, las pendientes son iguales a k, lo cual se muestra en la figura 23. Observe que el campo de pendientes es simétrico respecto al eje t, ya que al remplazar P (t) por –P (t), se tendría la igualdad. Esto si se pudiera hablar de poblaciones negativas.

Isóclinas: ¿Dónde es la pendiente de las curvas solución igual a m? Esto ocurre cuando $\frac{dP}{dt} = m$, y cuando P (t) = m k, estas representan líneas horizontales, tal como se muestra en la figura 23.

**Figura 23.** Pendiente.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

De esta forma, sin resolver de manera explícita, hemos encontrado la forma general de las curvas solución con la ayuda de las técnicas gráficas.

Solución analítica: veamos ahora el enfoque analítico. Si dividimos en la ecuación 22 por P(t), obtenemos:

$$\frac{1}{P(t)}.\frac{dP(t)}{dt} = k$$

Integrando a ambos lados obtenemos:

$$\ln |P(t)| = kt + C \qquad (23)$$

Donde k es una constante arbitraria. Si trabajamos con P (t) > 0 y tomamos exponencial a ambos lados de (23), se tiene:

P (t) = $e^{kt+C} = e^C e^{kt} = C_1 e^{kt}$, tomando como $C_1 = e^C$, expresión que nunca es cero.

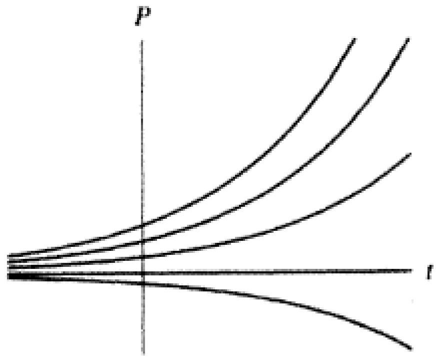
De esta forma se tiene una familia de soluciones:

$$P(t) = C_1 e^{kt} \qquad C_1 \neq 0 \quad (24)$$

Pero es claro que si P (t) = 0, la ecuación anterior se satisface, es decir que (24) se satisface aun siendo $C_1 = 0$.

Observe que el valor de $C_1$ es la intersección de la gráfica con el eje de p (t), ya que P (0) = $C_1$. La figura 24 nos muestra unas gráficas solución de la ecuación diferencial.

**Figura 24.** Algunas gráficas solución de la ecuación diferencial P(t) = $C_1 e^{kt}$.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Observando las soluciones dadas en la figura 20 y 21 se ve claramente la compatibilidad de las soluciones trazadas cualitativamente y de las soluciones dadas analíticamente.

Si aplicamos la solución al crecimiento poblacional (k > 0), observamos que si P(0) > 0, la población crece sin medida conforme t → ∞. En el caso que se tuviera k < 0 y además P (0) > 0, vemos que la cantidad de población tiende a cero cuando t → ∞. En ambos casos si P (0) = 0, es decir no hay población presente, entonces nunca habrá población futura, es decir P (0) = 0 para todo t.

# 2.7 Soluciones de equilibrio

En el ejemplo 10 vimos que $\frac{dy}{dx} = 0$, cuando y = 0, o cuando y = 1, estas dos ecuaciones se llaman soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial.

**Definición**

Si la ecuación diferencial $y' = g(x, y)$ tiene una solución de la forma y(x) = constante, la solución recibe el nombre de solución de equilibrio.

En el ejemplo 11, se observa que las soluciones cercanas a la solución de equilibrio P (t) = 0 de $\frac{dP}{dt} = kP(t)$, tienen diferentes características dependiendo de si k > 0 o si k < 0. Si k > 0 y partimos de una solución cercana de la solución de equilibrio P (t) = 0, nos acercamos hacia y = 0 cuando x aumenta. Una solución de equilibrio de este tipo se conoce como **solución de equilibrio estable.** Si K > 0 y partimos cerca de la solución de equilibrio p (t) = 0, nos alejamos de y = 0 a medida que x aumenta. A una solución de equilibrio de esta clase se le da el nombre de **solución de equilibrio inestable.** Es posible que una solución de equilibrio parezca estable desde un extremo e inestable desde otro extremo. A una solución de equilibrio de esta naturaleza se le denomina semiestable.

Estas ideas nos conducen a la siguiente definición:

**Definición**

Dada la ecuación diferencial $y' = g(x, y)$, se trata de una ecuación que tenga una solución de equilibrio, es decir, una solución de la forma y(x) = constante. Una solución de equilibrio se denomina estable si todas las soluciones de la ecuación diferencial que parten cerca de esta solución de equilibrio permanecen cercanas a dicha solución de equilibrio a medida que x → ∞. Una solución de equilibrio es inestable si todas las otras soluciones de la ecuación diferencial que parten de las cercanías de esta solución de equilibrio se alejan de esta solución a medida que x → ∞. Si una solución de equilibrio no es ni estable ni inestable, recibe el nombre de solución indiferente.

## Ejemplo 12:

Consideremos la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dx} = ky$.

Analizar el comportamiento gráfico, para algunos valores de k.

## Solución:

Si tomamos k = 1 entonces nuestra ecuación autónoma se convierte en:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Si el valor inicial $y(x_0)$ es positivo, entonces y(x) → ∞ a medida que x aumenta. Si $y(x_0) = 0$, entonces y(x) = 0. Finalmente, si $y(x_0) < 0$, entonces y(x) → −∞ conforme x aumenta. Observe que un pequeño cambio en la condición inicial puede ocasionar un gran cambio en el comportamiento final. Así por ejemplo, si $y(x_0)=10^{(-17)}$, entonces y(x) → −∞ conforme x crece. A este hecho se le conoce como sensibilidad a las condiciones iniciales.

## Ejemplo 13. La ecuación logística[7]:

Para poder lograr un modelo de crecimiento más acorde a la realidad se le puede hacer unos ajustes al modelo de crecimiento ya visto, que tenga en cuenta el entorno y sus recursos limitados, para esto tomamos las siguientes hipótesis:

Si la población es pequeña, la razón de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño.

Si la población es demasiado grande para ser soportado por su entorno y recursos, la población disminuirá. Lo que significa que la razón de crecimiento es negativa.

Construir el modelo para la ecuación logística.

### Solución:

Para este modelo tenemos de nuevo:

t = tiempo (variable independiente)

P (t) = población en el tiempo t (variable dependiente)

k = coeficiente de la razón de crecimiento para poblaciones pequeñas (parámetro)

Sin embargo, nuestra hipótesis acerca de los recursos limitados introduce otra cantidad, el tamaño de la población que corresponde a ser «demasiado grande». Esta cantidad la da un segundo parámetro, que denotamos por M, que se llamará la «capacidad de soporte del

7 El modelo original de Malthus es usado solo para situaciones muy simples. El modelo logístico nos permite representar situaciones más reales.

entorno o medio». En términos de la capacidad de soporte, estamos suponiendo que P (t) crece si P (t) < M; no obstante si P (t) > M, suponemos que p (t) está decreciendo.

De esto y teniendo en cuenta la hipótesis tenemos:

$$\frac{dP(t)}{dt} \approx kP(t)$$

Si p (t) es pequeña (primera hipótesis).

Si P(t) > M, $\frac{dP(t)}{dt} < 0$ (segunda hipótesis)

Necesitamos construir un modelo que sea «algebraicamente simple» o por lo menos tan simple como sea posible, que permita modificar el modelo exponencial ya visto lo menos posible. Así se puede intentar un modelo de la forma:

$$\frac{dP(t)}{dt} = k.(algo).P(t)$$

Y este factor «algo» sea cercano a 1 si p (t) es pequeño, pero si P (t) > M, queremos que ese «algo» sea negativo. La expresión más simple que hace que esto se cumpla es la expresión:

$$(\text{algo}) = \left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)$$

Observe que esta expresión es igual a 1 si P (t) = 0 y es negativa si P (t) > M.

Luego el modelo que se requiere es:

$$\frac{dP(t)}{dt} = k.\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right).P(t) \qquad (25)$$

Este modelo es llamado el modelo logístico de la población con velocidad de crecimiento k y capacidad de soporte M. Es una ecuación diferencial de primer orden. Se dice que no es lineal porque su lado derecho no es una función lineal de P (t), como lo era el modelo de crecimiento exponencial visto en el ejemplo 11.

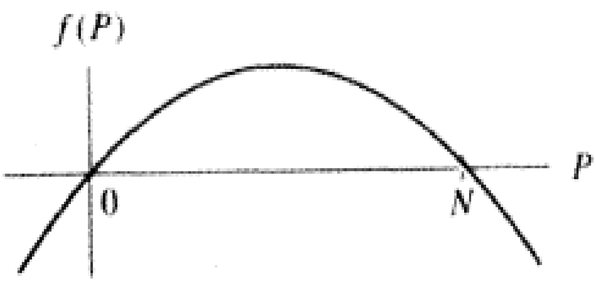
Veamos el análisis cualitativo, para lograr hacer un mejor análisis empecemos buscando los puntos de equilibrio de dicha ecuación, y a partir de ellos analizaremos el resto de los ítem.

Puntos de equilibrio: los puntos de equilibrio de la ecuación logística se obtienen igualando en (25) a dp / dt = 0, esto es:

$$k.\left(1-\frac{P(t)}{M}\right).P(t)=0, \text{ de donde,}$$

P (t) = 0  y P (t) = M estas son las curvas de equilibrio de la ecuación diferencial. Esto quiere decir que la derivada de P, desaparece para toda t, la población permanece constante si P = 0 o P = N. Es decir, las funciones constantes P (t)= y P (t) = M resuelven la ecuación diferencial. Estas dos soluciones constantes tienen mucho sentido: si la población es cero, permanecerá en cero indefinidamente; si la población es exactamente la asociada a la capacidad de soporte, ni crecerá ni disminuirá. Igual que antes, decimos que P = 0 y P = N son puntos de equilibrio. Las gráficas de las funciones constantes P (t) = 0 y P (t) = N son llamadas soluciones de equilibrio (ver la siguiente figura).

**Figura 25.** Gráfica de los puntos de equilibrio para la ecuación logística.



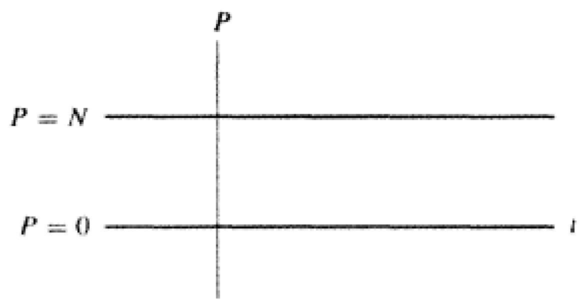

**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

De acuerdo con lo visto en cálculo podemos hacer el análisis de signos de la siguiente manera:

| | | | O | | M | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P (t) | - | - | | + | | + |
| $(1 - \frac{P(t)}{M})$ | + | + | | + | | - |
| | | - | | + | | - |

Este análisis de signos nos permite ver el comportamiento de la población a largo plazo. Si la población inicial se encuentra entre 0 y M, tenemos entonces que f (P) > 0. En este caso, la razón de crecimiento dP/dt = f (P) es positiva y en consecuencia la población P (t) está creciendo. En tanto que si P (t) se encuentra antes de 0 o después de M, la población está decreciendo. Sin embargo, cuando tiende a la capacidad de soporte M, dP/dt = f (p) se acerca a cero, por lo que se espera que la población se nivele cuando tiende a M.

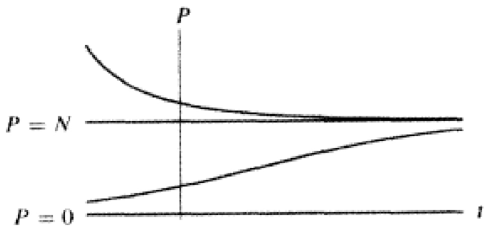
**Figura 26.** Puntos de equilibrio de la ecuación logística.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Si P (t) > M, entonces dP / dt = f (P) <0 y la población está disminuyendo. Caso similar sucedería si P (t) < 0, se tendría que dP/dt = f (P) < 0. Así, a partir solo del conocimiento de la gráfica de f, podemos esbozar varias soluciones con condiciones iniciales diferentes, todas sobre los mismos ejes. La única información que necesitamos es el hecho de que P = 0 y P = M son soluciones de equilibrio; P (t) crece si 0 < P < M, y P (t) disminuye si P > M o P < =. Por supuesto, los valores exactos de P (t) en cualquier tiempo dado t dependerán de los valores de P (0), k y M.

**Figura 27.** Gráfica del comportamiento de las curvas solución para la función logística.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

# 2.8 Existencia y unicidad de las soluciones

**Figura 28.** Charles Emile Picard (1856-1941).

**Fuente**. Bell (2002).

Picard fue un eminente matemático francés y secretario permanente de la Academia de Ciencias de París. Su trabajo matemático incluye resultados profundos en el análisis complejo, EDP y EDO, en particular el teorema de existencia y unicidad.

Hemos visto un procedimiento cualitativo para el estudio de soluciones de ecuaciones diferenciales. Un problema que no hemos considerado, es ¿cómo sabemos que hay solución? Esta pregunta conduce a una discusión sobre condiciones iniciales y a la unicidad de las soluciones de una ecuación autónoma. La unicidad garantiza que las diferentes soluciones no se intersecan. Veamos unos ejemplos que nos ilustren esta situación.

## Ejemplo 14. Asíntotas verticales:

Consideremos la ecuación diferencial autónoma:

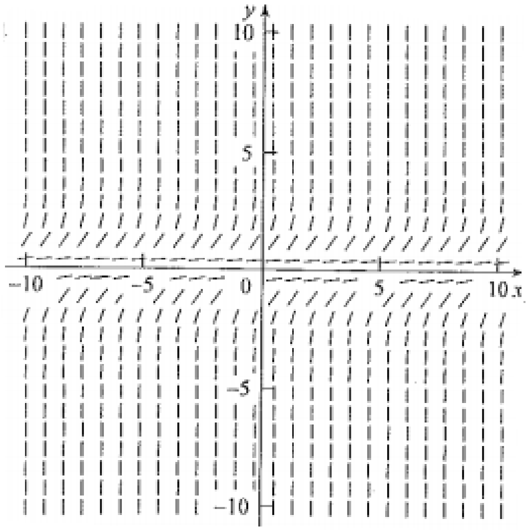
$$\frac{dy}{dx} = y^2 \qquad (26)$$

Hacer un análisis gráfico de la ecuación diferencial.

### Solución:

El campo de pendientes de (26) se muestra en la siguiente figura.

**Figura 29.** Campo de pendientes para la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dx}=y^2$.



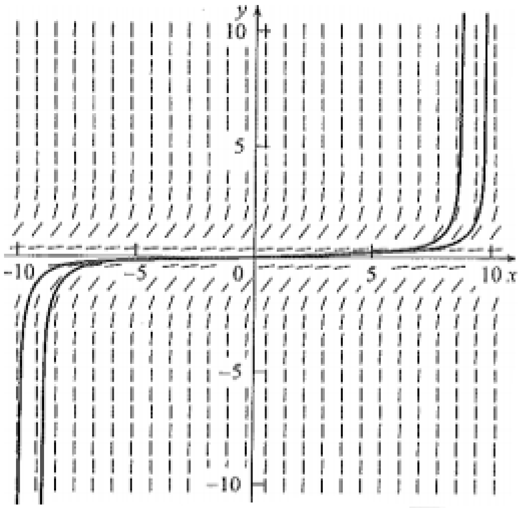

**Fuente** . Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Este campo de pendientes es simétrico con respecto al origen. Además las curvas solución son crecientes para y $\neq$ 0. También se tiene que al calcular la derivada de (26) se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx} = 2y.y^2 = 2y^3$$

De modo que las curvas solución son cóncavas hacia arriba si y > 0 y cóncavas hacia abajo si y < 0. Si observamos el campo de pendiente de la figura 29, nos damos cuenta que esto está de acuerdo con dicha información. La figura 30 ilustra algunas curvas solución.

**Figura 30.** Gráfica de algunas soluciones de la ecuación autónoma $\left(\frac{dy}{dx}=y^2\right)$.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Ahora, encontrando la solución explícita, se tiene que y(x) = 0 es una solución de equilibrio. Si y(x) $\neq 0$, entonces de (26) se tiene:

$$-\frac{1}{y} = x + C$$

Resolviendo para y encontramos la familia de soluciones:

$$y(x) = -\frac{1}{x+C} \qquad (27)$$

Esta familia de soluciones no contiene la solución de equilibrio y(x) = 0 para cualquier C finito.

Observe que el denominador de 27 tiene una asíntota vertical en x = - C. Así por ejemplo, la solución que pasa por el punto y (1) = 1 es:

$$y(x) = \frac{1}{2-x}$$

la cual tiende a $+\infty$ a medida que x pasa de 1 a 2. No olvide que una solución no puede pasar a través de su asíntota vertical. También observe que conforme x → ∞, la función dada por (27) tiende a cero. Así por ejemplo, la solución que pasa a través del punto y (-1) = -1 es:

$$y(x) = \frac{1}{x+2}$$

Que tiende a cero cuando x tiende a ∞ desde – 1.

Podemos evaluar la constante arbitraria en (27) para cualquier condición inicial. Así, si la condición inicial es y (0) = $y_0 \neq 0$, se tiene C = $-\frac{1}{y_0}$ y por lo tanto:

$$y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{y_0}}$$

De este modo, se tienen dos casos:

a) Si $y_0 > 0$, entonces y(x) → ∞, si x → $\frac{1}{y_0}$ desde la izquierda: asíntota vertical.

b) Si $y_0 < 0$, entonces y(x) → $0$, (desde la parte inferior) conforme x→ ∞: asíntota horizontal.

Sin embargo, si $y_0 = 0$, entonces tendremos solamente la solución de equilibrio y(x) = 0.

Obsérvese que cuando dibujamos la figura (29) olvidamos las asíntotas vertical y horizontal. Esto se debe a que el análisis gráfico puede no mostrar todo. Las soluciones no necesitan prolongarse indefinidamente. La figura (30) muestra el campo de pendientes original y algunas curvas solución analíticas particulares que pasan por los puntos iniciales (1,1), (-1,-1), (3, 1/3), (-3,-1/3), (5,1/5) y (-5,-1/5), en los cuales se muestran las propiedades anteriores.

## El teorema de existencia y unicidad

Si g(x, y) y $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ están definidas y son continuas en una región rectangular R = $\{(x,y)|a < x < b, c < y < d\}$ en el plano x – y. Y si ($x_0$, $y_0$) es un punto del rectángulo, entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una función y(x) definida para $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ que resuelve el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = g(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$$

Unos comentarios acerca del teorema de existencia y unicidad.

- El teorema de existencia y unicidad garantiza que hay una solución. Si se lee con atención se puede ver que la función solución puede tener un dominio muy pequeño de definición. El teorema dice que existe un $\varepsilon > 0$ y que la solución tiene un dominio que incluye el intervalo $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$. El $\varepsilon$ puede ser extremadamente pequeño, por lo que aunque el teorema garantiza que existe una solución, esta puede ser definida solo para intervalos muy pequeños.
- Este teorema de existencia y unicidad también nos garantiza la existencia de una única solución. Este teorema de existencia y unicidad nos dice que si queremos resolver el problema con valor inicial $\frac{dy}{dx} = g(x,y);\ y(x_0) = y_0$, entonces se nos garantiza que existe una curva solución que pasa a través de ese punto ($x_0$, $y_0$), y que ninguna otra curva solución pasa a través de ese punto, sabiendo que g(x, y) y $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ son continuas para todos los puntos cercanos a ($x_0$, $y_0$).

- El teorema no sugiere cómo encontrar la solución. No obstante, garantiza que existe una por buscar.
- Este teorema nos dice que si g(x, y) y $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ son continuas para todo x y toda y, entonces hay una solución única valida. Existe una solución única, pero puede no ser válida para todo x y toda y.
- Este teorema no dice que si g(x, y) y $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ son discontinuas, entonces no habrá solución. En este caso, el teorema no es concluyente y no nos dice nada.

## Ejemplo 15:

Analizar la aplicación del teorema de existencia y unicidad para la ecuación diferencial (26), es decir:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \qquad (28)$$

### Solución:

Aquí g(x, y) = $y^2$, de modo que $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2y$. Por lo tanto g(x, y) y, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ son continuas para todo x y toda y. El teorema establece que existe una solución única que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$., en otras palabras, existe una curva única que pasa a través del punto $y(x_0) = y_0$. Esto significa que las curvas solución no se intersecan, debido a que de otra manera habría dos soluciones distintas con la misma condición inicial en el punto donde se intersectarían. Ahora la función y(x) = 0 es una solución de (28) de modo que ninguna otra solución puede intersectarla.

## Ejemplo 16:

Consideremos la ecuación diferencial autónoma:

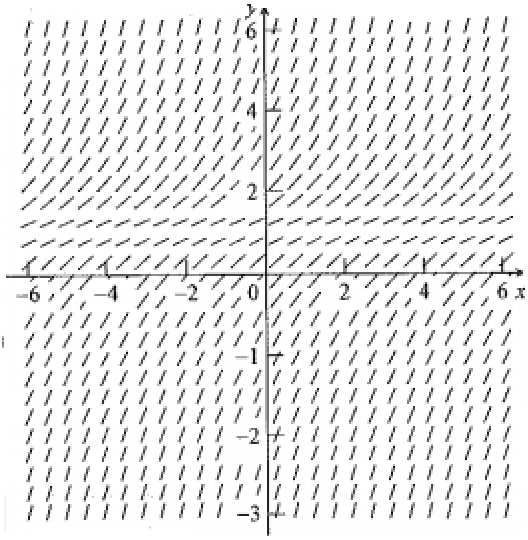
$$y' = (y-1)^{2/3} \text{ con condición inicial } y(1) = 1 \qquad (29)$$

Aplicar el teorema de existencia y unicidad a dicha ecuación diferencial.

## Solución:

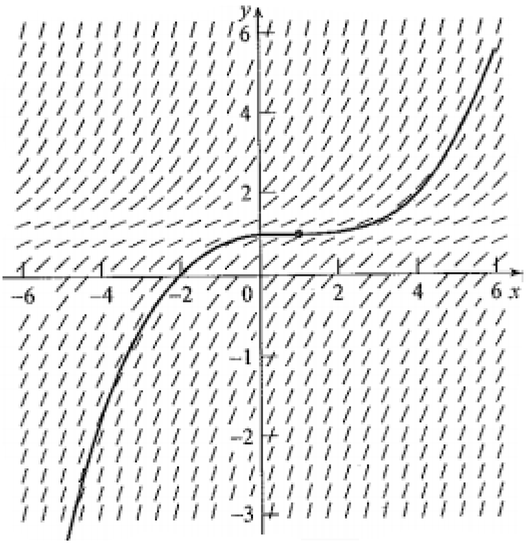
La figura 31 ilustra el campo de pendientes de (28), y la figura 32, una curva solución a través del punto (1,1).

**Figura 31.** Campo de pendientes para la ecuación diferencial (29).




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

**Figura 32** . Campo de pendientes con la solución particular de (29).




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Ahora veamos el enfoque analítico. Aunque la función es continua en todos los números reales, su derivada con respecto a y, a saber $\frac{2}{3}(y-1)^{-1/3}$, es discontinua en todo punto en donde y = 1, y esto incluye la condición inicial. Así, a pesar de la figura (29), no se garantiza que exista solamente una solución a través del punto (1, 1).

Podemos escribir (29) en la forma:

$$\frac{1}{(y-1)^{2/3}}y' = 1$$

lo cual, integrando da como resultado 3 $(y-1)^{1/3} = x + C$, o bien:

$$y(x) = \frac{1}{27}(x+C)^3 + 1$$

Si aplicamos la condición inicial y (1) = 1 se tiene que C = - 1; de manera que se tiene la solución:

$$y(x) = \frac{1}{27}(x-1)^3 + 1$$

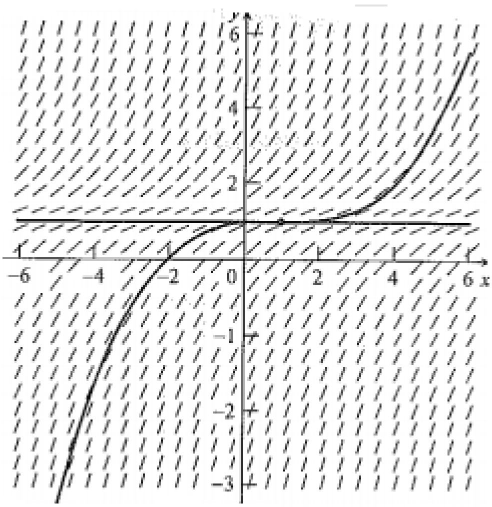
Si nos detenemos aquí, concluiremos que existe solamente una solución a través de (1,1) y que la figura 32 es correcta. Estaríamos equivocados, puesto que (29) tiene una solución adicional que hemos pasado por alto, la solución de equilibrio y(x) = 1. Esta también satisface la condición inicial, De este modo:

$$y\,(x) = 1$$

Es otra solución a través de (1, 1).

La siguiente figura muestra el campo de pendientes de (29), junto con las dos soluciones:

**Figura 33.** Gráfica en donde se ve que falla la unicidad.




**Fuente.** (Gráfica realizada por el autor con el programa Geogebra)

Si analizamos la figura (29), podemos ver realmente cuatro soluciones. Las dos obvias dadas anteriormente. Sin embargo, tomando y(x)=1 para x≤1, y la ramificación $y(x)=\frac{1}{27}(x-1)^3+1$, tenemos una tercera. Finalmente, tomando $y(x) = \frac{1}{27}(x-1)^3+1$, para $x \leq 1$ y luego y(x) = 1, tenemos una cuarta. De hecho, estas dos últimas no solamente son continuas en x = 1, sino que también son diferenciables allí.

## Ejemplo 17:

Consideremos ahora un problema con valor inicial para la ecuación diferencial autónoma:

$$y' = y^{3/2} \qquad\qquad y(x_0) = y_0 \qquad (30)$$

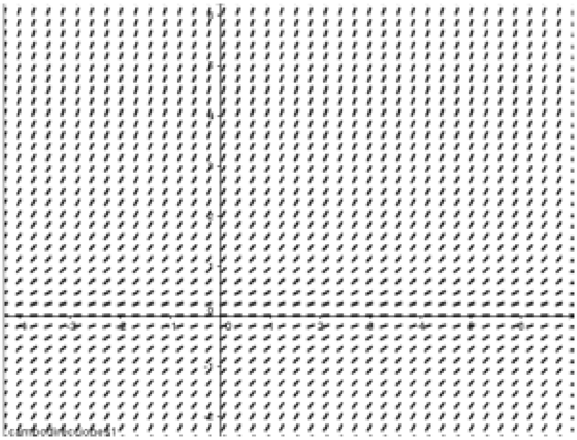
Teniendo en cuenta que tanto $y^{3/2}$ como su derivada respecto a y, $\frac{3}{2}y^{1/2}$ son continuas a lo largo de sus dominios, de modo que el teorema de existencia y unicidad se aplica para cualquier $x_0$ y cualquier $y_0$. También la ecuación (30) tiene solución de equilibrio en y(x) = 0.

En el caso de las soluciones de no equilibrio, si y > 0 la solución se incrementa, mientras que si y < 0 la ecuación diferencial no está definida debido a que:

$$y'' = \frac{3}{2}y^{1/2}y' = \frac{3}{2}y^{1/2}y^{3/2} = \frac{3}{2}y^2$$

La gráfica de la solución es cóncava hacia arriba para $y \neq 0$. El campo de pendientes para (30) se muestra en la siguiente figura. Observe que no se dibuja nada para y < 0.

**Figura 34.** Gráfica del campo de pendientes de la ecuación diferencial (30).



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Encontremos ahora la solución explícita de (30). En el caso de no equilibrio, cuando $y(x) \neq 0$, dividimos (30) por $y^{3/2}$ para obtener $y^{-3/2}\, y' = 1$, que al integrar da como resultado $-2y^{-1/2} = x + C$ o bien:

$$\sqrt{y} = \frac{-2}{x+C} \qquad (31)$$

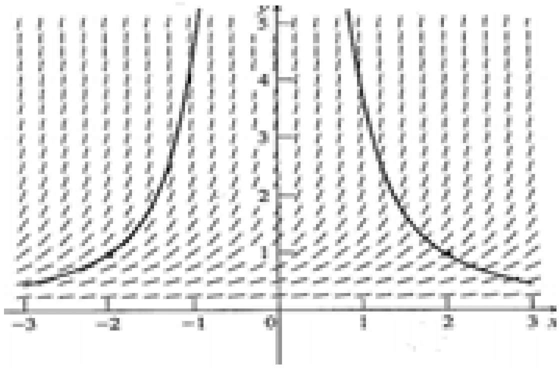
Elevando al cuadrado la ecuación anterior se obtiene:

$$y\,(x) = \frac{4}{(x+C)^2} \qquad (32)$$

Observe que no hay valor finito de C que permita que la solución de equilibrio y(x) = 0 quede implícita en (32).

Si consideramos el caso particular de (32) cuando C = 0, a saber, $y(x) = \frac{4}{x^2}$, observamos que pasa a través de los puntos (2,1) y (-2,1). El campo dependientes para (30), junto con la función (32) con C = 0, es decir $y = \frac{4}{x^2}$, y los puntos (2,1) y (-2,1), se muestran en la siguiente figura.

**Figura 35.** Gráfica del campo de pendientes con dos curvas solución para (32).



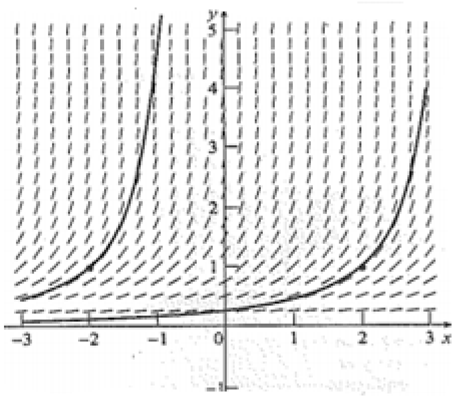
**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Pero entonces tendríamos un error; el miembro de la derecha de y = $\frac{4}{x^2}$ y el campo de pendientes están en desacuerdo, ¿dónde está el error? Se ha incurrido en un descuido muy común. De hecho, si solo hubiéramos obtenido la solución explícita sin hacer el análisis gráfico, no nos daríamos cuenta de que algo estaba equivocado. Nuestro error se encuentra en el paso de (31) a (32). El miembro derecho de (31) debe ser positivo, lo cual significa que (31) solamente es válido para x < - C. En consecuencia, la forma correcta de expresar la familia de soluciones utilizando (32) es:

$$y(x) = \frac{4}{(x+C)^2}, \qquad x < -C$$

Así, y = $\frac{4}{x^2}$ es la solución de este problema de valor inicial válida solamente para x < - C y su gráfica aparece en la figura 36.

**Figura 36.** Gráfica de la solución verdadera para la ecuación diferencial dada.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Para ilustrar lo que ocurre con otro punto inicial, notemos que las soluciones explícitas para la condición inicial y (2) = 1 es $\frac{4}{(x-4)^2}$, válida para x < 4. Esta solución también se muestra en la figura (32). Este ejemplo nos muestra que se debe tener cuidado cuando se resuelve y(x). Es un error común introducir funciones que no constituyen soluciones.

### Definición

Una solución particular de $y' = g(x, y)$, que no se obtiene de la familia de soluciones (que contenga la constante arbitraria C) seleccionando un valor finito para C, se denomina solución singular.

## Ejemplo 18:

Consideremos la ecuación diferencial autónoma:

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \qquad (33)$$

con la condición inicial y (0) = 0. Analizar y resolver la ecuación diferencial.

## Solución:

Tenemos que, tanto $\sqrt{1-y^2}$ como su derivada - y $\sqrt{1-y^2}$, son continuas en la vecindad de (0, 0), así que no se tiene ningún problema con la unicidad de la solución.

Si dividimos (33) entre $\sqrt{1-y^2}$ y hacemos la integración, obtenemos:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int d$$

Lo que nos lleva a:

$$\text{Arcsen } y = x + C, \qquad (34)$$

Si utilizamos la condición inicial, encontramos que C = 0, de modo que (34) se reduce a:

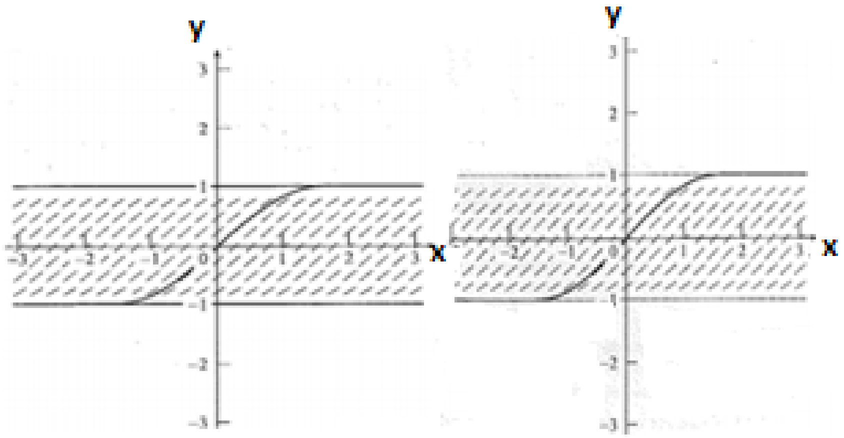
$$\text{Arcsen } y = x \qquad (35)$$

De donde se obtiene:

$$y = \text{sen}(x) \qquad (36)$$

Pero de acuerdo con la ecuación (33), las soluciones deberían ser crecientes (o tener líneas tangentes horizontales cuando y = $\pm 1$), mientras que las soluciones que se han encontrado (36), oscilan. Esto es un error. La figura 37 permite ver qué sucede cuando el campo de pendientes para (34) y la solución (35) se trazan juntas.

**Figura 37.** Gráficas de las funciones (34) y (35).




**Fuente** . Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Se ha cometido un error semejante al del ejercicio 17 cuando se pasa de (35) a (36). El intervalo de la función y = arcsen(x) es $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, de manera que (35) solamente es válida para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Así que (36) solamente es válida para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. La solución correcta para (33) restringida a y(0) = 0 es:

$$y = \operatorname{sen}(x) \text{ donde } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Este error es fácil de cometer. De hecho, la mayoría de los paquetes de software que resuelven ecuaciones diferenciales proponen a (36) como solución de dicha ecuación, que no lo es.

# 2.9 Ejercicios

## Análisis cualitativo

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

Utilice métodos gráficos (cálculo, campos de pendientes isóclinas) para trazar algunas curvas solución.

Resuelva la ecuación diferencial para y(x) con métodos analíticos.
Confirme que los encisos a y b son consistentes.

a. $y' = - y2$ b. $y' = -1 - y2$

c. $y' = y2$ d. $y' = y^{1/5}$

e. $y' = y^{3/2}$ f. $y' = \sqrt{1 - y^2}$

2. Determine la familia de soluciones explícitas para cada una de las ecuaciones diferenciales $y' = e^y$ y, $y' = -e^{(-y)}$. Trace la gráfica de estas dos familias de soluciones, utilizando la misma escala para el eje x y, el eje. ¿Qué nota acerca del ángulo de intersección entre estas dos familias de soluciones? ¿Podría haberlo descubierto directamente a partir de las ecuaciones diferenciales, sin resolverlas?

3. Resuelva $y' = 1 – y$, sujeta a la condición inicial:
   a. $y (0) = 0$
   b. $y (0) = 1$
   c. $y (0) = 2$
   d. $y (x_0) = y_0$

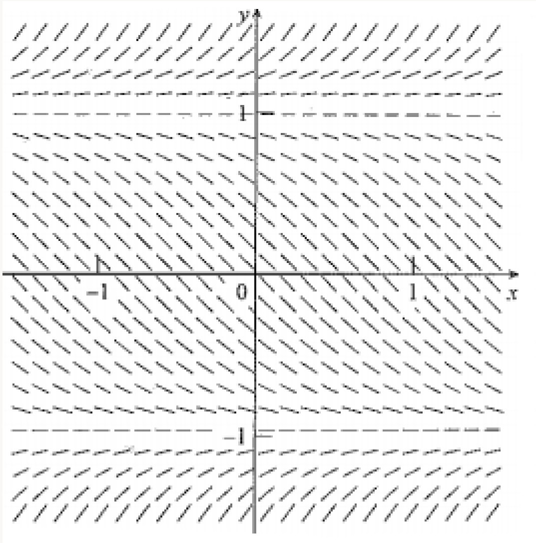
4. Considere las cuatro ecuaciones diferenciales siguientes:

$y' = y + 1$, $y' = y - 1$, $y' = \ln |y|$, $y' = y^2 - 1$

a) El campo de pendientes de una de estas ecuaciones se muestra en la figura 38. Relacione la ecuación apropiada para la figura, estableciendo cuidadosamente sus razones. No esboce ninguna gráfica del campo de pendientes para responder a esta pregunta.

b) Diseñe brevemente una estrategia general para este proceso de relación.

**Figura 38.** Campo de pendientes para alguna de las funciones del ejercicio 4.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

5. Las figuras (39) y (40) son campos de pendientes desconocidos, que creemos son los campos de pendientes correspondientes a dos de las siguientes ecuaciones diferenciales:

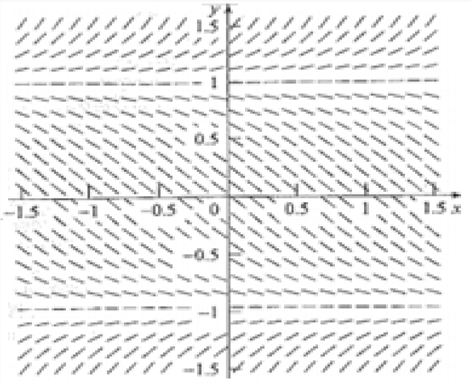
a. $y' = \frac{y^2+1}{y^2-1}$

b. $y' = \frac{y^2-1}{y^2+1}$

c. $y' = -\frac{y^2+1}{y^2-1}$

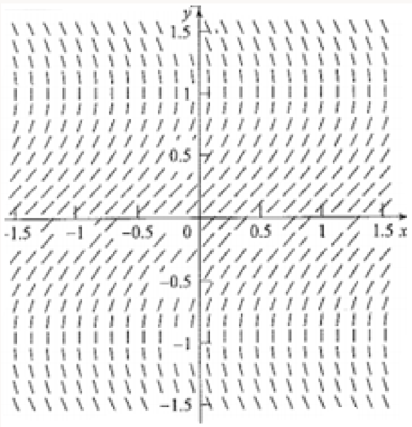
d. $y' = -\frac{y^2-1}{y^2+1}$

**Figura 39.** Campo de pendientes para alguna de las funciones del ejercicio 5.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

**Figura 40.** Campo de pendientes para alguna de las funciones del ejercicio 5.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

a. Identifique la ecuación diferencial a la que pertenecen cada uno de los campos de pendientes desconocidos. Confirme la información haciendo uso del cálculo y las isóclinas. No trace la gráfica de ningún campo de pendientes para responder la pregunta.
b. Ahora sobreponga los dos campos de pendientes desconocidos, quizás colocando uno sobre otro y mirándolo a contraluz. Otra manera de hacerlo consiste en trazar la gráfica de los campos de pendientes para:

$$y' = a\frac{y^2+1}{y^2-1} + b\frac{y^2-1}{y^2+1}$$

Con a = $\pm 1$ y b = 0 y después con a = 0 y b = $\pm 1$, ¿Qué observa? ¿Haría esta información más fácil el análisis del enciso a?

6. ¿Puede el campo de pendientes de las ecuaciones diferenciales de la forma $y' = g(x)$, ser simétrico a lo largo del eje x si g(x) no es la función cero? Si su respuesta es afirmativa, proporcione las condiciones requeridas sobre g(x) y pruebe su afirmación. Si su respuesta es negativa, proporcione un ejemplo donde no sea simétrico.

7. ¿Puede el campo de pendientes de las ecuaciones diferenciales de la forma $y' = g(y)$, ser simétrico a lo largo del eje y si g (y) no es la función cero? Si su respuesta es afirmativa, proporcione las condiciones requeridas sobre g (y) y pruebe su afirmación. Si su respuesta es negativa, proporcione un ejemplo donde no sea simétrico.

8. Resuelva la ecuación $y' = -y^2$. Demuestre que la solución de equilibrio es semiestable. Explique por qué una solución de equilibrio semiestable no es estable.

9. Describa el comportamiento de las soluciones de $y' = a + b\,y$, si:

a) $a < 0$ y $b < 0$, $b = 0$, $b > 0$.
b) $a = 0$ y $b < 0$, $b = 0$, $b > 0$.
c) $a > 0$, y $b < 0$, $b = 0$, $b > 0$.

## Modelos simples

10. Tiempo de duplicación. Una medida del crecimiento exponencial, $y(t) = Ce^{(kt9)}$, donde $k > 0$, es el tiempo de duplicación, $T_d$ o sea, el tiempo que toma para que el valor de y en cualquier tiempo en particular, $t_0$, en duplicarse, es decir, $y(t_0)$, se duplique a $2y(t_0)$. Demuestre que $T_d = \ln(2/k)$. Observe que $T_d$ es independiente de $t(t_0)$. ¿Qué le dice esto?

11. Vida media, constante de tiempo y tiempo de estabilidad. Existen varias medidas de decaimiento exponencial, $y(t) = C e^{kt}$, donde $k < 0$.

a) Vida media, $T_h$. Tiempo que toma para que el valor de y en cualquier momento particular, $t_0$, es decir $y(t_0)$ se reduzca hasta el valor de $y(t_0)/2$. Demuestre que $T_h = -\ln(2/k)$. Nótese que es independiente de $y(t_0)$.
b) Constante de tiempo, $T_c$. Tiempo en que la tangente en el punto $(0, y(0))$ cruza al eje t. Demuestre que $T_c = -1/k$. Confirme que la vida media es de aproximadamente el 79 % de la constante de tiempo. En algunas disciplinas, el valor de y para cinco constantes de tiempo, es decir, $5T_c$, se considera cero, ¿cuál es el valor de y para cinco constantes de tiempo?

c) Tiempo de estabilización, $T_s$. Tiempo después del cual el valor de y nunca excede el 1 % del valor máximo de y. Demuestre que para el decaimiento exponencial, $T_c$ = -2ln (10/k). Verifique que el valor del tiempo de estabilización sea de cuatro a cinco constantes de tiempo.

12. Población mundial. En el año 1800 la población mundial era aproximadamente de 1.000 millones, mientras que en 1900 era de 1.700 millones. Si la población P (t) al tiempo t obedece la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$, calcule la población mundial en el año 2000. ¿Cuál será el tiempo de duplicación? ¿Piensa que estas son buenas aproximaciones si la población mundial en el año 1990 era de 5.300 millones, y se estuviera duplicando cada 40 años?

13. Al tiempo t = 0 un cultivo de bacterias tiene $N_0$ bacterias. Una hora más tarde, la población ha crecido un 25 %. Si la población P al tiempo t obedece a la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$, ¿cuánto tiempo le tomará duplicarse a la población?

14. Después de administrar un medicamento, la concentración de este en el cuerpo disminuye el 50 % en las siguientes 10 horas. ¿Cuánto tiempo pasará para que la concentración del medicamento alcance el 10 % de su valor original, si la concentración C al tiempo t obedece a la ecuación diferencial $\frac{dC}{dt} = kC$?

15. Dispersión de rumores. La Universidad de Arizona tiene 35000 estudiantes. El primer día del semestre, una clase de 35 estudiantes piensan que escucharon a su profesor de matemáticas decir que cada uno recibiría la calificación de

A en el curso. El siguiente día una cuidadosa investigación de la población completa de estudiantes mostró que hasta el momento 700 estudiantes habían escuchado el rumor. Si el rumor se dispersa de acuerdo a la ecuación logística $y' = ay\ (b - y)$, donde y es el número de estudiantes que lo han escuchado, ¿en qué tiempo estará avisado el 90 % de la población de estudiantes?

16. Adquisición de tecnología. De 10.000 compañías, 100 han adquirido una nueva tecnología al tiempo $t = 0$. Si el número $y\ (t)$ de compañías que han adquirido la tecnología al tiempo t (en unidades de años) satisface la ecuación diferencial $y' = 0.00001y\ (10000 - y)$, determine el número de compañías que se espera adquieran la tecnología después de cinco años.

17. La ecuación logística. En la ecuación logística $y' = ay\ (b - y)$, aplique el cambio de variable $y(x) = 1/u(x)$, y demuestre que u satisface la ecuación autónoma $u' = a\ (1 - u\ b)$. Resuelva la ecuación para $u(x)$ y utilice este resultado para hallar la solución de la ecuación logística. ¿Es este método más fácil que el dado en el texto?

18. La ecuación logística. Demuestre que la solución de la ecuación logística $y' = ay\ (b - y)$ es simétrica alrededor del punto de inflexión (sugerencia: traslade la ecuación diferencial de modo que el punto de inflexión $(x_0, b/2)$ quede en el origen.

**Figura 41.** Tomas Malthus (1766-1834).

**Fuente.** Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual Universidad EAN).

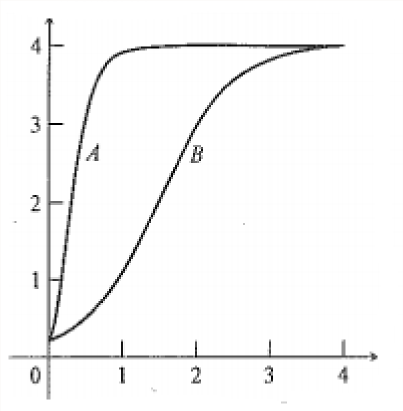
Thomas Malthus, economista británico, clérigo y demógrafo. Cursó estudios en el Jesús College, de la Universidad de Cambridge. En 1973 fue elegido miembro del equipo de dirección del Jesús College, puesto al que renuncia en 1804 al contraer matrimonio. En el año 1798, ofició en la parroquia de Albury, en el Surrey. De 1805 hasta su muerte ejerció como catedrático de Economía Política e Historia Moderna en el colegio de la East India Company en Halleybury.

Su principal contribución a la economía fue su teoría de la población publicada en su libro: *Ensayo sobre el principio de la población* (1798), donde sostiene que la población tiende a crecer más rápidamente que la oferta de alimentos disponibles para sus necesidades. Cuando se produce un aumento de la producción de alimentos superior al crecimiento de la población se estimula la tasa de crecimiento; por otro lado, si la población aumenta demasiado con relación a la producción de alimentos, el crecimiento se frena debido a las hambrunas, las enfermedades y las guerras. Gracias a sus escritos se llevaron a cabo los primeros estudios demográficos sistemáticos.

## La ecuación logística

La figura 42 muestra la gráfica de dos funciones. Una de ellas definitivamente no es una solución de una ecuación logística. ¿Cuál es? Explique por qué.

**Figura 42.** Gráfica para una función logística.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

19. Resuelva $y' = \frac{1}{2}(1 - y^2)$ sujeta a la condición inicial:
a. y (0) = 0 b. y (0) = 1. c. y (0) = -1.

20. Describa el comportamiento de las soluciones de $y' = ay(b - y)$ si:
a. $a < 0$ y $b < 0$, $b = 0$, $b > 0$.
b. $a = 0$ y $b < 0$, $b = 0$, $b > 0$.
c. $a > 0$, y $b < 0$, $b = 0$, $b > 0$.

21. Infección viral. Supongamos que tenemos un grupo homogéneo de N individuos, que al tiempo t (medido en días) se compone de x individuos susceptibles a la infección (digamos por parte de algún virus) y de y individuos infectados. También supongamos que no se remueve el virus de la circulación por

recuperación, aislamiento o muerte (esta sería la situación correspondiente a las primeras etapas de una infección respiratoria de las vías superiores). Esto quiere decir que tenemos x + y = N. Si suponemos que la razón de cambio de los individuos infectados como al número de individuos susceptibles de la infección, se tiene la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = kxy = k(N - y)y$. Si suponemos que al tiempo t = 0, una persona comienza a enfermar mientras que el resto no está infectado, nuestra condición inicial es y (0) = 1.

a) Mediante el análisis directo de la ecuación diferencial, determine el número de personas infectadas en el momento en que la infección tiene la razón de cambio más rápida.
b) Resuelva el problema del valor inicial para y.
c) Los archivos públicos de epidemias registran el número de nuevos casos que aparecen cada día. La cantidad está dada por –dx/dt y la gráfica de –dx/dt contra t se denomina curva de epidemia. Calcule esta cantidad y trace la gráfica de este resultado. ¿Cuál es el máximo valor de la función? Demuestre cómo podría haber hallado el valor máximo sin resolver la ecuación diferencial.

22. La ecuación de Gompertz. Las observaciones sobre el crecimiento de tumores animales indican que el tamaño y (t) del tumor al tiempo t puede describirse mediante la ecuación diferencial $y' = - k\ y \ln (y/b)$, donde k y b son constantes positivas. Esta ecuación diferencial en ocasiones se conoce como la ley de Gompertz.

a) Construya campos dependientes de la ecuación que puntos de inflexión se presentan a lo largo de la recta y = n para diversos valores de k y b. ¿Qué otro campo de pendientes ha observado que posea las mismas características generales?
b) Haga uso del análisis gráfico para determinar las regiones en las cuales las soluciones de la ecuación diferencial aumentan, disminuyen, tienen concavidad hacia arriba o concavidad hacia abajo. Confirme cuáles puntos de inflexión se presentan a lo largo de la recta $y = be^{-1}$.
c) ¿Tiene esta ecuación diferencial soluciones de equilibrio? Si es así, ¿cuáles son? Si no, explique la razón.
d) Resuelva la ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $y(0) = y_0$, $y_0 > 0$.

## Existencia y unicidad

23. ¿Tiene $y' = 3y - 2$ algunas soluciones de equilibrio? ¿Para qué condición(es) inicial(es) sería esta solución de equilibrio la única solución de un problema con condición inicial?

24. Considere el problema de valor inicial $y' = y^{5/2}$, $y(0) = 1$.

a) De acuerdo con el teorema de existencia y unicidad, ¿tiene este problema de valor inicial una solución única?
b) Resuelva $y' = y^{5/2}$ para encontrar -
Demuestre, a partir de esta última ecuación que la condición inicial $y(0) = 1$ implica que $C = 3/2$ o $C = -1/2$. De este modo, hay dos diferentes soluciones para

el problema de valor inicial, de manera que este no tiene solución única.

c) Reconcilie las respuestas que se obtuvieron para los encisos a y b.

25. Resuelva la ecuación diferencial $y' = y^{1/3}$. Algunos dicen que existen por lo menos tres diferentes soluciones que pasan a través del punto (0, 0). ¿Están en lo correcto? Haga sus comentarios.

26. Demuestre que la función definida por: $\frac{2}{3}y^{-\frac{3}{2}} = x + C, o\ y(x) = \left(-\frac{2}{3}\frac{1}{(x+C)}\right)^{2/3}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{27}(x-1)^3 + 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Es diferenciable en todas partes.

27. La ecuación logística. Considere la solución de equilibrio y = b de la ecuación logística $y' = ay\,(b - y)$ ¿Es posible para una solución cercana alcanzar esta solución para un valor finito de x? (sugerencia: utilice el teorema de existencia y unicidad).

28. La ecuación logística. Considere la ecuación logística $y' = ay\,(b - y)$.

a. Si $y(0) > b$, demuestre que la solución tiene una asíntota vertical a la izquierda de $x = 0$ (sugerencia: haga uso de la solución de la ecuación logística). ¿Qué le ocurre a esta solución a medida que se aproxima a la asíntota desde la derecha?

b. Si y (0) < 0, demuestre que la solución tiene una asíntota vertical a la derecha de x = 0. ¿Qué le ocurre a esta solución a medida que se aproxima a la asíntota desde la izquierda?

29. Ahorro de dinero. Cuando los ahorros son compuestos continuamente a una tasa r, el capital, P, cambia con el tiempo, t, de acuerdo a la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = r.P$. A fin de atraer nuevos negocios, un banco local hace mejores ofrecimiento al calcular el capital de un nuevo inversionista de acuerdo a la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = r.P^n$, donde n es una constante, y n > 1. Discuta las ventajas y desventajas de abrir una nueva cuenta en este banco.

# CAPÍTULO 3.

# ECUACIONES DIFERENCIALES AUTÓNOMAS

## Contenido



## Competencias

1. Analizar una ecuación diferencial autónoma de manera cualitativa.
2. Encontrar los puntos de estabilidad de una ecuación diferencial autónoma.
3. Clasificar los puntos de estabilidad de una ecuación diferencial autónoma.
4. Dibujar la línea de fase de una ecuación diferencial autónoma.
5. Identificar los puntos de bifurcación de una familia de funciones.

**Figura 1.** Robert Luke Devaney (1948).

**Fuente.** Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual Universidad EAN).

Robert Luke Devaney nació el 9 de abril de 1948. Recibió su A.B, de la Holly Cross College y su Ph. D., de la Universidad de California (Berkeley) en 1973 bajo la supervisión de Stephen Smale. Después se unió a la facultad de la Universidad de Boston en 1980.

Devaney es conocido por una formulación simple para definir un sistema caótico, que no requiere conceptos avanzados tal como la teoría de la medida. En 1989 escribió: *Una introducción a sistemas caóticos.* Devaney define un sistema caótico, si él tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales, es decir que es topológicamente transitivo (para todo par de conjuntos abiertos) y sus órbitas periódicas forman un conjunto denso.

# Introducción

Existe otra manera de analizar las ecuaciones diferenciales autónomas, aplicando lo que se conoce como análisis de la línea de fase. Este método no ofrece una solución explícita, pero proporciona el comportamiento cualitativo de las soluciones con muy pocos cálculos. La clave de esta técnica es el teorema de existencia y unicidad, el cual garantiza que las soluciones no pueden intersecarse. Veamos unos ejemplos.

# 3.1 Comportamiento cualitativo de soluciones utilizando puntos de equilibrio y líneas de fase

## Ejemplo 1. Analizar la línea de fase de la ecuación logística:

$$y' = y\,(2 - y) \qquad (1)$$

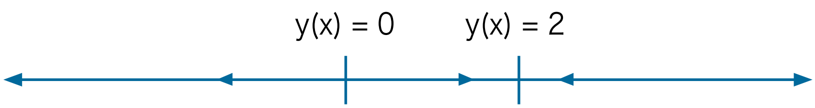
### Solución:

Primero hallamos la solución de equilibrio de (1), las cuales son y(x) = 0, y y(x) = 2. Por el teorema de existencia y unicidad sabemos que ninguna otra solución puede cruzarse con cualquiera de estas dos soluciones, por esta razón nos concentramos en las tres regiones formadas por estas soluciones de equilibrio, a saber $y < 0$, luego $0 < y < 2$ y finalmente $y > 2$.

- Si $y < 0$, entonces por (1) $y' < 0$, de modo que en esta región y es una función decreciente de x, entonces, a medida que se incremente x, y se aleja de la solución de equilibrio y(x) = 0.
- Si $0 < y < 2$. En este caso vemos que (1) requiere que $y' > 0$, de manera que para los valores de y, e identificar las soluciones de equilibrio mediante cualquier valor de x tenemos $0 < y < 2$, entonces la solución y(x) será una función creciente de x. No puede intersecar y(x) = 2.
- $2 < y$. En este caso $y' < 0$ de modo que para cualquier valor de x tenemos que $2 < y$, entonces la solución y(x) será una función decreciente de x. No puede intersectar a y(x) = 2.

Todo lo anterior lo podemos expresar gráficamente trazando una línea horizontal (o vertical) para representar los puntos 0 y 2, llamados puntos de equilibrio. Entonces en las tres regiones y < 0, 0 < y < 2, 2 < y, colocamos flechas para indicar si una solución y(x) se aleja o se acerca a la solución de equilibrio en su frontera, a medida que x aumenta.

**Figura 2.** Línea de fase para la ecuación autónoma dada.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

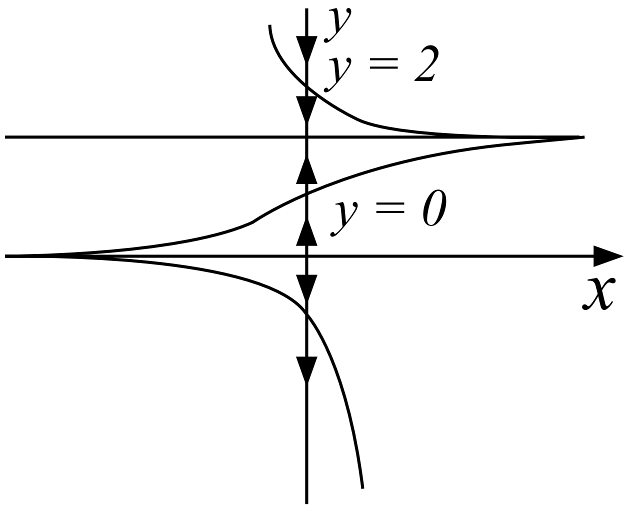
Por ejemplo, en el caso a, si y < 0, entonces y se aleja de la solución de equilibrio y(x) = 0; lo cual se indica con flechas que apuntan a la izquierda. Efectuando el mismo procedimiento en las otras regiones se obtiene la figura 1, llamada línea de fase.

Que y(x) = 0 sea una solución de equilibrio inestable (o fuente) se caracteriza por flechas en cada extremo del punto de equilibrio, cada una alejándose de él. Las flechas que apuntan hacia el punto de equilibrio indican una solución de equilibrio estable (o un sumidero), en este caso y(x) = 2.

Si inicialmente $y(x_0) = y_0 > 2$, esperaríamos que la solución y(x), que pasa a través del punto $(x_0, y_0)$, disminuya hacia 2 a medida que x aumenta. Sin embargo, esta solución y(x) no puede alcanzar a 2 para ningún valor de x, debido a que y(x) = 2 es otra solución t el teorema de existencia o unicidad, lo que garantiza que dos soluciones no pueden intersecarse.

La figura 3 muestra soluciones típicas consistentes con los análisis de la línea de fase. Observe que el eje y nos sirve de línea de fase.

**Figura 3.** Gráficas del comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial autónoma dada.



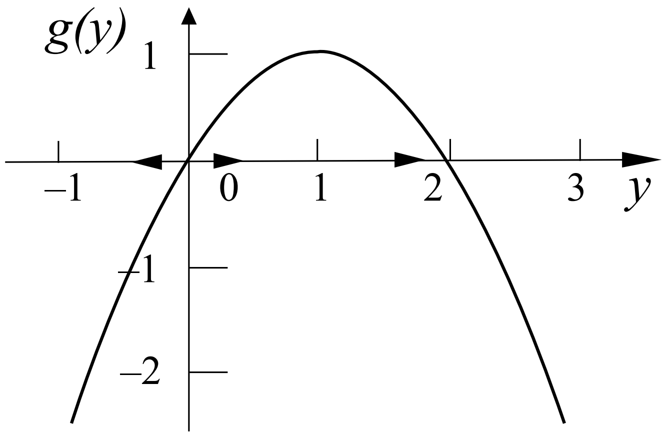

**Fuente.** Elaborado por el autor con el programa Geogebra.

En el ejercicio 29 de la sección anterior, vimos que algunas de las soluciones de la ecuación logística $y' = y\,(2 - y)$ tienen asíntotas verticales. Si inicialmente $y\,(0) > 2$, entonces existe un valor negativo de x para el cual y viene desde $+\infty$. Si $y\,(0) < 0$, entonces existe un valor positivo de x para el cual $y \to -\infty$. De este modo, si $y\,(0) > 2$, la solución no regresa durante todo el camino hacia $x = -\infty$, y si $y\,(0) < 0$, la solución no avanza por todo el camino hacia $x = +\infty$. No obstante, el ejercicio 28 de la sección anterior muestra que si $0 < y\,(0) < 2$, entonces la solución se extiende desde $-\infty$ hasta $+\infty$. El análisis de la línea de fase, como el análisis gráfico, no muestra estas propiedades.

## En resumen:

- Una manera simple de construir la línea de fase para $y' = g\,(y)$, consiste en trazar la gráfica de $g(y)$, para el ejemplo $g(y) = y(2 - y)$, tomando y como el eje horizontal.

**Figura 4.** Búsqueda de los puntos de estabilidad a partir de la gráfica de g(y).




**Fuente.** Elaborado por el autor con el programa Geogebra.

a) Los puntos de equilibrio se encuentran donde la gráfica de g (y) cruza al eje y, por lo tanto, se deben identificar estos puntos sobre el eje y.
b) Los valores de y para los cuales g (y) > 0 se encuentran donde la función y es creciente. Identifique estas regiones sobre el eje y con flechas que apuntan hacia la derecha.
c) Los valores de y para los cuales g (y) < 0 se encuentran donde la función y es decreciente. Identifique esas regiones sobre el eje y con flechas que apuntan hacia la izquierda.
d) El eje y es ahora la línea de fase.

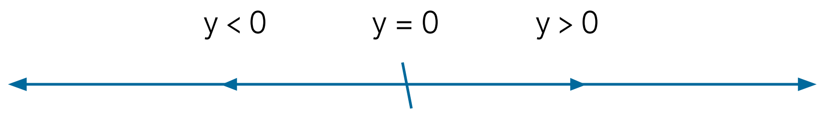
Otra manera de concebir la línea de fase consiste en imaginarse las curvas solución proyectadas sobre el eje y. En la figura 5 si imaginamos que observamos hacia abajo desde $x = \infty$, y posteriormente proyectamos las direcciones de todas las curvas solución sobre el eje y, podríamos caracterizar las propiedades de estas soluciones con flechas a lo largo del eje vertical. Al girar esta línea 90° se obtiene la línea de fase de la figura 1.

## Ejemplo 2. Analizar la línea de fase de la ecuación logística:

**Figura 5.** Línea de fase para $y' = y$.

$$y' = y \qquad (2)$$

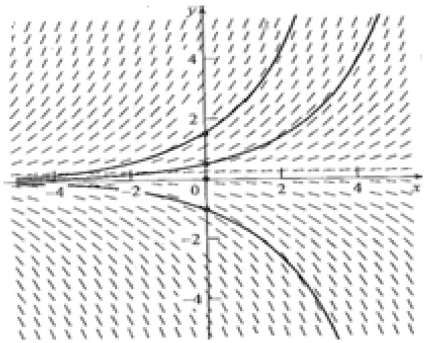
Ahora examinemos la línea de fase para (2). Solamente existe un punto de equilibrio, a saber $y(x) = 0$, y la línea de fase se da en la figura 4, la cual se construye muy fácilmente, comprendiendo que $g(y) = y$ es negativa si $y < 0$ y positiva si $y > 0$.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

Ahora analicemos esta línea de fase. De la dirección de las flechas vemos que $y = 0$ es un equilibrio inestable (o fuente). Si una curva solución comienza con $y < 0$, disminuirá a medida que x aumenta y se aleja de la solución de equilibrio $y(x) = 0$. Del mismo modo, una solución que inicia con $y > 0$ se incrementa en la medida que crece. Si comparamos esta observación con la figura 6, vemos que nuestra línea de fase se puede obtener al proyectar la dicha figura sobre el eje y, insertando las flechas para indicar las soluciones crecientes o decrecientes y girando 90° en dirección de las manecillas del reloj.

**Figura 6.** Campo de pendientes con algunas curvas solución para y´= y.



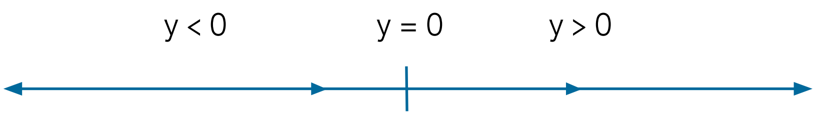
**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

## Ejemplo 3. Analizar la línea de fase de la ecuación logística:

$$y' = y^2 \qquad (3)$$

Existe una sola solución de equilibrio, a saber y(x) = 0. Debido a que g(y) = $y^2$ es una parábola que se abre hacia arriba y que toca al eje y en y = 0, la línea de fase (3) está dada por la figura 6.

**Figura 7.** Línea de fase para la ecuación autónoma y´= $y^2$.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

Las soluciones de (3) que comienzan con y < 0 se incrementan hacia la solución de equilibrio y = 0 conforme x aumenta, mientras que las soluciones que inician en y > 0 también se incrementan y se alejan de la solución de equilibrio y = 0 conforme x aumenta. Vemos que la solución de equilibrio y(x) = 0 no es ni equilibrio estable ni en equilibrio inestable. Se encuentra en equilibrio semiestable (o indiferente).

No deberíamos pensar que las flechas en la línea de fase de la figura 7 implican que a medida que x aumenta, una solución que comienza en y < 0 pasa a través de y = 0 o continúa incrementándose. La ecuación y(x) = 0 es una solución y, según el teorema de existencia y unicidad, ninguna otra solución puede pasar a través de ella. De este modo la figura 7 nos dice que si una solución con y < 0, se mantiene con y < 0. Si comparamos esta observación con la figura 25 de la unidad anterior, vemos que la figura 7 puede obtenerse mediante la proyección de la figura 25 de la sección anterior sobre el eje y, insertando las flechas para indicar las soluciones crecientes, y girando 90° en dirección de las manecillas del reloj.

## Observación

Cuando se analice la línea de fase, hay que darse cuenta si el teorema de existencia y unicidad se satisface, ya que ninguna solución interseca las soluciones de equilibrio.

### Cómo dibujar líneas de fase

Podemos dar una definición más precisa de la línea de fase dando los pasos requeridos para dibujarla. Para la ecuación autónoma $\frac{dy}{dx} = f(y)$:

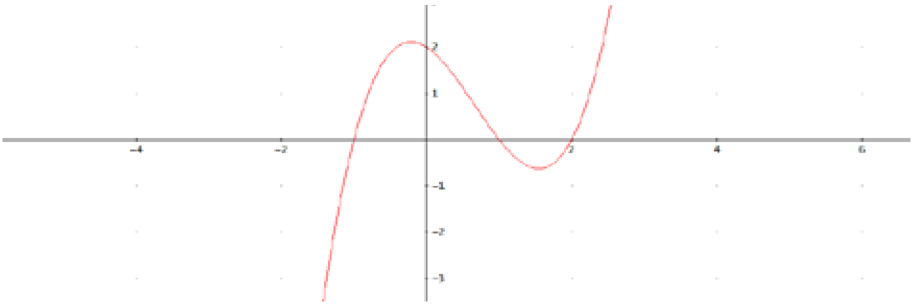
- Dibuje la línea.
- Encuentre los puntos de equilibrio (los números tales que f (y) = 0, y márquelos sobre la línea.
- Encuentre los intervalos de valores y, para los cuales f (y) > 0, y dibuje flechas que señalen hacia arriba (o hacia la derecha) sobre esos intervalos.
- Encuentre los intervalos de valores y, para los que f (y) < 0, y dibuje flechas que señalen hacia abajo (o hacia la izquierda) en esos intervalos.

## Ejemplo 4. Analizar la línea de fase de la ecuación diferencial autónoma:

$$y' = f(y) = (y^2 - 1)(y - 2) \qquad (4)$$

Como la función $f(y) = (y^2 - 1)(y - 2)$, su gráfica se muestra en la siguiente figura.

**Figura 8.** Gráfica de la función f(y) dada.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

La línea de fase se puede leer en el eje x de la figura 7.

Observemos que se puede factorizar la ecuación como:

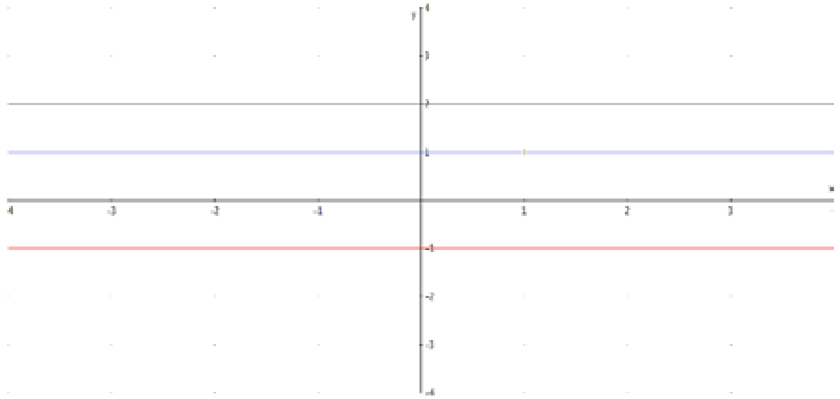
$$f(y)) = (y - 1)(y + 1)(y - 2)$$

Es decir que los ceros de esta función son y = 1, y = - 1 y y = 2. Estos son los puntos de equilibrio. De acuerdo con esto tenemos tres soluciones de equilibrio:

$$y(x) = -1, \qquad y(x) = 1 \;\text{ y, } \quad y(x) = 2$$

Como estas son funciones constantes, la posición sobre la línea de fase modelado por ellos es también constante. Las soluciones de equilibrio son dibujadas en la figura 9.

**Figura 9.** Líneas de estabilidad o equilibrio de la ecuación autónoma dada.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Es fácil ver que el teorema de existencia y unicidad se cumple para la ecuación diferencial autónoma dada en (4). Luego las curvas solución de no equilibrio no pueden cruzar las soluciones de equilibrio. Se tienen cuatro intervalos limitados por los puntos de equilibrio. Si una solución y(x) está en uno de estos intervalos. entonces estará allí por siempre. El movimiento de los puntos solución a lo largo de la línea de fase está limitado por los puntos de equilibrio. En cada uno de los cuatro intervalos el lado derecho de la gráfica de f (y) tiene un signo constante:

$f(y) < 0$ en $(-\infty, -1)$,

$f(y) > 0$ en $(-1, 1)$,

$f(y) < 0$ en $(1, 2)$,

$f(y) > 0$ en $(2, \infty)$.

Esta información puede ser obtenida a partir de la figura 9. De todas formas si no se tiene una gráfica se puede analizar el signo de f en cada punto de cada intervalo.

Si f(y) no es una solución de equilibrio para la ecuación (4), y y(x) está en uno de los intervalos (-1, 1) y (2, ∞) donde f( y ) > 0, entonces $y'(x) = f(y(x)) > 0$, entonces y (x) es creciente. Esto significa que x se mueve hacia la derecha a lo largo de la línea de fase. Indicamos este hecho mediante una flecha hacia la derecha en la línea de fase. Así mismo, en el intervalo $(-\infty, -1)$, y (1, 2) donde f (y) < 0, x se está moviendo hacia la izquierda y trazamos una flecha hacia la izquierda en dichos intervalos. De manera similar, una solución de equilibrio en (2, ∞).

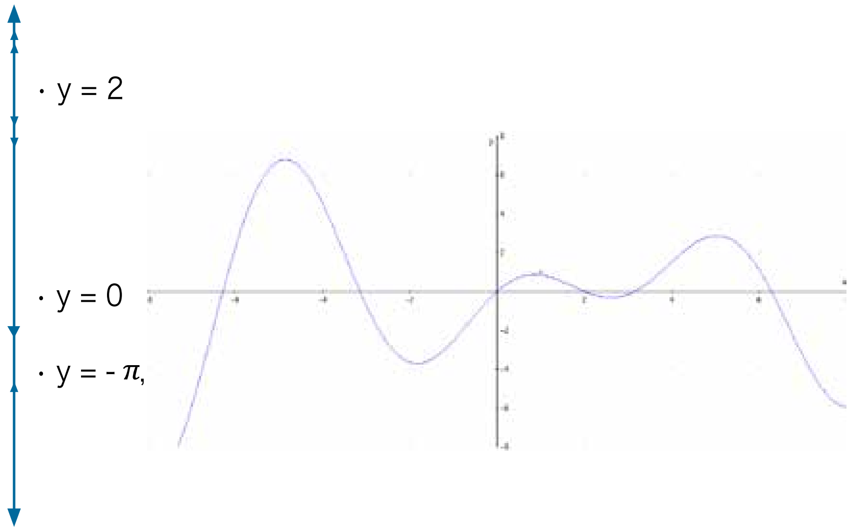
## Ejemplo 5. Analizar la línea de fase de la ecuación diferencial autónoma:

$$\frac{dy}{dt} = (2 - y)sen(y) \qquad (5)$$

### Solución:

La línea de fase para esta ecuación diferencial está dada en la figura 10. Considérese que los puntos de equilibrio

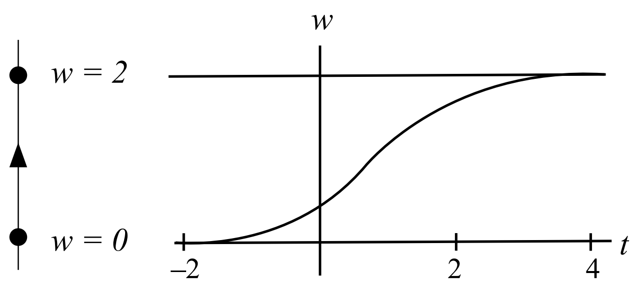
**Figura 10.** Línea de fase de la ecuación diferencial autónoma.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Son y = 2 y, y = k$\pi$ para cualquier entero k. Si queremos esbozar la gráfica de la solución y (t) con el valor inicial y (0) = 0.4. Como y = 0, y y = 2 son puntos de equilibrio de esta ecuación y 0 < 0.4 < 2, sabemos del teorema de existencia y unicidad que 0 < y (t) < 2 para todo t. Además, debido a que (2 – y) sen(y) > 0 para 0 < y < 2, la solución es siempre creciente. Como la velocidad de la solución es pequeña cuando (2 – y) sen(y) es cercana a cero, y puesto que esto sucede solo cerca de puntos de equilibrio sabemos que la solución y(t) crece hacia y = 2 cuando t → ∞. Ver figura 11.

**Figura 11.** Gráfica de una curva solución.

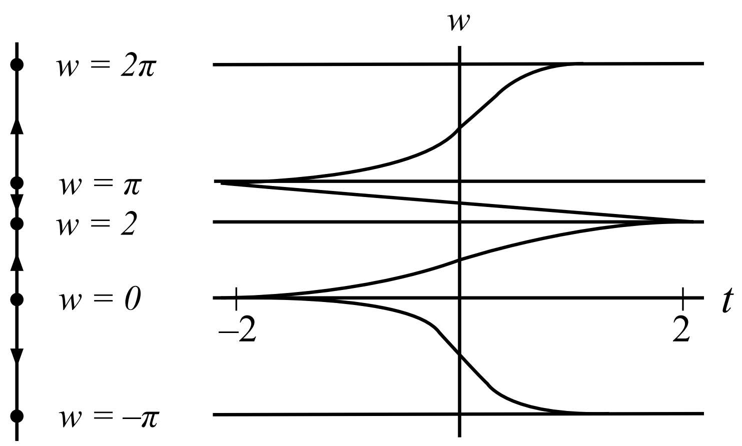



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

De manera similar, si nos movemos hacia atrás, la solución y (y) decrece. Siempre permanece arriba de y = 0 y no puede detenerse, ya que 0 < y < 2. Entonces, cuando t→ −∞, la solución tiende hacia y = 0. Podemos dibujar una imagen cualitativa de la gráfica de la solución con la condición inicial y (0) = 0.4. Ver figura 11.

Del mismo modo, podemos esbozar otras soluciones de equilibrio en el plano t – y a partir de la información dada por la línea de fase. Las soluciones de equilibrio son fáciles de encontrar y dibujar, ya que están marcadas sobre la línea de fase. Los intervalos sobre la línea de fase con flechas señalando hacia arriba pertenecen a las soluciones crecientes, y aquellos cuyas flechas señalan hacia abajo corresponden a las soluciones decrecientes. Las gráficas de las soluciones no se cortan de acuerdo con el teorema de existencia y unicidad. En particular, no pueden cortar las gráficas de las soluciones de equilibrio. Además, las soluciones deben continuar creciendo o decreciendo hasta que se acercan a una solución de equilibrio. Por consiguiente, podemos esbozar muchas soluciones con condiciones iniciales diferentes fácilmente. La única información que no se tiene es qué tan rápido crecen o decrecen.

**Figura 12.** Comportamiento general de las soluciones para la ecuación diferencial autónoma.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Las observaciones dadas en los ejercicios anteriores conducen a algunos enunciados generales que pueden aplicarse a todas las soluciones de las ecuaciones autónomas. Si y (t) es una solución de una ecuación autónoma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

### Entonces:

- Si f (y (0)) = 0, entonces y (0) es un punto de equilibrio y, y (t) = y (0) para todo t.
- Si f (y (0)) > 0, entonces y (0) es creciente para todo t y y (t) $\rightarrow \infty$, cuando t se incrementa, o bien y (t) tiende al primer punto de equilibrio mayor que y (0).
- Si f (y (0)) < 0, entonces y (t) es decreciente para todo t y y(t) $\rightarrow -\infty$, cuando t se incrementa, o bien y(t) tiende al primer punto de equilibrio menor que y(0.)

Cuando t decrece, podemos encontrar resultados similares que también son válidos (el tiempo hacia atrás). Si f (y (0)) > 0, entonces y (t) tiende (en tiempo negativo) a - $\infty$, o al siguiente punto de equilibrio menor. Si f (y (0)) < 0, entonces y (t) tiende (en tiempo negativo) a $+\infty$, o al siguiente punto de equilibrio mayor.

## Ejemplo 6. No todas las soluciones existen todo el tiempo:

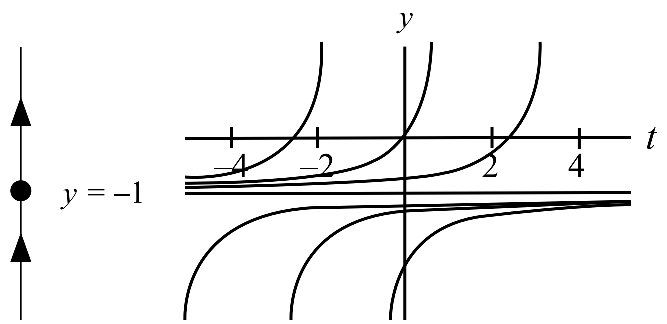
Analizar la ecuación diferencial autónoma:

$$\frac{dy}{dt} = (1+y)^2 \qquad (6)$$

### Solución:

Esta ecuación tiene su punto de equilibrio en y = - 1 y dy / dt > 0 para todo otro valor de y.

**Figura 13.** Comportamiento general de las soluciones para la ecuación diferencial autónoma.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

La línea de fase indica que las soluciones iniciales mayores que -1 crecen para todo t y tienden a $+\infty$ cuando t aumenta.

Si calculamos de forma explícita la solución, determinamos que esas soluciones son de la forma:

$$y(t) = -1 + \frac{1}{t+C}$$

para alguna constante C. Como se supone que y (0) > -1, debemos tener:

$$y(0) = -1 - \frac{1}{C} > -1$$

lo que implica que c < 0. Por lo tanto, esas soluciones están definidas solo para t < - C y tienden a ∞ cuando t → $-C$, por la parte de abajo (ver la figura 13). No podemos decir si las soluciones explotan en un tiempo finito simplemente viendo la línea de fase.

Las soluciones con condiciones iniciales y (0) > - 1 son asintóticas al punto de equilibrio y = -1 cuando t aumenta, por lo que están definidas para todo t > 0. Sin embargo, esas soluciones tienden a $-\infty$ en un tiempo finito cuando t disminuye. Otro ejemplo peligroso es el siguiente.

## Ejemplo 7:

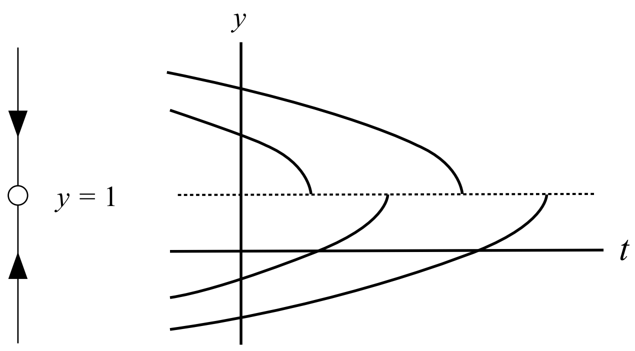
Analizar la ecuación diferencial autónoma:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1-y} \qquad (7)$$

### Solución:

Si y > 1, dy/dt es negativa; y si y < 1, dy/dt es positiva. Si y = 1, dy /dt no existe. La línea de fase tiene un agujero. En y = 1. No hay una manera estándar para denotar tal punto sobre la línea de fase, pero usaremos un pequeño círculo vacío para marcarlos (figura 14).

**Figura 14.** Comportamiento general de las soluciones para la ecuación diferencial autónoma.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Todas las soluciones tienden hacia y = 1 cuando t aumenta. Como el valor de dy/dt es grande si y está cerca de 1, las soluciones se aceleran cuando se acercan a y = 1 y alcanzan dicho valor en un tiempo finito. Una vez que una solución alcanza el valor y = 1, no puede continuar porque ha dejado el dominio de definición de la ecuación diferencial. Ha caído en un agujero situado en la línea de fase.

## Ejemplo 8. Trazado de la línea de fase a partir de información cualitativa:

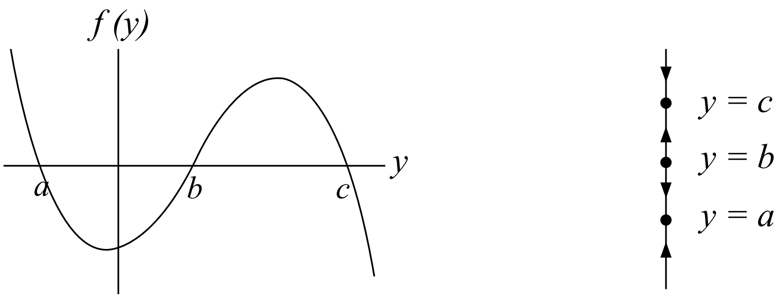
Analizar la ecuación diferencial autónoma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \tag{8}$$

Donde la gráfica de f (y), está dada por la figura 15.

### Solución:

**Figura 15.** Línea de fase trazada a partir de la función f(y).

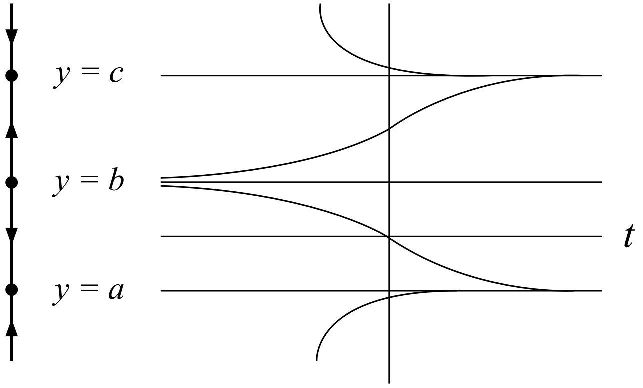



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Para dibujar la línea de fase de la ecuación diferencial dada, tenemos que conocer la posición de los puntos de equilibrio y los intervalos sobre los que las soluciones son crecientes o decrecientes. Es decir, tenemos que saber cuáles son los puntos en que f (y) = 0, los intervalos en donde f (y) > 0 y aquellos en que f (y) < 0. En consecuencia, podemos dibujar la línea de fase para la ecuación diferencial solo con la información cualitativa acerca de la función f (y).

Por ejemplo, suponga que no conocemos una fórmula para f (y), pero que tenemos su gráfica (figura 15). De la gráfica podemos determinar los valores de y para los cuales f (y) = 0 y decidir en qué intervalos f (y) > 0 y f (y) < 0. Con esta información es posible dibujar la línea de fase (ver figura 15) y a partir de ella obtener las gráficas cualitativas de las soluciones (figura 16). Podemos pasar entonces de la información cualitativa de f (y) a las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial dy/dt = f (y), sin escribir una fórmula. Para modelos donde la información disponible es completamente cualitativa, este enfoque es muy apropiado.

**Figura 16.** Comportamiento general de las soluciones de la ecuación diferencial dada.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 9. Un modelo epidémico:

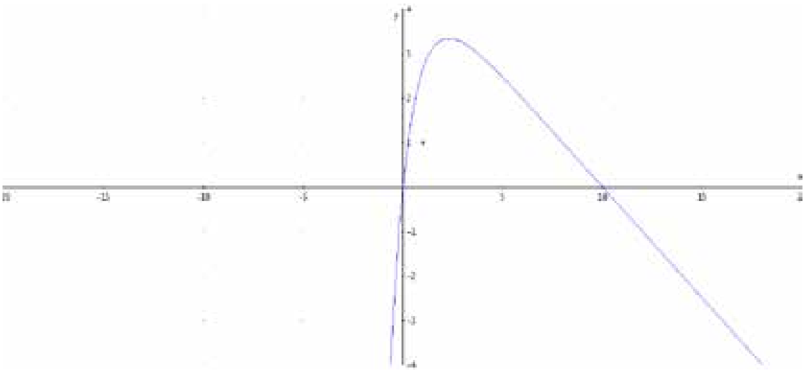
Una ecuación diferencial que ocurre cuando se describen epidemias, donde y representa el número total de personas que han contraído una enfermedad y han sido «removidas» en un tiempo t. Dependiendo de la epidemia, «removido» puede significar aislado, inmune o fallecido; por ejemplo, la ecuación para este modelo viene dada por:

$$y' = 5 - 0.5y - 5e^{-y} \quad \text{Sujeta a y (0) = 0.1} \qquad (9)$$

## Solución:

Esta ecuación diferencial (9) es autónoma y satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad. De manera que tenemos soluciones únicas que nos permite analizar su línea de fase. Primero tracemos la gráfica de f (y) = $5 - 0.5y - 5e^{-y}$ (ver figura 16), pero, ¿qué dominio debería considerarse? Después de observar f(y) vemos que f (0) = 0, lo que nos da una solución de equilibrio, y (t) = 0. ¿Existen otra? Si pensamos en f (t) para valores grandes de y, vemos que el término –5*e*–*y* sería despreciable cuando se compara con los otros dos términos de la expresión general, así, para y muy grande, f (y) $\approx 5 - 0.5y$, lo cual es cero cuando y = 10, de manera que podemos anticiparnos y decir que otra solución de equilibrio aproximadamente es f (t) = 10. Haciendo uso de un método. Para encontrar raíces y resolver f (y) = 0 cerca de 10, encontramos que y ≈ $9.999546$; así que la segunda solución de equilibrio se halla en f (t) ≈ 9.999546.

**Figura 17.** Gráfica de la función f(y) = $5 - 0.5y - 5e^{-y}$.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Además

$$\frac{df}{dy} = -0.5 + 5e^{-y} = -0.5e^{-y}(e^{y} - 10) \qquad (10)$$

De manera que g (y) se incrementa si $e^{y}$ -10 < 0, es decir, para $-\infty < y < \ln 10 \approx 2.3$, y decrece si $e^{y} - 10 > 0$, es decir para $\ln 10 < y < \infty$. Si de nuevo observamos la gráfica de f (y) =, se puede ver que es muy semejante a la gráfica de una parábola, y así tendrá una línea de fase similar a la de la ecuación logística, es decir, la solución de equilibrio y (t) = 0 es inestable (o fuente), mientras que y (t) ≈ 9.999546. Es estable (o sumidero) (ver figura 18).

**Figura 18.** Línea de fase para la ecuación diferencial autónoma dada.


**Fuente.** Elaborada por el autor.

De esta manera sabemos que las soluciones de (9) tendrán la apariencia general de la ecuación logística. Sin embargo, de (9) y (10) sabemos que el punto de inflexión se presenta en y = 2.3, no en la mitad, es decir no en y = 4.99973.

Si intentamos resolver (9) de manera analítica para las soluciones de equilibrio llegamos a:

$$\int \frac{1}{5-0.5y-5e^{-y}}\,dy = t + C$$

Pero la integral no puede ser evaluada en términos de funciones familiares, de modo que no podemos hallar una solución explícita para y. Así que, ¿cómo trazamos la gráfica de la solución a través de (0, 0.1) exactamente?

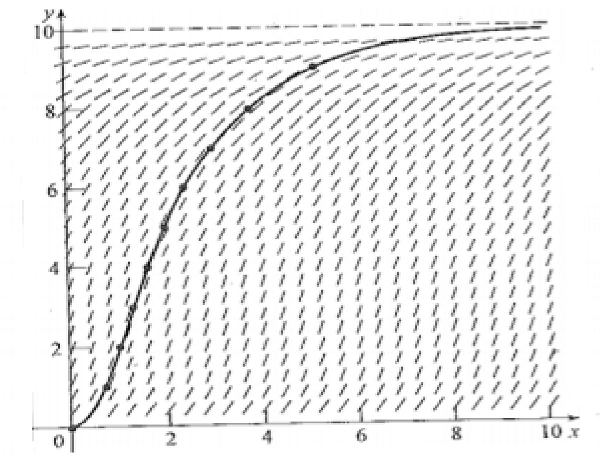
Si empleamos la condición inicial y (0) = 0.1, podemos escribir la solución en la forma:

$$\int_{0.1}^{y} \frac{1}{5-0.5w-5-e^{w}}\,dw = t$$

Esto presenta a t como una función explícita de y para 0 < y < 9.999546. Se puede utilizar una técnica de integración numérica, como por ejemplo la regla de Simpson.

La siguiente figura muestra el campo de pendientes y la solución numérica de (9) restringida a y (0) = 0.1, que está de acuerdo con el análisis de la línea de fase y la ubicación del punto de inflexión.

**Figura 19.** Campo de pendientes con una solución numérica de la ecuación diferencial autónoma.

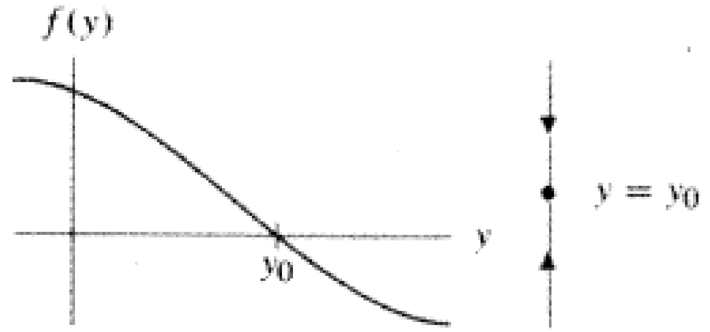



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

De los ejemplos anteriores sabemos que es posible determinar la línea de fase y clasificar los puntos de equilibrio para una ecuación diferencial autónoma dy / dt = f (y), partiendo solo de la gráfica de f (y). Como la clasificación de un punto de equilibrio depende únicamente de la línea de fase cerca del punto de equilibrio, entonces se puede determinar el tipo de punto de equilibrio $y_0$ a partir de la gráfica de f (y) cerca de $y_0$.

Si $y_0$ es un punto estable (o sumidero), entonces las flechas sobre la línea de fase justamente debajo de $y_0$ señalan hacia arriba, y las flechas justo arriba de $y_0$ señalan hacia abajo. Por lo tanto, f (y) debe ser positiva cuando y es menor que $y_0$, y negativa cuando y es mayor que $y_0$.

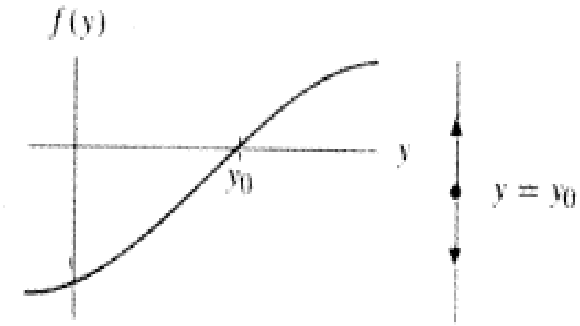
**Figura 20.** Gráfica de un punto de equilibrio estable y su clasificación de acuerdo a la función f(y).




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Entonces f debe estar decreciendo conforme y se aproxima a $y_0$. Inversamente, si f $(y_0)$ = 0 y f está decreciendo para toda y cercana a $y_0$, entonces f (y) es positiva justo a la izquierda de $y_0$ y negativa justamente a la derecha de $y_0$. Por consiguiente, $y_0$ es un punto estable (o sumidero). De manera similar, el punto de equilibrio $y_0$ es un punto inestable (o fuente), si y solo si f está creciendo para todo y cercano a $y_0$.

**Figura 21.** Gráfica de un punto de equilibrio inestable y su clasificación de acuerdo a la función f(y).




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Todo lo anterior se puede analizar con una poderosa herramienta del cálculo, que nos permite dilucidar si una función está creciendo o decreciendo en un punto en particular: la derivada. Usando la derivada de f (y) combinada con las observaciones geométricas anteriores, podemos dar criterios que especifiquen el tipo de punto de equilibrio.

**El teorema de Linealización**

Suponga que $y_0$ es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial dy / dt = f (y) donde f es una función diferenciable continuamente. Entonces:

Si $f'(y_0) < 0$, entonces $y_0$ es un punto estable (o sumidero).

Si $f'(y_0) > 0$, entonces $y_0$ es un punto inestable (o fuente).

Si $f'(y_0) = 0$, o si $f'(y_0)$ no existe, entonces $y_0$ puede ser estable, inestable o semiestable (o nodo).

Para demostrar este teorema, expandimos f (y) en una serie de Taylor alrededor de $y = y_0$ de modo que obtenemos:

$$f(y) \approx f(y_0) + (y - y_0) f'(y_0)$$

Donde $f^{/}(y_0)$ es el valor de la derivada en $y = y_0$. Debido a que $f(y_0) = 0$, entonces se tiene que:

$$f(y) \approx (y - y_0)f^{/}(y_0)$$

- Así cerca de $y_0$ se tiene que $\frac{dy}{dt} = f(y) \approx (y - y_0)f^{/}(y_0)$
- Si $f^{/}(y_0) < 0$, entonces $dy / dt > 0$ si $y < y_0$; y $dy / dt < 0$ si $y > y_0$, para y próximo a $y_0$. Esto caracteriza a $y(t) = y_0$, como estable (sumidero).
- Si $f^{/}(y_0) > 0$, entonces $dy / dt < 0$ si $y < y_0$; y $dy / dt > 0$ si $y > y_0$, para y próximo a $y_0$. Esto caracteriza a $y(t) = y_0$, como inestable (fuente).
- Si $f(y_0) = 0$, entonces de este análisis no podemos caracterizar la solución de equilibrio (o nodo).

Este resultado es particularmente útil si la ecuación diferencial contiene parámetros.

## Ejemplo 10:

Identificar la estabilidad de las soluciones de equilibrio correspondiente a la ecuación diferencial autónoma $dy/dt = y(a - y)$, donde a es una constante.

### Solución:

Tenemos que $f(y) = y(a - y) = ay - y^2$ y las soluciones de equilibrio son $y(t) = 0$ y $y(t) = a$. Como $f^{/}(y) = a - 2y$; encontramos $f^{/}(0) = a$, y $f^{/}(a) = -a$. Así, si $a < 0$ la solución de equilibrio $y(t) = 0$, mientras que la solución de equilibrio $f(t) = a$ es inestable. Si $a > 0$, la solución de equilibrio $f(t) = 0$ es inestable, mientras que la solución de equilibrio $f(t) = a$ es estable. Si $a = o$, entonces $f^{/}(0) = 0$, y la prueba no nos proporciona conclusión alguna (de hecho, en este caso la solución de equilibrio es semiestable).

El teorema anterior se aborda con las soluciones de equilibrio. ¿Qué podemos decir acerca de las soluciones de no equilibrio? Si examinamos todas las ecuaciones autónomas que hemos discutido en este capítulo, vemos que sus soluciones son ya sea de equilibrio y monótonas: no hay soluciones oscilantes. Este hecho es verdadero en general, de acuerdo al siguiente teorema, cuya demostración no haremos.

**Teorema**

Las soluciones de no equilibrio de $y' = f(y)$ son monótonas si $f(y)$ es continua.

Una consecuencia de este teorema es que las soluciones de las ecuaciones autónomas no pueden oscilar, de manera que carece de sentido describir el comportamiento periódico con una ecuación diferencial autónoma.

Como una aplicación de los conceptos y teoremas vistos en este capítulo, analizaremos una modificación del modelo logístico de población

## Ejemplo 11. Modelo logístico modificado:

La ardilla negra es un pequeño mamífero de las montañas rocallosas. Estas ardillas son muy territoriales, por lo que su población es grande, y en este caso su razón de crecimiento decrece y puede llegar a ser negativa. Por otra parte, si la población es demasiado pequeña, los adultos fértiles corren el riesgo de no ser capaces de encontrar parejas adecuadas, y la tasa de crecimiento es nuevamente negativa.

## Solución:

El modelo

Podemos enunciar las hipótesis de este modelo:

- Si la población es muy grande, la razón de crecimiento es negativa.
- Si la población es muy pequeña, la razón de crecimiento es negativa.

La población decrece entonces solo si está entre «demasiado grande» y «demasiado pequeña». Además, es razonable suponer que, si la población es cero, se quedará en cero. Entonces, también es posible que:

- Si la población es cero, la razón de crecimiento es cero.

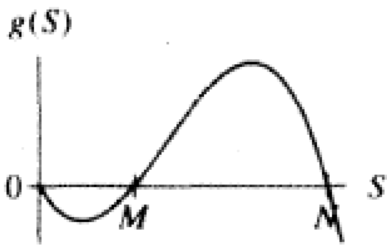
Sea:

- t = tiempo (variable independiente)
- S (t) = población de ardillas en el tiempo t (variable dependiente)
- K = coeficiente de razón de crecimiento (parámetro)
- N = Capacidad de soporte (parámetro), y
- M = constante de «escasez» (parámetro)

La capacidad de soporte N indica que la población es «demasiado grande» y el parámetro de escasez M señala qué población es «muy pequeña».

Se quiere un modelo de la forma dS / dt = g (S) que se ajuste a las hipótesis. Podemos pensar en las hipótesis como determinantes de la forma de la gráfica de g (S), en partículas donde g (S) es positiva y donde es negativa. Observe que dS / dt = g (S) < 0 si S > N, ya que la población decrece cuando se eleva la tasa de crecimiento. También, g(S) < 0 cuando S < M, porque la población decrece si no hay incremento. Finalmente, g (S) > 0 cuando M < S < N y g (0) = 0. Es decir, queremos que g (S) tengan una gráfica como el de la figura 22.

**Figura 22.** Gráfica de la función G(S).




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

La gráfica de g para P > 0 no es importante, porque un número negativo de ardillas no tiene sentido.

El modelo logístico dará un comportamiento «correcto» para poblaciones cercanas a la capacidad de soporte, pero para las poblaciones pequeñas (debajo del nivel M de «escasez»), las soluciones del modelo logístico no concuerdan con las hipótesis. Por consiguiente, tenemos que modificar el modelo logístico a fin de incluir el comportamiento de las poblaciones pequeñas y el parámetro M. Un modelo inicial sería de la forma:

$$\frac{dS}{dt} = g(S) = kS\left(1 - \frac{S}{N}\right)(algo)$$

El término «algo» debe ser positivo si S > M, y negativo si S < M. La expresión más simple que satisface esas condiciones es:

$$\text{«algo»} = \left(\frac{S}{M} - 1\right)$$

Luego el modelo es:

$$\frac{dS}{dt} = g(S) = kS\left(1 - \frac{S}{N}\right)\left(\frac{S}{M} - 1\right)$$

Este es el modelo logístico con el término adicional:

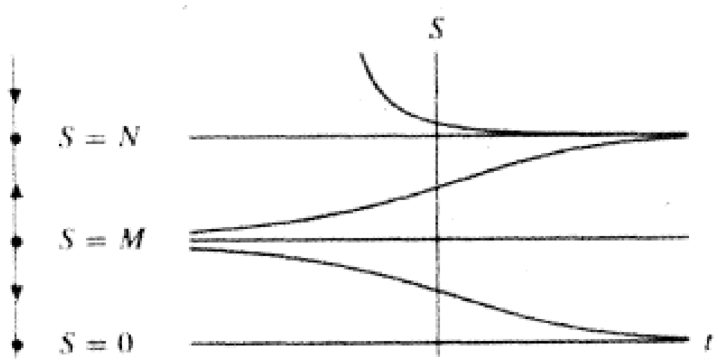
$$\left(\frac{S}{M} - 1\right)$$

A este modelo es al que llamamos modelo logístico modificado de población. La ecuación diferencial es:

$$\frac{dS}{dt} = g(S) = kS\left(1 - \frac{S}{N}\right)\left(\frac{S}{M} - 1\right)$$

Con 0 < M < N y k > o. Hay tres puntos de equilibrio: S = 0, S = M y S = N. Si 0 < P < M, tenemos que g (S) < 0, por lo que las soluciones con condiciones iniciales entre 0 y M decrecen. Asimismo, si S > N, entonces g (P) < 0, y por lo tanto las soluciones con condiciones iniciales mayores que N también disminuyen. Para M < S < N, sabemos que g (S) > 0. En consecuencia, cuando la condición inicial está entre M y N se incrementa la solución. Nuestra conclusión es que los equilibrios en 0 y N son estables (sumideros) y el punto de equilibrio en M es inestable (o fuente). La línea de fase y las gráficas de las soluciones típicas se muestran en la figura 23.

**Figura 23.** Gráfica del comportamiento de las soluciones alrededor de los puntos de equilibrio.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

# 3.2 Ejercicios

En los siguientes ejercicios esboce las líneas de fase para la ecuación diferencial dada. Identifique los puntos de equilibrio como estables (sumidero), inestables (fuente), semiestables (nodo).

| | |
|---|---|
| 1. $1.\frac{dy}{dt} = 3y(1-y)$ | 2. $\frac{dy}{dt} = y^2 - 6y - 16$ |
| 3. $\frac{dy}{dt} = cosy$ | 4. $\frac{dy}{dt} = ycosy$ |
| 5. $\frac{dy}{dt} = (y-2)seny$ | 6. $\frac{dy}{dt} = y^2 + y + 10$ |
| 7. $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y-2}$ | 8. $\frac{dy}{dt} = tany$ |
| 9. $\frac{dy}{dt} = y(y-1)$ | 10. $\frac{dy}{dt} = y + y^3$ |
| 11. $\frac{dy}{dt} = (y-1)(y-2)^2$ | 12. $\frac{dy}{dt} = (y^2-1)(y^2-3)$ |

En los siguientes ejercicios se da una ecuación diferencial y se especifican varias condiciones iniciales. Esboce las gráficas de las soluciones que satisfacen a esas condiciones iniciales. En cada ejercicio, coloque todas sus gráficas sobre un par de ejes.

13. Ecuación del ejercicio 1; y (0) = 1, y (2) = -1, y (0) = ½, y (0) = 2.

14. Ecuación del ejercicio 2; y (0) = 1, y (1) = 0, y (0) = - 10, y (0) = 5.

15. Ecuación del ejercicio 3; y (0) = 0, y (-1) = 0, y (-1) = 1, y (0) = $\frac{\pi}{2}$, y (0) = $\pi$

16. Ecuación del ejercicio 4; y (0) = 0, y (3) = 1, y (0) = 2 y (0) = - 1.

17. Ecuación del ejercicio 5; y (0) = 1, y (0) = 7 / 4 y (0) = -1, y ( 0 ) = 3.

18. Ecuación diferencial del ejercicio 6; y (0) = 0, y (1) = 3, y (0) = 2.

19. Ecuación diferencial del ejercicio 7; y (0) = 0, y (1/2) = 1, y (0) = 2.

En los siguientes ejercicios, describa el comportamiento a largo plazo de la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 4y + 2$$

Con la condición inicial dada:

20. y (0) = 0 21. y (0) = 1

22. y (0) = - 1 23. y (0) = -10

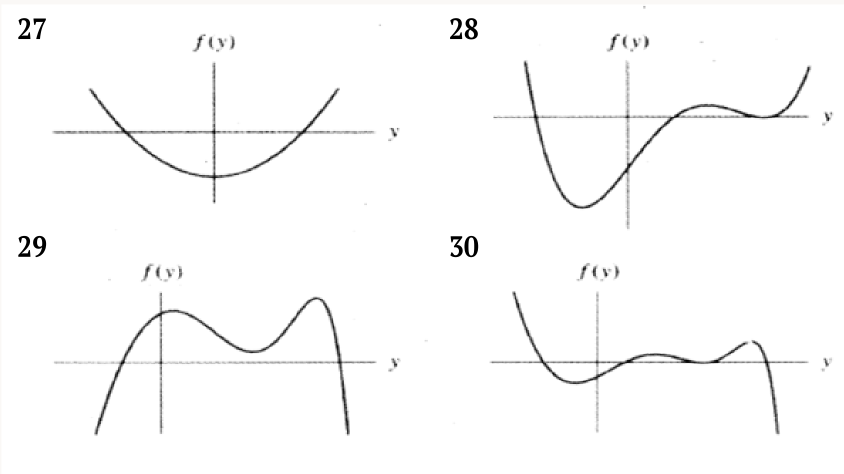
24. y (0) = 10 25. Y (3) = 1

26. Considere la ecuación autónoma dy / dt = f (y). Suponga que sabemos que f (-1) = f (2) = 0.

a. Escriba todos los posibles comportamientos de la solución y (t) que satisface la condición inicial y (0) = 1. b. Suponga también que f (y) > 0 para – 1 < y < 2. Describa todos los posibles comportamientos de la solución y (t) que satisface la condición inicial y (0) = 1.

En los ejercicios siguientes, encontrará la gráfica de una función f (y). Esboce la línea de fase para la ecuación diferencial autónoma dy / dt = f (y).

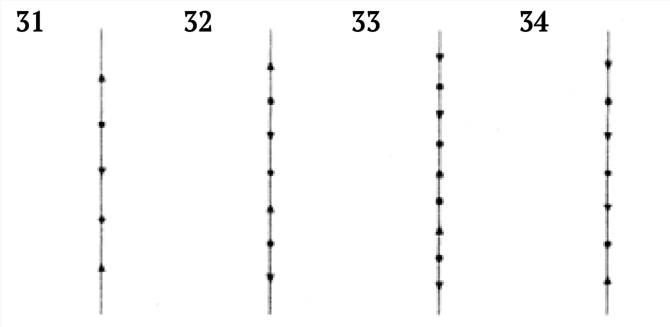
**Figura 24.** Gráficas de las funciones f(y) para las ecuaciones diferenciales autónomas.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

En los ejercicios siguientes se muestra una línea de fase para una ecuación diferencial autónoma dy / dt = f (y). Haga un bosquejo de la gráfica de la función correspondiente f (y). (Suponga que y = 0 está en la mitad del segmento mostrado en cada caso).

**Figura 25.** Líneas de fase para el comportamiento de ciertas ecuaciones diferenciales autónomas.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

35. Suponga que desea modelar una población con una ecuación diferencial de la forma dP /dt = f (P), donde P (t) es la población inicial en el tiempo t. Se han efectuado experimentos que dan la información siguiente:

- Los únicos puntos de equilibrio en la población son P = 0, P = 10 y P = 50.
- Si la población es 100, la población crece.
- Si la población es 25, la población aumenta.
    a) Esboce las posibles líneas de fase para este sistema si P > 0 (hay dos).
    b) Haga un croquis aproximado de las correspondientes funciones f (P) para cada una de las líneas de fase.
    c) Dé una fórmula para la funciones f (P) cuyas gráficas concuerdan cualitativamente con el enciso b, para cada una de sus líneas de fase.

36. Suponga que la información experimental en el ejercicio 31 cambia a:

- La población P = 0 permanece constante.
- Una población cercana a 0 disminuirá.
- Una población de P = 20 aumentará.
- Una población de P > 100 decrecerá.
  a) Esboce la línea de fase más simple posible que concuerda con la información experimental anterior.
  b) Haga un bosquejo de la función f (P) para la línea de fase del enciso a.
  c) ¿Qué otras líneas de fase son posibles?

37. Sea f (y) una función continua.
  a. Suponga que f (-10) > 0 y f (0) < 0. Demuestre que hay un punto de equilibrio para dy /dt = f (y) entre y = - 10 y y = 10.
  b. Considere que f (-10) > 0, que f (0) < 0 y que hay muchos puntos de equilibrio finitos entre y = -10, y y = 10. Si y = 1 es una fuente, demuestre que dy / dt = f (y) debe tener por lo menos dos sumideros entre y =-10 y y =10 ¿puede decir dónde están localizados?

38. Digamos que dy / dt tiene un punto de equilibrio en y = y 0, y
  a) $f^{/} (y_0) = 0$, $f^{//} (y_0) = 0$, y $f^{///}(y_0) > 0$:
     ¿es y0 una fuente, un sumidero o un nodo?
  b) $f^{/} (y_0) = 0$, $f^{//} (y_0) = 0$, y $f^{///}(y_0) < 0$:
     ¿es $y_0$ una fuente, un sumidero o un nodo?
  c) $f^{/} (y_0) = 0$, $f^{//} (y_0) = 0$,
     ¿es $y_0$ una fuente, un sumidero o un nodo?

39. a) Esboce la línea de fase para la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(y-2)(y+1)}$$

Y analice el comportamiento de la solución con condición inicial y (0) = ½.

b) Aplique procedimientos analíticos al problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(y-2)(y+1)}, \qquad y(0) = ½$$

40. La ecuación de Gompertz. Recordemos que la ecuación de Gompertz es de la forma $y' = -k\, y \ln(y/b)$, donde k y b son constantes positivas. Aplique el análisis de las líneas de fase para esbozar las curvas solución de la ecuación. ¿Qué otra ecuación diferencial tiene curvas solución con algunas de estas propiedades?

41. Sobre el mismo plano dibuje las funciones y (2 –y) y sen $\left(\frac{\pi}{2}y\right)$ como funciones de y para $0 \le y \le 2$. ¿Qué sugiere esto acerca de las soluciones de $y' = y(2-y)$ y de $y' = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)$ con y (0) = $y_0$, con y (0) = $y_0$, donde $0 < y_0 < 2$? ¿Qué pasa si $y_0 > 2$?

42. Pichones pasajeros. Durante el siglo XIX, había una población de pichones pasajeros en Estados Unidos. A fin de reproducirse con éxito, tenía que haber un gran número de pichones presentes. La reproducción exitosa rara vez ocurre en poblaciones reducidas. En la última parte del siglo, los pichones pasajeros fueron cazados con más saña que en el pasado, y en 30 años se extinguieron. Se ha sugerido que la población P (t), de pichones pasajeros, como una función de tiempo, t, podría describirse mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = aP(P - b)(c - P)$$

Donde a, b y c son constantes positivas, y además b < c. Sin resolver esta ecuación diferencial, pero trazando la familia de soluciones después de emplear un análisis de la línea de fase, decida si este es un modelo razonable. Si lo es, ¿cuáles son las interpretaciones físicas de b y c?

43. Considere la ecuación diferencial $y' = \cos y$.

a) ¿Tiene alguna de las curvas solución puntos de inflexión? Si es así, ¿Dónde se encuentran?, si no, ¿por qué?
b) Enumere todas las soluciones de equilibrio y con un análisis de línea de fase defina el comportamiento cualitativo de la solución de esta ecuación diferencial sujeta a $y(0) = y_0$. ¿Qué le ocurre a la solución a medida que $t \to \infty$? [Sugerencia: puede ser importante examinar el campo de pendientes y trazar soluciones a través de los puntos siguientes: $(0, -2)$, $(0, 0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$].
c) Encuentre la solución explícita del problema de valor inicial del enciso b. De esta solución, ¿puede decir qué pasa con la solución a medida que $t \to \infty$?

44. Considere la ecuación diferencial:

$$y' = (y - a)(y - b)(y - c)$$

a) ¿Se aplica el teorema de existencia y unicidad a esta ecuación?
b) Confirme que $y(t) = a$, $y(t) = b$, y que $y(t) = c$ son las soluciones de equilibrio de dicha ecuación.

c) Dibuje la línea de fase para cada uno de los casos siguientes. En cada caso identifique si las soluciones de equilibrio son estables, inestables o semiestable.
   i) $a = b = c = 1$.
   ii) $a = b = 1$, $c = -1$.
   iii) $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$
d) Basado en la información que se obtuvo en el inciso c, describa cualitativamente el comportamiento de las soluciones en cada uno de los tres casos del inciso c. ¿Son sus descripciones consistentes con el enciso a, en particular por lo que se refiere a las soluciones que se intersecan?
e) Utilice un programa de computadora o de calculadora para trazar varias curvas solución para cada uno de los casos del inciso c. Asegúrese de que los resultados concuerden con las respuestas del inciso d.

45. En cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, explique la variación del comportamiento de la solución con el valor de la constante a. ¿Existen valores de a para los cuales este comportamiento cambie drásticamente? (No intente resolver estas ecuaciones).

a. $y' = a - y^2$ b. $y' = y(a - y^2)$

46. Ecuaciones diferenciales cualitativamente equivalentes. Dos ecuaciones diferenciales autónomas son cualitativamente equivalentes si tienen esencialmente la misma línea de fase; es decir, el mismo número de puntos de equilibrio, el mismo tipo de estabilidad en cada uno de esos puntos en el mismo orden. Si dos ecuaciones diferenciales autónomas son cualitativamente equivalentes, ¿se comportarán sus soluciones de manera

semejante (crecientes, decrecientes, concavidad hacia arriba, concavidad hacia abajo, asíntotas)? ¿Por qué? ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son cualitativamente equivalentes? No intente resolver ninguna de ellas.

| | |
|---|---|
| a. $y^{/} = e^{y}$ | b. $y^{/} = y$ |
| c. $y^{/} = 1 - y^{2}$ | d. $y^{/} = y\ (1 - y^{2})$ |
| e. $y^{/} = 1 - y^{4}$ | f. $y^{/} = y\ e^{y}$ |
| g. $y^{/} = 1 + y^{2}$ | h. $y^{/} = (1 - y)(2 - y)(3 - y)$ |
| i. $y^{/} = \cosh y$ | j. $y^{/} = y^{3}$ |
| k. $y^{/} = -y \ln y$ | l. $y^{/} = \text{sen } y$ |

Para los ejercicios 47 al 56, grafique la línea de fase unidimensional. A partir de ella determine todos los puntos de equilibrio y su estabilidad.

47. $\frac{dy}{dx} = y(y-1)$

48. $\frac{dy}{dx} = y(y-1)^2$

49. $\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)^2$

50. $\frac{dy}{dx} = (y^2-1)(y^2-3)$

51. $\frac{dy}{dx} = seny.$

52. $\frac{dy}{dx} = tany$

53. $\frac{dy}{dx} = x^2+1$

54. $\frac{dy}{dx} = \ -x^2$

55. $\frac{dy}{dx} = -x^3$

56. $\frac{dy}{dx} = (x-3)^4$

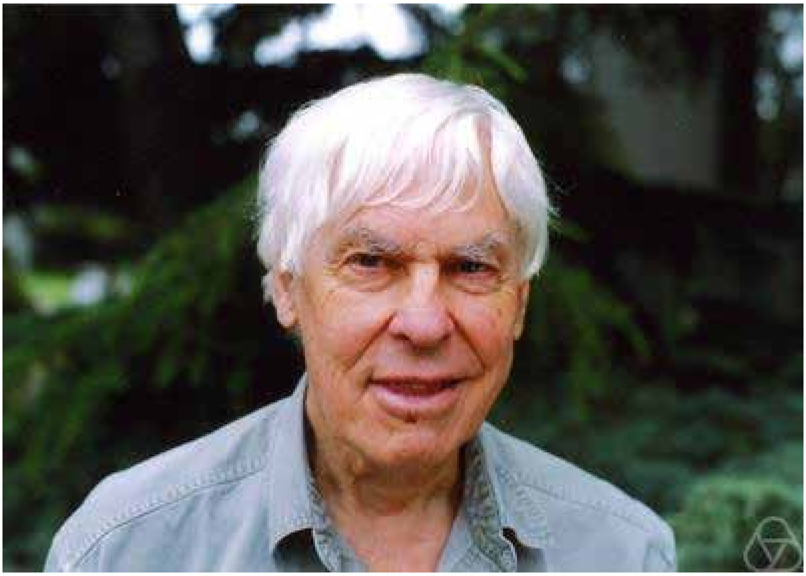
En los ejercicios 57 y 58, determine la estabilidad usando la línea de fase unidimensional.

57. $\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3)$

58. $\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3)(y-4)$

# 3.3 Diagramas de bifurcación

**Figura 26.** Stephen Smale (1930).



**Fuente.** Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual Universidad EAN).

Nació el 15 de julio de 1930 en Flint, Estados Unidos. Es uno de los fundadores de la teoría moderna de los sistemas dinámicos. A mediados de la década de los 70, Smale comenzó a proponer un enfoque más cualitativo del estudio de las ecuaciones diferenciales, tal como se plantea en este texto. Mediante este enfoque, fue de los primeros matemáticos en encontrar y analizar un sistema dinámico «caótico». Desde este descubrimiento, los científicos han encontrado que muchos sistemas físicos importantes exhiben caos.

Las investigaciones de Smale abarcan muchas disciplinas, incluyendo la economía, la ciencia teórica de las computadoras, la Biología Matemática, así como muchas otras áreas de las matemáticas. En

1966 le fue otorgada la medalla Fields de matemáticas, el equivalente del premio Nobel para matemáticas. Después de retirarse de la Universidad de California en Berkeley, en 1955, tomó el puesto de profesor investigador en la Universidad de Hong Kong, donde actualmente imparte cátedra.

En muchos de los modelos, una característica es la presencia de parámetros junto con las otras variables implicadas. Los parámetros son cantidades que no dependen del tiempo (la variable independiente) pero que se asumen diferentes valores de acuerdo con los aspectos específicos de la aplicación considerada. Por ejemplo, el modelo de crecimiento exponencial para poblaciones:

$$\frac{dP\ (t)}{dt} = k.P\ (t)$$

contiene el parámetro k, que es la constante de proporcionalidad para la razón de crecimiento dP /dt versus la población total P (t). Una de las hipótesis subyacentes de este modelo es que la razón de crecimiento dP / dt es múltiplo constante de la población total. Sin embargo, cuando lo aplicamos a especies diferentes, esperamos emplear diferentes valores para las constantes de proporcionalidad. Por ejemplo, el valor de k utilizado para los conejos sería considerablemente mayor que el valor para seres humanos.

En esta sección estudiaremos cómo cambian las soluciones de una ecuación diferencial cuando un parámetro cambia. Estudiaremos ecuaciones autónomas con un parámetro. Encontraremos que una variación mínima en el parámetro usualmente da como resultado una pequeña modificación en la naturaleza de las soluciones. Sin embargo, en ocasiones el nuevo valor puede conducir a un cambio drástico en el comportamiento a largo plazo de las soluciones. A esto se le llama una bifurcación. Una ecuación diferencial que depende de un parámetro se bifurca cuando hay una variación cualitativa en el comportamiento de las soluciones a partir de una modificación en el parámetro.

En resumen, el comportamiento de la solución de una ecuación diferencial que contiene un parámetro puede variar en forma drástica dependiendo del valor del parámetro.

Otro ejemplo de una ecuación autónoma que depende de un parámetro es:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 2y + c$$

El parámetro es c. La variable independiente es t y la variables dependiente es y.

Observe que esta ecuación realmente representa un número infinito de ecuaciones, una para cada valor de c. El valor de c es una constante en cada ecuación, pero cada uno de estos valores condice a ecuaciones diferenciales distintas, y por lo tanto, cada uno de ellos conduce a diferentes soluciones. Debido a sus papeles diferentes en las ecuaciones diferenciales, usaremos una notación que distingue la dependencia del lado derecho respecto a y a c. escribimos:

$$fc\,(y) = y^2 - 2y + c$$

El parámetro c aparece como subíndice y la variable dependiente y es el argumento de la función fc. Si queremos especificar un valor de c, digamos c = 2, entonces escribimos:

$$f_2\,(y) = y^2 - 2y + 2$$

Usaremos esta notación en general. Una función de la variable dependiente y, que también depende de un parámetro c, se denota por $f_c$ (y).

La ecuación diferencial correspondiente con variable dependiente y y parámetro c es:

$$\frac{dy}{dt} = f_c(y)$$

Llamamos a esta forma una familia uniparamétrica de ecuaciones diferenciales, ya que en realidad es una familia de ecuaciones diferenciales, una por cada valor del parámetro c.

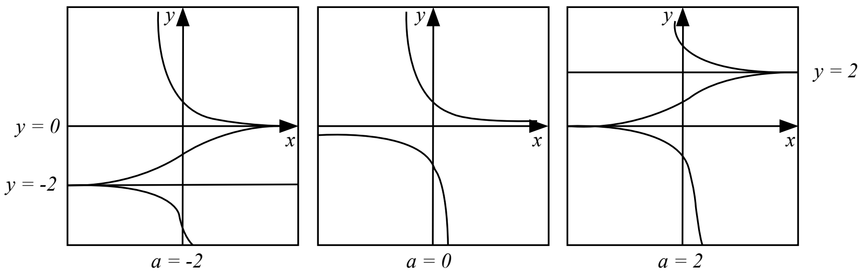
## Ejemplo 11. La ecuación logística.

Consideremos la ecuación logística uniparamétrica:

$$y' = f_a(y) = y(a - y)$$

Donde el parámetro a puede ser cualquier número real: negativo, cero o positivo. La figura 27 muestra las soluciones típicas correspondientes para: a = -2, a = 0 y a = 2.

**Figura 27.** Gráficas del comportamiento de curvas solución para fc a medida que varía c.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

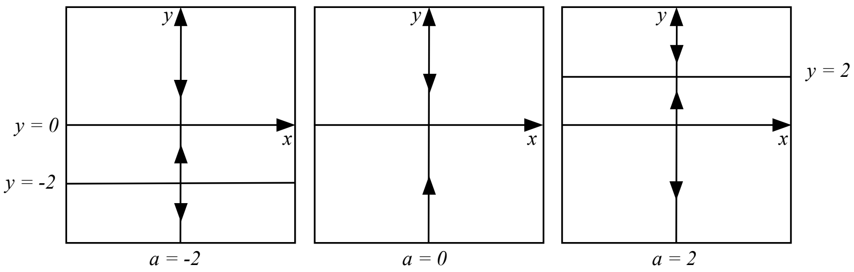
Analizar la ecuación.

## Solución:

Se observa que a medida que crece a, de negativo a positivo pasando por cero, la solución de equilibrio y (x) = a se eleva gradualmente. Nótese que si a < 0, la solución de equilibrio y (x) = 0 es estable (sumidero), mientras que la solución de equilibrio y (x) = a es inestable (fuente). Si a = 0, existe solamente una solución de equilibrio, a saber y (x) = 0, y es semiestable (nodo). Si a > 0 la solución de equilibrio y (x) = 0 es inestable (fuente), mientras que la solución de equilibrio y (x) = a es estable (sumidero). De este modo, el comportamiento de la solución cambia para a = 0.

Si en la figura 27 agregamos flechas a lo largo de los ejes verticales para producir una línea de fase para cada uno de estos tres casos, obtenemos la figura 28.

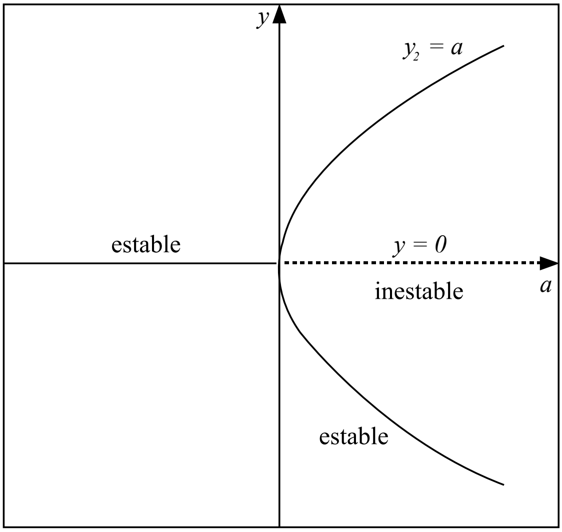
**Figura 28.** Líneas de fase para los tres casos anteriores.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Imagine que fuéramos a repetir este proceso para muchos valores diferentes de a. Hemos observado que a medida que a se incrementa de valores negativos a 0, las dos soluciones de equilibrio se aproximan más entre sí hasta que coinciden cuando a = 0. Entonces, a medida que se ha incrementado aún más, las soluciones de equilibrio se empiezan a separar. De esta manera, si trazamos la gráfica de y contra a, obtenemos la figura 29, denominada diagrama de bifurcación de $y' = y(a - y)$.

**Figura 29.** Diagrama de bifurcación para y´= y(a – y).

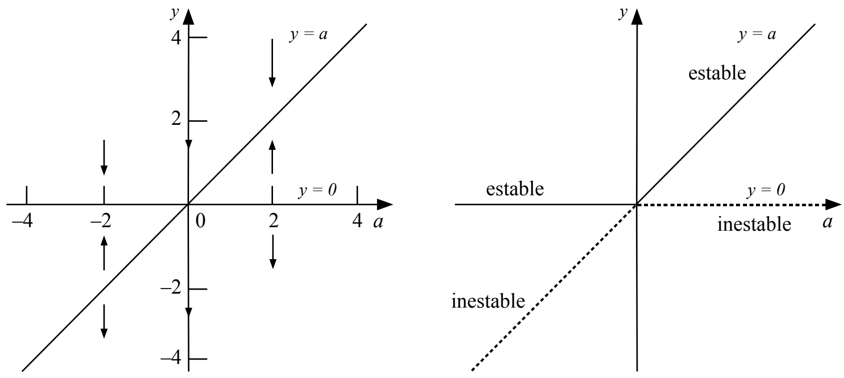



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Examinemos este diagrama de bifurcación para comprender lo que representa. Nos encontramos en a = 2. Si para una x particular el valor de y es positivo, entonces a medida que x aumenta, la solución y (x) se aproxima a la solución de equilibrio y (x) = 0. Esto es lo que representa la flecha que apunta hacia abajo, y que se encuentra sobre el punto a = -2, y = 0, en la figura 28. Del mismo modo, si a= 2 y y < -2, entonces y (x) $\rightarrow -\infty$ a medida que x aumenta. Si a = -2 y -2 < y < 0, entonces y (x) $\rightarrow 0$ a medida que se incrementa. Si y (x) = 0 o y (x) = -2, entonces y (x) permanece en y (x) = 0 o y (x) = -2 a medida que x aumenta (las soluciones de equilibrio). Así, con a = -2, la solución de equilibrio y (x) = 0 es estable y la solución de equilibrio y (x) = - 2 es inestable. Sin embargo, si a > 0 los papeles de estas soluciones de equilibrio se invierten. Si indicamos las soluciones de equilibrio estable por una línea sólida y las soluciones de equilibrio no estables por medio de una línea punteada, podemos eliminar las flechas de la figura 28 y proceder a dibujar la figura 29 otra forma del diagrama de bifurcación.

Ahora veamos una manera más fácil de construir el diagrama de bifurcación de la ecuación diferencial $y' = y(a - y)$. En el plano $a - y$ trazamos la gráfica de $y(a - y) = 0$; es decir, las dos líneas $y = 0$ y, $y = a$. Esto nos proporciona el diagrama de la figura 30, Todo lo que necesitamos hacer es identificar si las soluciones de equilibrio son estables o inestables. Aquí podemos usar la prueba de la derivada o el teorema de la Linealización para las soluciones de equilibrio estable o inestable.

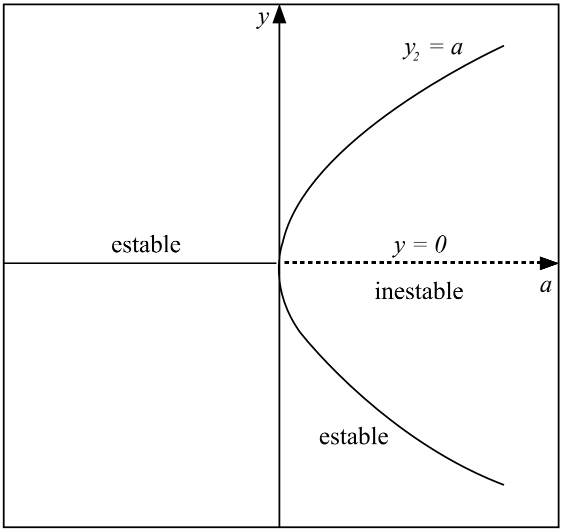
**Figura 30.** Clasificación de las regiones de estabilidad para la ecuación diferencial autónoma dada.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

El diagrama de bifurcación para $y' = y(a - y)$ se muestra en la figura 31. A este diagrama se le conoce como diagrama de bifurcación de horquilla.

**Figura 31.** Gráfica de un diagrama de bifurcación en horquilla.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 12. Consideremos ahora la familia uniparamétrica:

$$\frac{dy}{dt} = f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu$$

Para cada valor de c, vamos a dibujar su línea de fase y analizarla usando los procedimientos vistos en la sección previa. Comencemos por analizar las ecuaciones de esta familia que se obtienen con selecciones particulares de $\boldsymbol{\mu}$.

### Solución:

Como no conocemos aún los valores más interesantes de c, se escoge para empezar valores enteros, digamos $\boldsymbol{\mu} = -4$, $\boldsymbol{\mu} = -2$, $\boldsymbol{\mu} = 0$, $\boldsymbol{\mu} = 2$ y $\boldsymbol{\mu} = 4$. Esto nos da cinco ecuaciones diferenciales autónomas diferentes con cinco líneas de fase diferentes. Una de estas es:

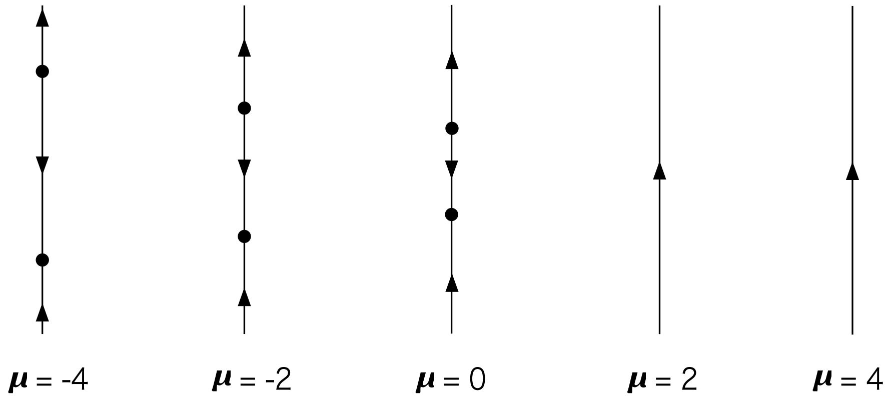
$$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = f_2(y) = y^2 - 2y - 2}$$

Esta ecuación diferencial tiene puntos de equilibrio en valores de y para los cuales:

$$\frac{dy}{dt} = f_2(y) = y^2 - 2y - 2 = 0$$

Los puntos de equilibrio son y = 1 - $\sqrt{3}$ y, y =1 + $\sqrt{3}$. Entre ambos valores la función $f_{-2}$ es negativa, por arriba y debajo de ellos f-2 es positiva. Por lo tanto y = 1 - $\sqrt{3}$ es un punto estable (sumidero) y, y = 1 + $\sqrt{3}$ es un punto inestable (fuente). Con esta información podemos graficar la línea de fase. Para los otros valores de $\mu$ procedemos de manera similar y dibujamos las líneas de fase como se muestran en la figura 32.

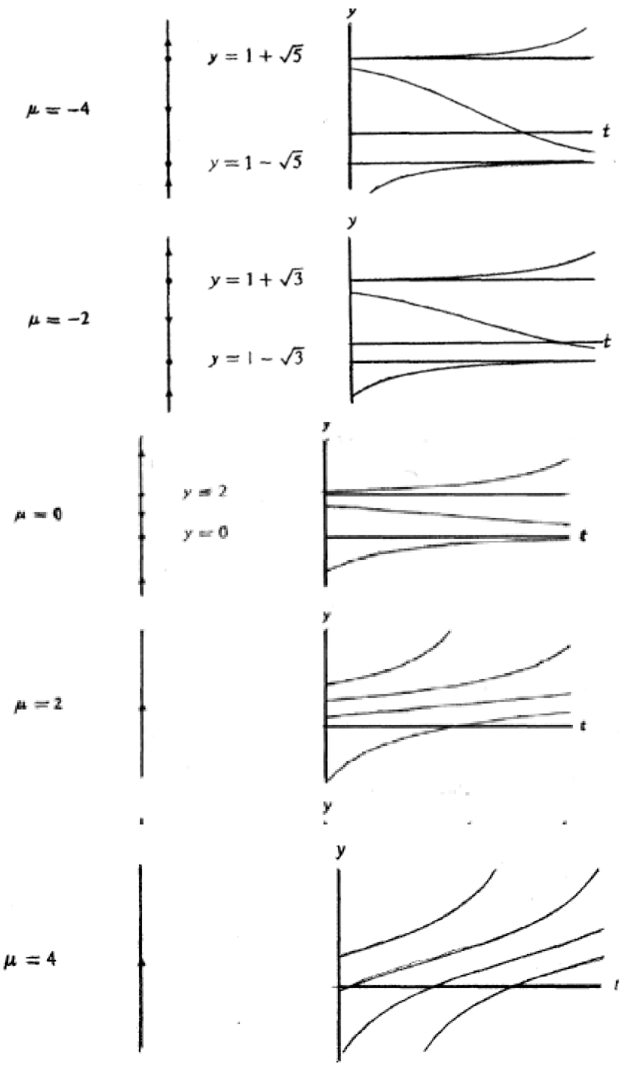
**Figura 32.** Líneas de fase para diferentes valores del parámetro.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Cada una de las líneas de fase es algo diferente de las otras. Sin embargo, la descripción básica para $\mu$ = -4, $\mu$ = -2 y $\mu$ = 0 es la misma: hay exactamente dos puntos de equilibrio; el menor es un punto estable (sumidero) y el mayor es un punto inestable (fuente). Aunque la posición exacta de estos puntos cambia cuando t se incrementa, su posición relativa y tipo no cambia. Las soluciones de esas ecuaciones con grandes valores iniciales explotan en un tiempo finito, conforme t aumenta y tienden a un punto de equilibrio cuando t decrece. Las soluciones con condiciones iniciales muy negativas se aproximan a un punto de equilibrio cuando t crece, y a - ∞ cuando t decrece. Y aquellas soluciones que poseen valores iniciales entre los puntos de equilibrio, tienden al menor punto de equilibrio cuando t crece y al mayor cuando t decrece.

**Figura 33.** Comportamiento de las soluciones de acuerdo a varios valores del parámetro.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Si $\mu$ = 2 y $\mu$ = 4, tenemos algo muy diferente. Aquí no hay puntos de equilibrio. Todas las soluciones tienden a + ∞ cuando t crece y a - ∞ cuando t decrece. Como hay un cambio importante en la naturaleza de las soluciones, decimos que ha ocurrido una bifurcación en alguna parte entre $\mu$ = 0 y $\mu$ = 2.

Para investigar la naturaleza de esta bifurcación, dibujamos las gráficas de fc para los valores de $\mu$ anteriores (Vea la figura 31). Para $\mu$ = - 4,- 2 y 0, fu tiene dos raíces, pero para $\mu$ = 2 y 4, la gráfica de $f_c$ (y) no cruza al eje y. En alguna parte entre $\mu$ = 0 y $\mu$ = 2, la gráfica de $f_c$ (y) debe ser tangente al eje y.

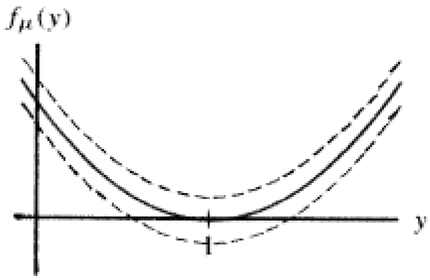
Observemos que las raíces de la ecuación cuadrática:

$$y^2 - 2y + \mu = 0$$

Son y = 1 $\pm \sqrt{1-\mu}$, si $\mu$ < 1, esta ecuación cuadrática tiene dos raíces reales; si $\mu$ = 1, tiene una sola raíz y si $\mu$ > 1, no posee raíces reales. Las ecuaciones diferenciales correspondientes cuentan con dos puntos de equilibrio si $\mu$ < 1, un punto de equilibrio si $\mu$ = 1 y ningún punto de equilibrio si $\mu$ > 1. Por consiguiente, la naturaleza cualitativa de las líneas de fase cambia cuando $\mu$ = 1. Se dice entonces que ocurre una bifurcación en $\mu$ = 1 y que este valor es un valor de bifurcación.

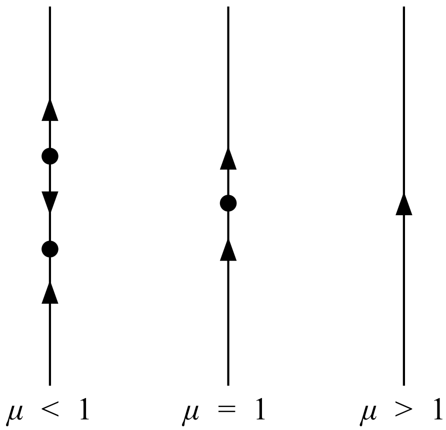
Las gráficas de $f_1$ (y) y la línea de fase para dy/dt = $f_1$ (y) se muestran en la figura 34 y 35. La línea de fase tiene un punto de equilibrio (que es semiestable) y en todas partes las soluciones son crecientes. El hecho de que la bifurcación ocurra en el valor paramétrico para el cual el punto de equilibrio es un nodo, no es coincidencia. De hecho esta situación respecto a la bifurcación es bastante común.

**Figura 34.** Gráficas de $f_\mu(y)$ y líneas de fase para las ecuaciones diferenciales autónomas.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

**Figura 35.** Líneas de fase para valore de $\mu = 1$, menores de 1 y mayores de 1.



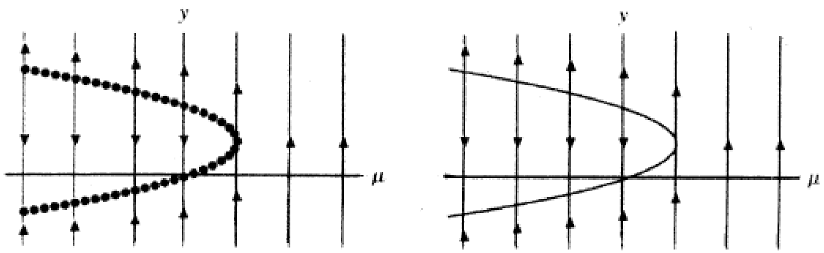

**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Observación: el diagrama de bifurcación

Una manera extremadamente útil de entender el comportamiento cualitativo de las soluciones es por medio de el diagrama de bifurcación. Este diagrama es una gráfica (en el plano $\boldsymbol{\mu}$ – y) de las líneas de fase cercanas a un valor de bifurcación, que permite ver claramente los cambio experimentados por las líneas de fase, cuando el parámetro pasa por este valor.

Para trazar el diagrama de bifurcación, graficamos los valores del parámetro a lo largo del eje horizontal. Para cada valor de $\mu$ (no solo enteros) dibujamos la línea de fase correspondiente a $\mu$ sobre la línea vertical por $\mu$. Podemos imaginar este diagrama como una película: conforme nuestro ojo barre la imagen de izquierda a derecha, vemos evolucionar las líneas de fase a través de la bifurcación. La figura 36 muestra el diagrama de bifurcación para f $\mu$ (y) = $y^2$ – 2y + $\mu$.

**Figura 36.** Diagrama de bifurcación para f ($\mu(y)=y^2-2y+\mu$).




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 13.

Analizar la familia uniparamétrica:

$$\frac{dy}{dt} = f_a(y) = y^3 - ay = y(y^2 - a)$$

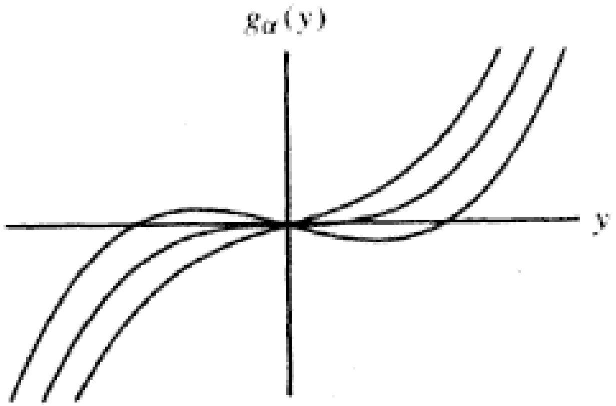
### Solución:

En esta ecuación a es el parámetro. Si hacemos $f_a$ (y) = 0, tenemos $y(y^2 - a) = 0$. Por lo tanto, se tienen tres puntos de equilibrio si a > 0, y = 0, $\pm\sqrt{a}$; pero hay un solo punto de equilibrio si a ≤ 0, es y = 0. Por lo tanto, ocurre una bifurcación cuando a = 0. Para entender mejor lo que sucede, trazamos un diagrama.

En primer lugar, si a < 0, el término $y^2$ – a es siempre positivo. Entonces fa( y) = $y(y^2 - a)$ tiene el mismo signo que y. Las soluciones tienden a ∞ si y (0) > 0 y a - ∞ si y (0) < 0. Pero si a > 0, la situación es diferente. La gráfica de $f_a$ (y) muestra que $f_a$ (y) > 0 en los intervalos $\sqrt{a} < y < \infty$, y $-\sqrt{a} < y < 0$, y ahí las soluciones se incrementan (figura 37). En los otros intervalos $f_a$ (y) < 0, por lo que las soluciones decrecen.

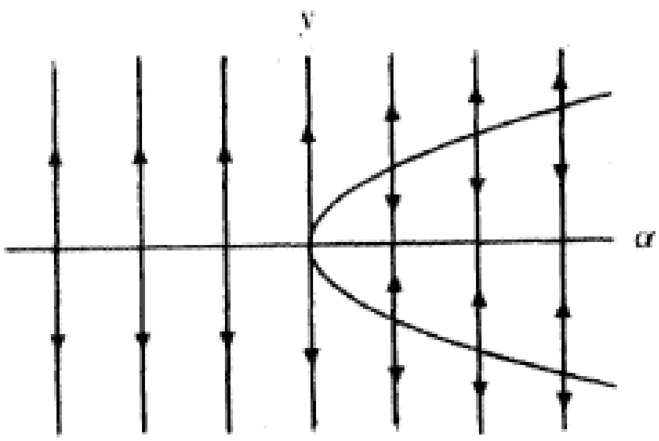
El diagrama de bifurcación se muestra en la siguiente figura.

**Figura 37.** Diagrama de bifurcación para $(f_a(y)=y^3-ay)$.




**Fuente**. Elaborada por el autor con el programa Derive.

**Figura 38.** Gráfica de un diagrama de bifurcación en horquilla.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

# 3.4 Ejercicios

1. Construya los diagramas de bifurcación para las ecuaciones diferenciales uniparamétricas:

| | |
|---|---|
| a. $y' = a - y^2$ | b. $y' = y(a - y)(2a - y)$ |
| c. $y' = a + y + y^2$ | d. $y' = a - y - y^2$ |
| e. $y' = a + y^2$ | f. $y' = y^2 + 3y + a$ |
| g. $y' = y^2 - ay + 1$ | h. $y' = \cos y + a$ |

2. Escriba a continuación una ecuación diferencial autónoma que contenga un parámetro a con la propiedad de que si $a < 0$, existan dos puntos de equilibrio, uno estable y otro inestable; si $a = 0$, que exista un punto de equilibrio semiestable; si $a > 0$, que no tenga punto de equilibrio.

3. Para la familia uniparamétrica que no está sometida a los problemas ambientales de un lago real. Para la población real de peces habrá cambios ocasionales en la población que no se identifiquen los valores de bifurcación de a, describa las bifurcaciones que presentan cuando a se incrementa (sugerencia: reescriba $y^6$ como $(y^3)^2$ y usa la ecuación cuadrática para encontrar los puntos de equilibrio).

$$\frac{dy}{dt} = y^6 - 2y^3 + a$$

4. Para la familia uniparamétrica:

$$\frac{dy}{dt} = y^6 - 2y^4 + a$$

Identifique los valores de bifurcación de a y describa las bifurcaciones que presentan cuando a se incrementa (sugerencia: podría ser útil ver la gráfica del lado derecho de la ecuación para varios valores de $\alpha$).

---

5. Considere el modelo de población:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P^2}{50} + 2P$$

Para una especie de pez en un lago. Suponga que las autoridades han decidido permitir la pesca, pero no es claro cuántas licencias de pescar se autorizarán. Suponga que con licencia una persona pescará en promedio de 3 peces por año.

a) ¿Cuál es el mayor número de licencias que puede autorizarse para que los peces tengan oportunidad de sobrevivir en el lago?
b) Suponga que se emiten el número de licencias de pescar determinado en el inciso a. ¿Qué pasará a la población de peces, es decir, cómo se comporta la población actual con respecto de la población inicial?
c) El simple modelo de población anterior, puede verse como el de una población ideal de peces que no está sometida a los problemas ambientales de un lago real. Para la población real de peces habrá cambios ocasionales en la población que no se consideraron cuando se construyó este modelo. Por ejemplo, si el nivel del lago aumenta debido a una fuerte lluvia, unos

cuantos peces adicionales podrían ser capaces de nadar debajo de una corriente usualmente seca para alcanzar el lago, o bien, el agua adicional podría llevar a este materia tóxica, matando algunos peces. Dada la posibilidad de perturbaciones inesperadas de la población no incluida en el modelo, ¿qué cree usted que pasará a la población real de peces si se permite la pesca al nivel determinado en el inciso b?

6. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias, explique por qué hay una bifurcación de horquilla en algún valor del parámetro c. Trace el diagrama de bifurcación de horquilla con arcos de línea discontinua para los equilibrios de repelencia y de línea continua para los de atracción.

a. $y' = (c - 2y^2)\ y$ b. $y' = -\ (c + y^2)\ y$ c. $y' = (c - y^4)\ y$

7. Para cada una de las ecuaciones de los siguientes ejercicios, a) realice un boceto de todas las gráficas de f(x) respecto a x, diferentes desde el punto de vista cualitativo, al variar el parámetro c; b) determine el(los) punto(s) de bifurcación; y c) bosqueje el diagrama de bifurcación de las soluciones de equilibrio respecto a c.

a. $y' = 1 + cx + x^2$ b. $y' = x - cx\ (1 - x)$

c. $y' = x^2 - 2x + c$ d. $y' = x + c\ x^3$

8. En los ejercicios a al d localice los valores de bifurcación para la familia paramétrica y dibuje las líneas de fase para los valores del parámetro ligeramente menores que, o ligeramente mayores que $\alpha$, y el valor de bifurcación.

a. $\frac{dy}{dt} = y^2 + \alpha$

b. $\frac{dy}{dt} = y^2 + 3y + \alpha$

c. $\frac{dy}{dt} = y^2 - ay + 1$

d. $\frac{dy}{dt} = \cos y + \alpha$

# CAPÍTULO 4.

# SOLUCIONES NUMÉRICAS Y CUANTITATIVAS DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

## Contenido



## Competencias

1. Aplica el método de Euler para resolver problemas con valor inicial.
2. Utiliza métodos analíticos para resolver ecuaciones diferenciales separables.
3. Plantea y resuelve problemas mediante métodos cualitativos.

# Introducción

Ya se ha dicho que hay básicamente tres formas de resolver una ecuación diferencial, como son: la forma numérica, la forma cualitativa y la forma cuantitativa; en esta sección queremos mostrar cómo se resuelve numéricamente un problema con valor inicial mediante el método numérico de Euler; para luego trabajar el método cuantitativo más importante para resolver ecuaciones diferenciales lineales, llamado el de variables separables.

**Figura 1.** Leonard Paul Euler (1707-1783).

**Fuente.** Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual Universidad EAN).

Originario de Suiza, fue uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos. También fue uno de los autores más prolíferos en cualquier rama de esta disciplina, ya que escribió infinidad de documentos de matemáticas puras y aplicadas. Sus aptitudes para las matemáticas fueron inmensas, lo cual condujo a un físico a expresar con admiración que «Euler realizaba los cálculos sin esfuerzo aparente, del mismo modo que los hombres respiran o las águilas se sostienen en el aire». Padeció ceguera los últimos 17 años de su vida, pero dictó su aparentemente interminable flujo de resultados matemáticos hasta el día de su muerte. El gobierno suizo está a punto de terminar un proyecto monumental para publicar las obras de Euler (hasta 100 volúmenes enormes).

# 4.1 Soluciones numéricas: método de Euler

El concepto geométrico de un campo de pendientes, tal como lo vimos en la sección previa, está íntimamente relacionada con un método numérico fundamental para aproximar soluciones de una ecuación diferencial, dado un problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = f\,(t, y) \qquad y(t_0) = y_0$$

Podemos obtener una idea burda de la gráfica de su solución, esbozando primero el campo de pendientes en el plano t – y y luego comenzando en el valor inicial ($t_0$, $y_0$), delineamos la solución en una gráfica que sea tangente al campo de pendientes en cada punto a lo largo de la gráfica. En esta sección describiremos un procedimiento numérico que automatiza esta idea. Usando una computadora o una calculadora, obtendremos los números y gráficas que proporcionan las soluciones aproximadas de problemas con valor inicial. El procedimiento que veremos se llama método de Euler.

# 4.2 Pasos a lo largo del campo de pendientes

Para describir el método de Euler, comenzamos con el problema de valor inicial:

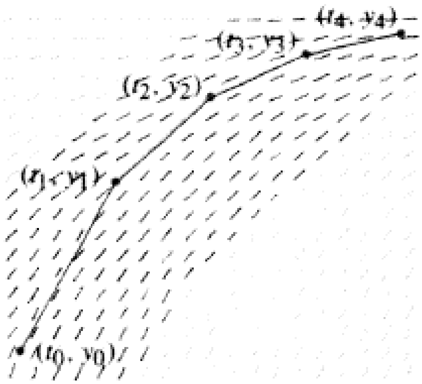
$$\frac{dy}{dt} = f\,(t, y) \qquad y(t_0) = y_0$$

La idea del método es empezar en el punto $(x_0, y_0)$ en el campo de pendientes y dar pequeños pasos dictados por las tangentes en esta.

Primero elegimos un tamaño del paso $\Delta t$ (pequeño). La pendiente de la solución aproximada es puesta al día, cada $\Delta t$ unidades de t. En otras palabras, en cada paso nos movemos $\Delta t$ unidades a lo largo del eje t. El tamaño de $\Delta t$ determina la exactitud de la solución, así como el número de cálculos que son necesarios para obtener la aproximación.

Comenzando en $(t_0, y_0)$ nuestro primer paso es hacia el punto $(t_1, y_1)$ donde $t_1 = t_0 + \Delta t$ y $(t_1, y_1)$, es el punto sobre la línea que pasa por $(t_0, y_0)$ y cuya pendiente es proporcionada por el campo de pendientes en $(t_0, y_0)$. En $(t_1, y_1)$ repetimos el procedimiento, dando un paso cuyo tamaño a lo largo del eje t es $\Delta t$ y cuya dirección es determinada por el campo de pendientes en $(t_1, y_1)$, llegando al punto $(t_2, y_2)$. El nuevo tiempo está dado por $t_2 = t_1 + \Delta t$ y $(t_2, y_2)$, está sobre el segmento de línea que comienza en $(t_1, y_1)$ y tiene pendiente $f\,(t_1, y_1)$. De la misma manera, usamos el campo de pendientes en el punto $(t_k, y_k)$ para calcular el siguiente punto $(t_{k+1}, y_{k+1})$. La secuencia de valores $y_0$, $y_1$, sirve como una aproximación a la solución en los tiempos $t_0$, $t_1$, $t_2$. Geométricamente, el método produce una secuencia de pequeños segmentos de línea que conectan $(t_k, y_k)$ con $(t_{k+1}, y_{k+1})$ (ver figura 2). Básicamente, estamos cosiendo entre sí pequeñas piezas del campo de pendientes para formar una gráfica que aproxima nuestra curva solución.

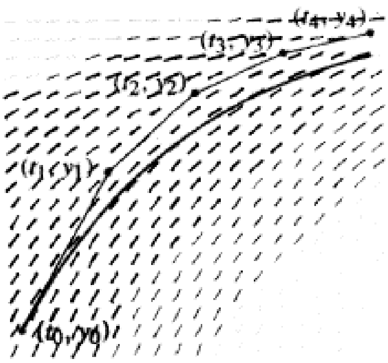
**Figura 2.** Gráfica solución  obtenida por el método de Euler.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Este método emplea segmentos de línea tangentes, dados por el campo de pendientes, para aproximar la gráfica de la solución. En consecuencia, en cada etapa cometemos un pequeño error (ver figura 3). Con optimismo, si el tamaño del paso es suficientemente pequeño, esos errores no resultarán demasiado grandes conforme avancemos, y la gráfica resultante será cercana a la solución buscada.

**Figura 3.** Gráfica de una secuencia de puntos con pequeños saltos.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

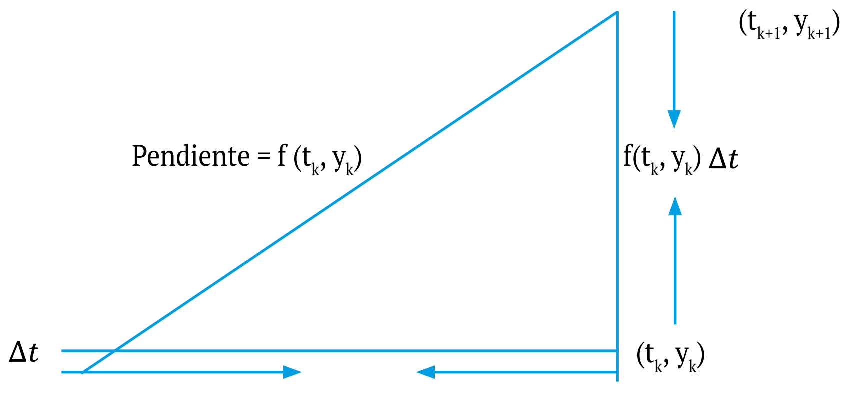
# 4.3 Método de Euler

Para poner en práctica el método de Euler, necesitamos una fórmula que determine ($t_{k+1}$, $y_{k+1}$) a partir de ($t_k$, $y_k$). Encontrar $t_{k+1}$ es fácil. Primero especificamos el tamaño del paso $\Delta t$ y entonces:

$$y_{k+1} = t_k + \Delta t$$

Para obtener $y_{k+1}$ a partir de ($t_k$, $y_k$), usamos la ecuación diferencial dy/dt =f (t, y) en el punto ($t_k$, $y_k$), es decir f(($t_k$, $y_k$), y el método de Euler usa dicha pendiente para calcular $y_{k+1}$. De hecho, determina el punto ($t_{k+1}$, $y_{k+1}$), suponiendo que este se encuentra sobre la línea que pasa por ($t_k$, $y_k$) con pendiente f($t_k$, $y_k$) (ver figura 4).

**Figura 4.** Explicación gráfica del Método de Euler.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

Observando la figura 4 y los conocimientos básicos de las pendientes, los podemos usar para determinar $y_{k+1}$. La fórmula para la pendiente de una línea nos da que:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} = f(t_k, y_k)$$

Como $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, el denominador $t_{k+1} - t_k$ es justamente $\Delta t$, por tanto tenemos:

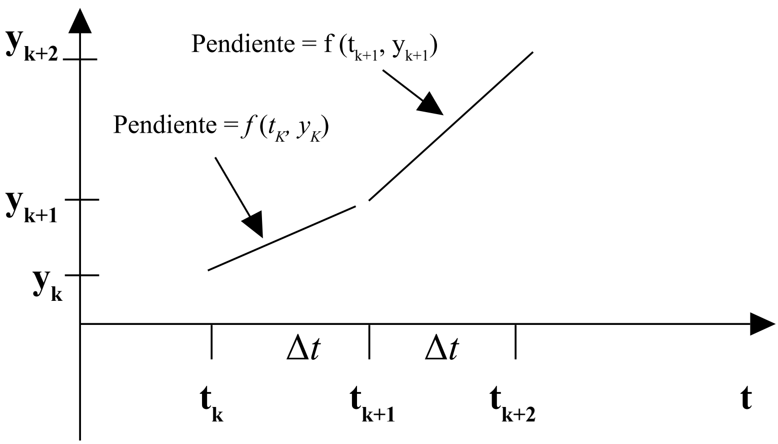
$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} = f(t_k, y_k)$$

Esto es: $y_{k+1} - y_k = f(t_k, y_k)\Delta t$

O: $y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\Delta t$

Esta es la fórmula para el método de Euler (figura 4 y 5).

**Figura 5.** Mirada Geométrica del Método de Euler.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

O

En resumen:

Método de EULER para $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{f(t,y)}$[1]
Dada la condición inicial y $(t_0) = y_0$ y el tamaño del paso $\Delta t$,
calcule el punto $(t_{k+1}, y_{k+1})$ a partir del punto precedente
$(t_k\ y_k)$ como, sigue:
1. Use la ecuación diferencial para determinar la pendiente
f $(t_k, y_k)$.
2.Calcule el siguiente punto $(t_{k+1}, y_{k+1})$ mediante las
fórmulas:

$$T_{k+1} = t_k + \Delta t$$

y $$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\Delta t$$

## Ejemplo 1:

Considere el problema con valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = 2y - 1, \qquad y(0) = 1$$

Usando el método de Euler construir una solución aproximada al problema.

## Solución:

En este ejemplo, f (t, y) = 2y - 1, por lo que el método de Euler está dado por:

$$Y_{k+1} = y_k + (2y_k - 1)\,\Delta t$$

[1] Si se desea consultar una fuente muy amena de métodos de aproximación para PVI, véase el libro del renombrado analista numérico estadounidense Shampine. L. F. (1994). Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. Nueva York: Charman & Hall.

Para ilustrar el método, comenzamos con un tamaño de paso relativamente grande de $\Delta t$ = 0.1 y aproximamos la solución sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Para acercarnos a la solución sobre un intervalo cuya longitud es 1, con un tamaño de paso de 0.1, debemos calcular diez repeticiones del método. La condición inicial y (0) = 1 proporciona el valor inicial $y_0$ = 1. Con $\Delta t$ = 0.1, tenemos $t_1=t_0+0.1 = 0+0.1 = 0.1$. Calculamos las coordenadas de y para el primer paso de acuerdo con:

$$Y_1 = y_0 + (2y_0 - 1)\,\Delta t = 1 + (1)0.1 = 1.1$$

Así, el primer punto ($t_1$, $y_1$) sobre la gráfica de la solución aproximada es (0.1, 1.1).

Para calcular la coordenada $y_2$ para el segundo paso, usamos ahora $y_1$, en vez de $y_0$. Es decir:

$$Y_2 = y_1 + (2y_1 - 1)\,\Delta t = 1.1 + (1.2)0.1 = 1.22$$

Y el segundo punto para nuestra solución aproximada es
($t_2$, $y_2$) = (0.2, 1.22).

Continuando con este procedimiento, obtenemos los resultados dados en la tabla 1.

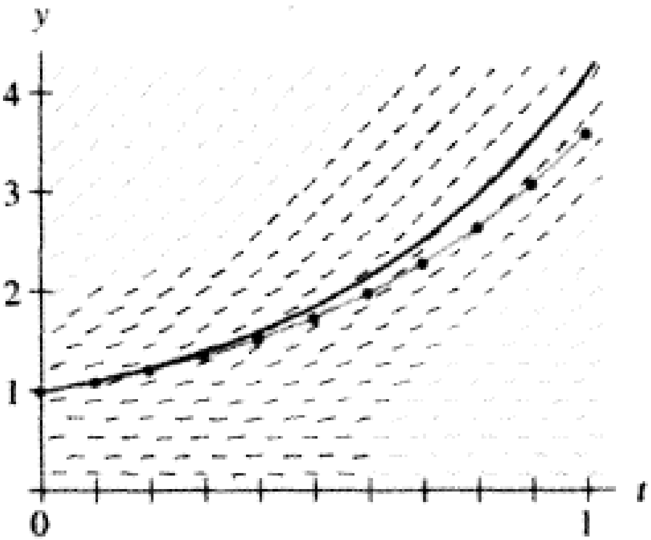
**Tabla 1.** Tabla resumen de los pasos del método de Euler.

| K | $T_k$ | $y_k$ | $f(t_k, y_k)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0.1 | 1.1 | 1.2 |
| 2 | 0.2 | 1.22 | 1.44 |
| 3 | 0.3 | 1.364 | 1.73 |
| 4 | 0.4 | 1.537 | 2.07 |
| 5 | 0.5 | 1.744 | 2.49 |
| 6 | 0.6 | 1.993 | 2.98 |
| 7 | 0.7 | 2.292 | 3.58 |
| 8 | 0.8 | 2.650 | 4.3 |
| 9 | 0.9 | 3.08 | 5.16 |
| 10 | 1.0 | 3.596 | |

**Fuente.** Elaborada por el autor.

Después de diez pasos, obtenemos la aproximación de y (1) por $y_{10}$ = 3.596 (cada máquina usa algoritmos diferentes para redondear números, por lo que usted puede obtener resultados ligeramente diferentes en su computadora o calculadora. Es importante que tenga esto en cuenta cuando compare los resultados numéricos presentados en este u otros textos). En la figura 6, se presenta el campo de pendientes para esta ecuación diferencial, su gráfica real y la gráfica aproximada.

**Figura 6.** Gráfica de la solución real y la aproximada por el método de Euler.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Por lo general, cuando utilizamos un tamaño de paso más pequeño se reduce el error, pero deben efectuarse más cálculos para aproximar la solución sobre el mismo intervalo. Por ejemplo, si usamos la mitad del tamaño de paso en este ejemplo ($\Delta t$ = 0.05), debemos calcular entonces dos veces más pasos, ya que $t_1$ =0.05, $t_2$ =0.1, $t_{20}$ = 1.0. Nuevamente comenzamos en el punto $(t_0, y_0)$ = (0, 1) como se especificó por la condición inicial. Sin embargo, con $\Delta t$ = 0.05, obtenemos:

$$Y_1 = y_0 + (2y_0 - 1)\,\Delta t = 1 + (1)0.05 = 1.05$$

Este paso da el punto $(t_1, y_1)$ = (0.05, 1.05) sobre la gráfica de nuestra solución aproximada. Para el siguiente paso, determinamos:

$$Y_2 = y_1 + (2y_1 - 1)\,\Delta t = 1.05 + (1.1)0.05 = 1.105$$

Ahora se tiene el punto $(t_2, y_2) = (1.1, 1.105)$. Este tipo de cálculo se vuelve tedioso muy rápidamente, pero afortunadamente este tipo de operaciones son perfectas para un computador o una calculadora. Para $\Delta t = 0.05$, los resultados del método de Euler se muestran en la tabla 2.

**Tabla 2.** Tabla para la solución del método de Euler con un paso más pequeño.

| K | $T_k$ | $y_k$ | $f(t_k, y_k)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0.05 | 1.050 | 1.100 |
| 2 | 0.1 | 1.105 | 1.210 |
| 3 | 0.15 | 1.166 | 1.331 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 19 | 0.95 | 3.558 | 6.116 |
| 20 | 1.00 | 3.864 | |

**Fuente.** Elaborada por el autor.

Se puede ver que el error que se comete en la tabla 1, se rebaja en la tabla 2.

## Ejemplo 2. Un ejemplo no autónomo:

Consideremos el problema con valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = -2ty^2, \qquad y(0) = 1$$

Usando el método de Euler para aproximar esta solución sobre el intervalo $0 \le t \le 2$.

### Solución:

El valor de la solución en t = 2 es y (2) = 1/5 si se calcula la integral y se evalúa en este valor. Nuevamente, es interesante ver qué tanto nos acercamos a este valor con varias selecciones de $\Delta t$. La fórmula para el método de Euler es:

$$Y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\,\Delta t = y_k - (2t_k y_k 2)\,\Delta t$$

Con $t_0 = 0$ y, $y_0 = 1$. Comenzamos aproximando la solución de $t = 0$ a $t = 2$ usando solo los cuatro pasos. Esto implica tan pocos cálculos que podemos efectuarlos «a mano». Para cubrir un intervalo de longitud 2 en cuatro pasos, debemos usar $\Delta t = 2/4 = ½$. El cálculo entero se muestra en la tabla 3. Observe que terminamos aproximando el valor exacto y (2) = 1 / 5 = 0.2 por $y_4$ =5/32 = 0.15625.

**Tabla 3.** Tabla resumen de los pasos del método de Euler.

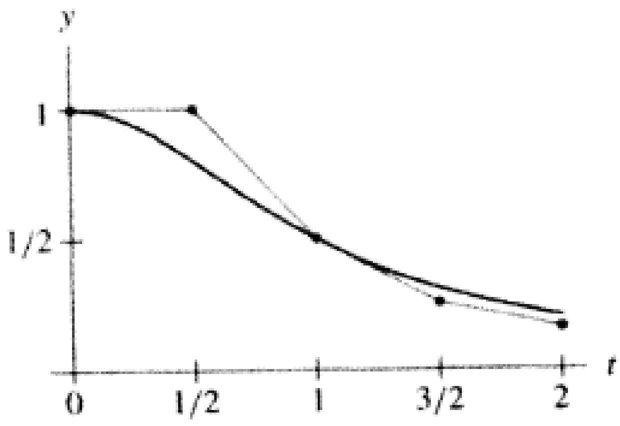
| K | $T_k$ | $y_k$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0.1 | 1.0000 |
| 2 | 0.2 | 0.9800 |
| 3 | 0.3 | 0.9416 |
| : | : | : |
| 19 | 1.9 | 0.2101 |
| 20 | 2.0 | 0.1933 |

**Fuente.** Elaborada por el autor.

La figura 7, muestra la gráfica de la solución y la compara con los resultados del método de Euler sobre este intervalo.

Como dijimos en el ejemplo 1, al escoger valores de $\Delta t$ más pequeños se obtienen mejores aproximaciones. Por ejemplo, si $\Delta t$ = 0.01, la aproximación de Euler al valor exacto y (2) = 0.2 es $y_{20}$ = 0.1933. Si $\Delta t$ = 0.001, necesitamos calcular 2000 paso, pero la proximidad mejora a y(2000) = 0.199937

**Figura 7.** Gráfica de la solución real y la aproximada por el método de Euler.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

## Ejemplo 3:

Consideremos como un tercer ejemplo la ecuación no autónoma:

$$\frac{dy}{dt} = ty + y, \qquad y(0) = 1.$$

Estime y (1) utilizando el método de Euler y usando un paso de $\Delta t = 0.25$.

## Solución:

Se tiene que f (t, y) = t y + y, tenemos también que $t_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 1$ de la ecuación de Euler, se tiene que $y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k) = y_k + (t_k + t_k\, y_k)\, \Delta t$.

De donde se tiene que:

$y_1 = y_0 + (t_0 + t_0 y_0)\ \Delta t = 1 + 0.25\ (0+0\ (1)) = 1$
$t_1 = t_0 + \Delta t = 0+0.25 = 0.25$
$y_2 = y_1 + (t_1 + t_1 y_1) = 1 + (0.25 + 0.25\ (1)) = 1.25$
$t_2 = t_1 + \Delta t = 0.25 + 0.25 = 0.5.$
$y_3 = y_2 + (t_2 + t_2 y_2)\ \Delta t = 1.125 + 0.25\ (0.5 + 0.5.(1.125) = 1.391$
$t_3 = t_2 + \Delta t = 0.5 + 0.25 = 0.75.$
$y_4 = y_3 + (t_3 + t_3 y_3)\ \Delta t = 1.391 + 0.25\ (0.75 + 0.75.(1.391)) = 1.839$ y,
$t_4 = t_3 + \Delta t = 0.75 + 0.25 = 1.$

Y entonces el estimado para y (1) es $y_4 = 1.839$.

## 4.4 Ejercicios

En los siguientes ejercicios del 1 al 8, use el método de Euler con el tamaño de paso $\Delta t$ para aproximar la solución al problema de valor inicial, en el intervalo de tiempo especificado. Su respuesta debe incluir una tabla de los valores aproximados de la variable dependiente. Trate de incluir un croquis de la gráfica de la solución aproximada.

1. $\frac{dy}{dt} = 2y + 1$, y (0) = 3, $0 \leq t \leq 2,\ \Delta t = 0.5$.
2. $\frac{dy}{dt} = t - y^2$, y (0) = 1, $0 \leq t \leq 1,\ \Delta t = 0.25$.
3. $\frac{dy}{dt} = y^2 - 2y + 1$, y (0) = 2, $0 \leq t \leq 2,\ \Delta t = 0.5$.
4. $\frac{dy}{dt} = seny$, y (0) = 1, $0 \leq t \leq 3,\ \Delta t = 0.5$.
5. $\frac{dy}{dt} = (3 - y)(y + 1)$, y (0) = 4, $0 \leq t \leq 5,\ \Delta t = 1$.
6. $\frac{dy}{dt} = (3 - y)(y + 1)$, y (0) = 0, $0 \leq t \leq 5,\ \Delta t = 0.5$.
7. $\frac{dy}{dt} = e^{\frac{2}{y}}$, y (0) = 2, $0 \leq t \leq 2,\ \Delta t = 0.5$.
8. $\frac{dy}{dt} = e^{\frac{2}{y}}$, y (1) = 2, $0 \leq t \leq 3,\ \Delta t = 0.5$.
9. Compare los ejercicios 7 y 8 y de sus observaciones.
10. Compare los ejercicios 5 y 6, y dé sus observaciones. ¿Está funcionando bien el método de Euler en cada caso? ¿Qué haría usted para evitar las dificultades que pueden surgir?

11. Considere el problema con valor inicial:

$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y}$ y (0) = 1

Usando el método de Euler, calcule tres soluciones diferentes aproximadas correspondientes a $\Delta t = 1.0; 0.5; y\ 0.25$ sobre el intervalo $0 \le t \le 4$. Grafique las tres soluciones. ¿Cuáles son sus predicciones acerca de la solución real al problema de valor inicial?

12. Para los siguientes problemas con valor inicial, complete los pasos i, ii y iii.

   i. Encuentre la solución exacta y evalúela en los puntos $t_1$, $t_2$, $t_3$ y $t_4$.

   ii. Utilice el método de Euler con h = 0.1 para encontrar valores aproximados para $y(t_1)$, $y(t_2)$, $y(t_3)$ y, $y(t_4)$. Compare estos resultados con los valores exactos.

   iii. Repita el paso ii, con h = 0.05, haciendo los cambios apropiados.

a. $y' = t^3$, y (1) = 1, $t_0 = 1$, $t_1 = 1.1$, $t_2 = 1.2$, $t_3 = 1.3$, $t_4 = 1.4$.

b. $y' = \cos(t)$ y( 0) = 0, $t_0 = 0$, $t_1 = 0.1$, $t_2 = 0.2$, $t_3 = 0.3$, $t_4 = 0.4$.

c. $y' = e^{-t}$ y (0) = 1, $t_0 = 0$, $t_1 = 0.1$, $t_2 = 0.2$, $t_3 = 0.3$, $t_4 = 0.4$.

d. $y'' = 1/x$ y (-1) = 1, $t_0 = -1$, $t_1 = -0.9$, $t_2 = -0.8$, $t_3 = -0.7$, $t_4 = -0.6$.

e. $y' = 1/(1+t^2)$ y (-1) = $\frac{\pi}{4}$, $t_0 = 1$, $t_1 = 1.1$, $t_2 = 1.2$, $t_3 = 1.3$, $t_4 = 1.4$.

f. $y' = t^2e^{-t}$ y (0) = 1, $t_0 = 0$, $t_1 = 0.1$, $t_2 = 0.2$, $t_3 = 0.3$, $t_4 = 0.4$.

13. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial de forma numérica en el intervalo indicado, utilizando el método de Euler con h = 0.1. Compare su valor de y en el punto extremo derecho del intervalo con el valor dado por la solución explicita.

| | | |
|---|---|---|
| a. $y' = 1 + y^2$ | $y(0) = 0$ | $0 \leq t \leq 0.5,$ |
| b. $y' = e^{-y}$ | $y(0) = 0$ | $0 \leq t \leq 0.5,$ |
| c. $y' = 2t - 3y$ | $y(1) = 1$ | $0 \leq t \leq 1.5,$ |

---

14. Considere el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = 2 - y, \quad y(0) = 1.$$

Usando el método de Euler, calcule tres soluciones diferentes aproximadas correspondientes a $\Delta t$ = 1.0; 0.5 y 0.25 sobre el intervalo $0 \leq t \leq 4,$ y grafique las tres soluciones. ¿Qué predicciones hace usted acerca de la solución real al problema de valor inicial? ¿Cómo se relacionan las gráficas de estas soluciones aproximadas con la gráfica de la solución real?

**Figura 8.** Carl David Tolmé Runge o Car Runge (1856-1927).

**Fuente.** Mûlges y Uhlig (1996).

Carl Runge pasó sus primeros años en La Habana, donde su padre Julius Runge ejercía como cónsul danés. La familia se trasladó más adelante a Bremen, donde Julius murió prematuramente en 1864.

En 1880 Carl recibió su doctorado en matemática en Berlín, donde había estudiado con Karl Weierstrass. En 1886 llegó a ser profesor en Hanóver. En 1904 fue a Gotinga, por iniciativa de Felix Klein donde permaneció hasta su retiro en 1925. Una hija suya se casó con el matemático Courant. Realizó un trabajo notable en análisis numérico y ecuaciones diofánticas. M. W, Kutta (1867-1944) también alemán, quien trabajó en matemáticas aplicadas, contribuyó con Runge a construir métodos numéricos para la solución numérica de ecuaciones diferenciales.

# 4.5 Un método cuantitativo (analítico). Separación de variables

## Introducción

Un núcleo inestable es radioactivo. En cualquier instante puede emitir partículas, transformándolo en un núcleo diferente en el proceso. Por ejemplo 238U es una alfa emisor en decadencia exportando de acuerdo al esquema $^{238}U \rightarrow {}^{234}Th + {}^{4}He$, donde $^{4}He$ es la alfa partícula. En una muestra de $^{238}U$, un cierto porcentaje del núcleo decae durante un periodo de observación $\Delta t$. Si en un tiempo t la muestra contiene N (t) núcleo radioactivo, entonces esperamos que la cantidad del núcleo radioactivo en un tiempo $\Delta t$ es aproximadamente proporcional a N (t) y $\Delta t$. En forma simbólica:

$$\Delta N = N\,(t + \Delta t)\,.\,N\,(t) \approx\; -\gamma\, N\,(t)\Delta t) \qquad (1)$$

Donde $\gamma$ es la constante de proporcionalidad. El signo menos es indicativo del hecho de que hay menos núcleos radiactivos en el tiempo t + $\Delta t$, que los que hay en el tiempo t.

Dividiendo ambos lados de la ecuación (1) por $\Delta t$, y luego tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$,

$$N^{/}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -\gamma N(t)$$

Esta ecuación es una que surge a menudo en aplicaciones. Debido a la forma de sus soluciones, es llamada la ecuación exponencial.

$$N'(t) = -\gamma N(t) \qquad (2)$$

La ecuación (2) es un ejemplo de una ecuación que se llama de variable separable porque ella se puede reescribir con sus variables separadas y entonces es más fácil resolverla. Para hacer esto, escribimos primero la ecuación usando dN/dt es lugar de N/.

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma N$$

A continuación, separamos las variables poniendo toda expresión que implica la función desconocido N a la izquierda y todo lo relacionado con la variable independiente t a la derecha. Esto incluye a d N y d t. El resultado es:

$$\frac{1}{N} dN = -\gamma dt \qquad (3)$$

Es importante notar que este paso es válido solo si $N \neq 0$, ya que no se puede dividir por cero. Integrando ambos lados de la ecuación (3), se tiene:[2]

$$\int \frac{1}{N} dN = -\gamma \int dt \, o'$$

$$\text{Ln} \quad |N| = -\gamma t + C \qquad (4)$$

Queda por resolver para el valor de N, tomando la exponencial a ambos lados de la ecuación (4), tenemos:

$$|N(t)| = e^{-\gamma t + C} = e^{C} e^{-\gamma t}$$

Como e $^{C}$ y $e^{-\gamma t}$ son ambos positivos, entonces tenemos dos casos:

$$N(t) = \begin{cases} e^{C} e^{-\gamma t}, & si\ N > 0 \\ -e^{C} e^{-\gamma t} & si\ N < 0 \end{cases}$$

2 Si usted no está conforme con todos estos pasos, puede verificar la solución por diferenciación y sustitución. Se puede dar una justificación formal mediante la regla de la cadena.

Se puede simplificar esta expresión si introducimos:

$$A = \begin{cases} e^{C} & si\ N > 0 \\ -\ e^{C} & si\ N < 0 \end{cases}$$

Luego, la solución también se puede escribir por la fórmula simple:

$$N\ (t) = Ae^{-\gamma t} \qquad (5)$$

Donde A es una constante diferente de cero, pero por lo demás arbitraria. La idea dada en el ejemplo 4, nos permite dar un método analítico (o cuantitativo) para resolver ecuaciones diferenciales de la forma:

$$dy/dt = f\ (t, y) \qquad (6)$$

El lado derecho de esta ecuación contiene generalmente tanto la variable independiente t como la variable dependiente y (aunque hay muchos ejemplos importantes en los que t o y están ausentes).

Definición

Una ecuación diferenciable de la forma:

$$dy/dt = f\ (t, y)$$

se dice que es de variables separable si la función f (t, y) puede escribirse como el producto de dos funciones: una que dependa solo de t y otra que dependa solo de y. Es decir, una ecuación diferencial de variables separables sí se puede escribir en la forma:

$$dy/dt = f\ (t, y) = g\ (t).\ h\ (y)$$ [3]

3 También es cierto que si es de la forma dy/dt=f(t)/h(t) se puede ver como variable separable, escribiéndola como dy/dt =f(t). (1/h(t)).

## Ejemplo 4:

Diga si la siguiente ecuación diferencial es de variables separables.

$$dy/dt = y.t$$

### Solución:

Es claramente separable ya que podemos escribir g (t) = t, y h (y) = y. por lo tanto:

$$dy/dt = f\,(t, y) = t\,y = g\,(t).h\,(y)$$

## Ejemplo 5:

Diga si la siguiente ecuación diferencial es de variables separables:

$$dy/dt = y + t$$

### Solución:

No es separable, ya que no hay forma de expresar y + t como una función g (t) y otra h (y) tal que $\frac{dy}{dt}$ = g (t).h (y).

## Ejemplo 6:

Diga si la siguiente ecuación diferencial es de variables separables:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t+1}{ty+t}$$

### Solución:

En esta ecuación tenemos que trabajar un poco más para poder evidenciar que sí es separable, así:

Podemos escribir la ecuación dada como:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t+1}{ty+t} = \frac{(t+1)}{t(y+1)} = \left(\frac{t+1}{t}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right)$$

De esta forma se tiene que:

$$g(t) = \left(\frac{t+1}{t}\right) \text{ y, } h(y) = \left(\frac{1}{y+1}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t+1}{ty+t} = g(t).h(y)$$

Es decir que sí es separable.

## Observación:

Dos importantes tipos de ecuaciones diferenciales se presentan si t o y están ausentes en el lado derecho de la ecuación.

$$\frac{dy}{dt} = g(t)$$

La cual es separable, puesto que consideramos el lado derecho como g (t) .1, donde 1 constituye una función (muy simple) de y.

$$\frac{dy}{dt} = h(y)$$

Es también separable puesto que podemos considerar el lado derecho como 1. h (y), donde 1 constituye una función de t. Este último ejemplo de ecuación diferenciable es la que hemos llamado autónoma. Entonces lo que podemos concluir es que toda ecuación diferenciable autónoma se puede resolver analíticamente por variables separables.

## Ejemplo 7:

Diga si la siguiente ecuación diferencial es de variables separables:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

## Solución:

El lado derecho solamente depende de la variable dependiente P (t), por lo que esta ecuación es otro ejemplo de una ecuación que es autónoma y por lo tanto, se puede ver como una ecuación de variables separables.

## ¿Cómo resolver ecuaciones diferenciales separables?

Hemos visto en el ejemplo 4 de esta unidad, cómo se resuelve una ecuación de variables separables, usando un procedimiento común en cálculo. Veamos algunos ejemplos que ilustran mejor el método.

## Ejemplo 8:

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y^2}$$

## Solución:

Efectuando algo de algebra informal y reescribiendo esta ecuación en la forma:

$$y^2 dy = t\, dt$$

Es decir, multiplicándo ambos lados por $y^{2dt.}$ Por supuesto, no tiene sentido escribir $\frac{dy}{dt}$ multiplicándola por dt. Sin embargo, esto debe recordarle la técnica de cálculo integral conocida por sustitución. Veremos más adelante que esa sustitución es la que se está haciendo aquí.

Integramos ahora ambos lados: el lado izquierdo con respecto a y, y el lado derecho con respecto a t. Tenemos:

$$\int y^2 dy = \int t\, dt$$

Lo que nos da:

$$\frac{y^3}{3} = \frac{t^2}{2} + C$$

Técnicamente, tenemos una constante de integración en ambos lados de esta ecuación, pero podemos agruparlas en una sola constante C en el lado derecho. Por esto podemos escribir esta ecuación como:

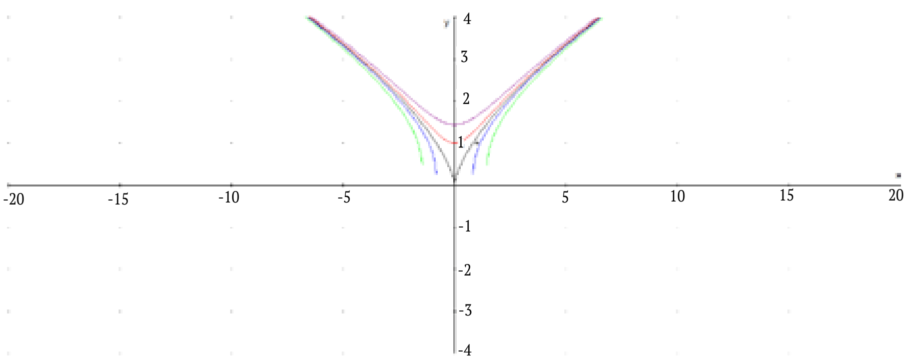
$$y = \left(\frac{3t^2}{2} + 3C\right)^{\frac{1}{3}}$$

O como C es una constante arbitraria, podemos representarla más concretamente como:

$$y = \left(\frac{3t^2}{2} + C_1\right)^{\frac{1}{3}}$$

Donde $C_1$ es una constante arbitraria. El paso siguiente consiste en comprobar que esta expresión es realmente una solución de la ecuación diferencial, y a pesar de la dudosa separación de variables que efectuamos, se puede ver que sí se ha obtenido una respuesta. Observe que este método nos ofrece muchas respuestas, cada valor de $C_1$ da una solución diferente (figura 9).

**Figura 9.** Familia solución para la ecuación diferenciable dada en el ejemplo 8.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 9:

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \cos t \qquad (7)$$

### Solución:

Esta ecuación es separable, luego haciendo la separación de variables se tiene:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos t \, dt$$

Integrando se tiene:

$$-\frac{1}{y} = sent + C$$

Resolviendo para y:

$$y = -\frac{1}{sent+C} \qquad (8)$$

Como dividimos por $y_2$, en este cálculo se asume que $y \neq 0$. Observe que y = 0 satisface la ecuación diferencial (7), pero no está incluida (8) para cualquier valor de C. Luego la solución de (7) consiste de (8) y, y = 0. Esto es:

$$y = \begin{cases} -\frac{1}{sent+C} & \text{para todo y} \neq 0, \text{ó} \\ 0 & si\ y = 0 \end{cases}$$

## Ejemplo 10:

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y) \qquad (9)$$

## Solución:

De nuevo esta ecuación es separable, luego haciendo la separación de variables se tiene:

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \cos t \, dt$$

Integrando, se tiene:

La integral del lado izquierdo se puede evaluar usando fracciones parciales, es decir:

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

Multiplicando por y (y – 1) a ambos lados tenemos:

$$-1 = A\,(y-1) + B\,y \qquad (10)$$

Como y (y – 1) tiene factores simples y, y y – 1, podemos evaluar (10) en las raíces y = 0 y, y = 1, para obtener A = 1 y, B = -1. Entonces se tiene:

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{1}{y-1}dy = \int dt$$

Integrando:

$$ln|y| - ln|y-1| = t + C$$

O equivalentemente:

$$ln\,\frac{|y|}{|y-1|} = t + C \qquad (11)$$

Tomando exponencial a ambos lados tenemos:

$$\frac{|y|}{|y-1|} = e^{t+C} = e^{C}e^{t}$$

$\left|\frac{y}{y-1} = \right| = e^{C}e^{t}$. Esto implica $\frac{y}{y-1} = \pm e^{C}e^{t}$

$$\frac{y}{y-1} = C_1 e^{t}$$

Donde $C_1 = \pm e^C$ es una constante arbitraria positiva o negativa, multiplicamos por y – 1 esta última igualdad, para obtener:

$$y = C_1 .(y - 1).e^t$$

Despejando y, se tiene:

$$y = \frac{C_1 e^t}{-1+C_1 e^t} \qquad (12)$$

Como y (y – 1) = 0 si y = 0, o si y = 1, se sigue que y = 0 y, y = 1 son soluciones de (9). La solución y = 0 corresponde a k =0. Además, y = 1 no está incluido (11) salvo si tomamos $C_1 = \infty$. Luego la solución de (9) es (11) y, y = 1. La solución general involucra una constante $C_1$, la cual puede ser determinado de alguna condición inicial.

La solución dada es una solución implícita de (9), ya que y no está dado en términos de t. La ecuación (12) es una solución explícita de (9), ya que y está dada en términos de t. Para algunos problemas es imposible encontrar, a partir la solución implícita, una fórmula para y[4].

## Ejemplo 11:

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = ty^2 \quad (13)$$

### Solución:

De nuevo separando variables, colocando todas las expresiones que involucran la función desconocida en el lado izquierdo y las que involucran la variable dependiente en el lado derecho, resulta:

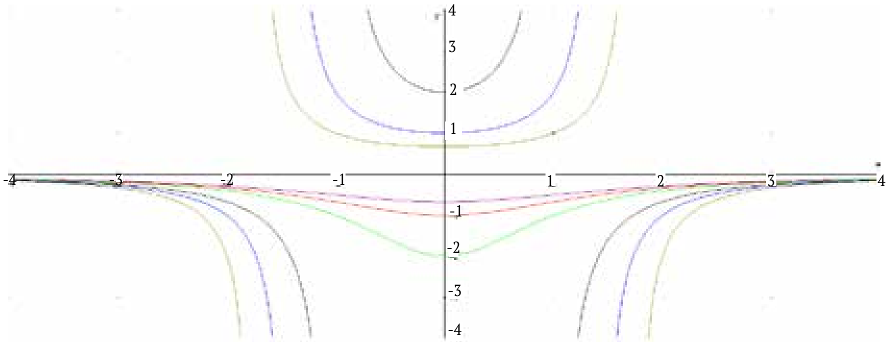
$$\frac{1}{y^2}dy = t\,dt \quad (14)$$

4 Como uno puede sospechar el método de variables separables se remonta casi a los comienzos del cálculo. Gottfried Leibniz (1646-1716) usó esto implícitamente, cuando resolvía el problema inverso de la tangentes en 1691. Esto fue precisado por Johann Bernoulli en 1594 en una carta dirigida a Leibniz.

Observe que este paso es válido si $y \neq 0$, ya que no podemos dividir por cero. Integrando a ambos lados de (14) tenemos:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int t dt \quad o, \qquad -\frac{1}{y} = \frac{1}{2} t^2 + C$$

**Figura 10.** Familia solución para la ecuación diferencial del ejercicio ejemplo 11.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Finalmente, resolviendo para y se obtiene la ecuación explícita:

$$y(t) = \frac{-1}{\frac{1}{2} t^2 + C} = \frac{-2}{t^2 + 2C}$$

La figura 10 nos muestra varias soluciones. Como y = 0 es solución de la ecuación diferencial, en dicha figura se observa la solución: y (t) = 0.

# 4.6 Problemas de aplicación

## Ejemplo 12:

Supongamos que hemos depositado \$5000 en una cuenta de ahorro con interés, incrementado continuamente a una tasa del 5 % anual.

a. ¿Qué función nos representa el capital en un tiempo t?
b. Si decidimos retirar \$1000 de la cuenta cada año, comenzando en el año 10 de depositar el capital, ¿cuánto nos durará el capital?
c. ¿Perderemos alguna vez todo el capital?

### Solución:

a. Si A (t) es la cantidad de dinero en el tiempo t, entonces dA/dt denotará el incremento del capital en cada instante t, es claro que en incremento del capital es directamente proporcional al capital en cada momento, luego tenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

Pero la constante de proporcionalidad es k = 0.05, que el interés pactado, de donde la ecuación diferencial será:

$$\frac{dA}{dt} = 0.05A \qquad A(0) = 5000 \quad (15)$$

Esta ecuación con condición inicial se puede resolver por varias separables, tal como se hizo en el ejemplo 1, y obtenemos:

$$A(t) = Ce^{0.05t}$$

Donde C = A (0). Entonces:

$$A(t) = 5000e^{0.05t}$$

que es la solución particular. Suponiendo que la tasa de interés nunca cambia se tiene que después de 10 años el capital sería:

$$A(10) = 5000e^{0.5} \approx 8244 \text{ Dólares.}$$

b. En este caso la ecuación diferencial en los diez primeros años es igual a (15), después de los diez años la ecuación diferencial debe cambiar. Para t > 10 la ecuación diferencial tomará la forma de:

$$\frac{dA}{dt} = 0.05A - 1000$$

Luego el problema queda modelado en la siguiente forma:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{cases} 0.05A & si\ t < 0 \\ 0.05A - 1000 & si\ t < 0 \end{cases} \qquad (16)$$

que corresponde a una ecuación definida a trozos.

Para solucionar esta ecuación en dos partes, resolvemos la primera parte y determinamos A (10), lo cual ya se hizo en a. y obtuvimos A (10) $\approx 8244$, que se tomará como valor inicial para la segunda parte de la ecuación diferencial (16). Esta segunda parte de la ecuación también se resuelve por variable separable, y tenemos:

$$\int \frac{dA}{0.05A-1000} = \int dt \qquad \text{A (10) = 8244}$$

Usando la sustitución u = 0.05A – 1000, entonces du = 0.05 dA o, 20 du = dA ya que 0.05 = 1/20. Se obtiene:

$$\int \frac{20du}{u}\ t+C$$

$$20ln|u| = t + C_1$$

Es decir:

$$20ln|0.05A - 1000| = t + C_1$$

Para alguna constante $C_1$. En t = 10, sabemos que A ≈ 8244

Entonces en t = 10:

$$\frac{dA}{dt} = 0.05A - 1000 \approx -587.8 < 0$$

Esto quiere decir que estamos retirando a una tasa que excede a la tasa a la que ganamos interés. Como dA/dt en t = 10 es negativa, A disminuirá y 0.05A – 1000 permanece negativa para t > 10. Si 0.05A– 1000 es negativa, entonces:

$$|0.05A - 1000| = -(0.05A - 1000) = 1000 - 0.05A$$

Como consecuencia se tiene:

$$20. \ln(1000 - 0.05A) = t + C_1$$

O:

$$\frac{ln(1000 - 0.05A)}{0.05} = t + C_1$$

Multiplicando a ambos lados por 0.05 y pasando a la forma exponencial, resulta:

$$1000 - 0.05A = e^{0.05(t+C_1)}$$

$$1000 - 0.05A = C_2e^{0.05t}$$

Donde $C_2 = e^{0.05C_1}$. Despejando A, obtenemos:

$$A = \frac{1000 - C_2e^{0.05t}}{0.05} = 20(1000 - C_2e^{0.05t}) = 20000 - C_3e^{0.05t}$$

donde $C_3 = 20C_2$ (aunque hemos sido cuidadosos para indicar las relaciones entre las constantes $C_1$, $C_2$ y $C_3$, necesitamos solamente recordar que $C_3$ es una constante determinable por las condiciones iniciales).

Ahora usaremos la condición inicial para determinar $C_3$. Sabemos que:

$$8244 \approx A\ (10) = 20000 - C_3\, e^{0.05\,(10)} \approx 20000 - C_3(1.6487).$$

Despejando $C_3$, obtenemos $C_3$ = 7130. Nuestra solución para t ≥ 10 es:

$$A\ (t) \approx 20000 - 7130\ e^{0.05t}$$

Vemos que:

$$A\ (11) \approx 7641$$

$$A\ (12) \approx 7008$$

Nuestra cuenta se está agotando, pero no por mucho tiempo. De hecho, podemos encontrar cuánto durarán los buenos tiempos, preguntando cuándo se acabará nuestro dinero. En otras palabras, resolveremos la ecuación A (t) = 0 para todo t. Tenemos:

$0 = 20000 - 7130e0.05t$ Lo que da: $T = 20\ ln\left(\frac{20000}{7130}\right) \approx 20.63$

Es decir que después de dejar que \$5000 se acumulen durante diez años, podemos retirar 1000 % anualmente por más de diez años.

## Ejemplo 13. Un problema de mezclado:

El nombre *problema de mezclado* se refiere a una gran colección de problemas diferentes donde dos o más sustancias se mezclan entre sí a distintas velocidades. Los ejemplos varían de mezclado de contaminación en un lago, a la mezcla de productos químicos en un tanque, a la difusión de humo de cigarrillo en el aire en un cuarto, a la mezcla de especias en un platillo de curry.

Consideremos un gran tanque que contiene sal y agua (salmuera), con los que se preparan ricos caldos. Suponga que:

- El tanque contiene 100 galones de líquido. Además, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que fluye hacia afuera, pero siempre hay 100 galones en el tanque.
- El tanque se mantiene bien mezclado, por lo que la concentración de salmuera es uniforme en todo el tiempo.
- La salmuera que contiene 5 cucharadas de sal por galón entra al tanque a través del tubo A, a razón de 2 galones por minuto.
- La salmuera que contiene 10 cucharadas de sal por galón, entra al tanque a través de un tubo B, a razón de 1 galón por minuto.
- La salmuera sale del tanque a través de un tubo C, a razón de 3 galones por minuto.

Encontrar el modelo para la concentración de sal en cualquier tiempo t.

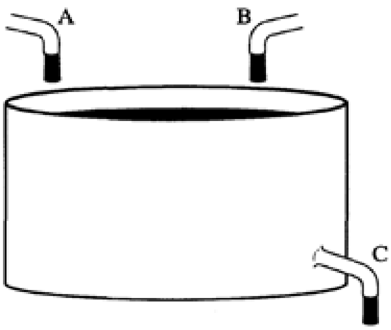
## Solución:

Para elaborar el modelo, tenemos en cuenta que t es el tiempo medido (la variable independiente). Para la variable dependiente, realmente se tendrían dos opciones; una escoger la cantidad total de sal S (t) en el tiempo t medida en cucharadas, o bien C (t), la concentración de sal en el tanque en el tiempo t medida en cucharadas por galón. Desarrollaremos el modelo para S (t), dejando el modelo para C (t) como un ejercicio. Usando la sal total S (t) en el tanque como variable dependiente, la razón de cambio de S (t) es la diferencia entre la cantidad de sal que se añade y la cantidad de sal que sale del tanque. La sal que entra al tanque llega por los tubos A y B y se puede calcular fácilmente, multiplicando el número de galones por minuto de la mezcla salmuera que entra al tanque por la cantidad de sal por galón. La cantidad de sal que sale del tanque por el tubo C depende de la concentración de sal en el tanque en ese momento. La concentración está dada por S (t) / 100, por lo que la sal que sale del tanque es del número de galones que salen por minuto (3 galones por minuto) y la concentración (S/100). El modelo es:

$$\frac{dS}{st} = (2).(5) + (1).(10) - (3).\left(\frac{S}{100}\right)$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Variación de la cantidad De sal | Entrada de sal Por el tubo A | Entrada de sal Por el tubo B | Salida de sal Por el tubo C |

**Figura 11.** Gráfica del tanque de mezcla para el problema 14.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

Es decir:

$$\frac{dS}{dt} = 20 - \frac{3S}{100} = \frac{2000-3S}{100}$$

¿Cuál es su punto de equilibrio? Para resolver esta ecuación analíticamente, separamos variables e integramos.

Encontramos que:

$$\frac{dS}{2000-3S} = \frac{dt}{100}$$

$$\frac{ln|2000-3S|}{-3} = \frac{t}{100} + C_1$$

$$ln|2000-3S| = -\frac{3t}{100} - 3C_1$$

$$ln|2000-3S| = -0.03t + C_2$$

Donde $C_2$ = - 3$C_1$. Tomando exponenciales obtenemos:

$$|2000-3S| = e^{(-0.03t+C_2)} = C_3e^{-0.03t}$$

Donde $C_3 = e^{C_2}$. Observemos que esto significa que $C_3$ es una constante positiva. Ahora debemos tener cuidado, ya que quitando los signos del valor absoluto resulta:

$$2000 - 3S = \pm C_3e^{-0.05t}$$

Donde escogemos el signo más si S (t) < 2000/3 y el signo menos si S (t) > 2000/3. Por lo tanto, podemos escribir esta ecuación en forma más sencilla como:

2000 – 3S = C4e-0.03t

Donde $C_4$ es una constante arbitraria (positiva, negativa o cero). Despejando S obtenemos la solución general:

$$S(t) = Ce^{-0.03t} + \frac{2000}{3}$$

Donde $C = -\frac{C_4}{3}$ es una constante arbitraria. Es posible determinar el valor preciso de C si conocemos la cantidad exacta de sal que se encuentra inicialmente en el tanque.

## Ejemplo 14. Otro problema de mezclado:

Un contenedor de 300 galones se encuentra lleno de agua a dos terceras partes de su capacidad con 50 libras de sal. Al tiempo t = 0 minutos, se abren las válvulas de manera que se agregue agua pura al contenedor a una velocidad de 3 galones por minuto. Si la mezcla bien agitada se extrae del contenedor a la velocidad de 2 galones por minuto. ¿Cuántas libras de sal se encuentran en el contenedor cuando este se llena (y todas las válvulas se cierran)?

### Solución:

Lo primero que notamos es que se está agregando más líquido por minuto que el que se está extrayendo, de modo que el nivel del líquido asciende y el número de galones en el contenedor aumenta. De hecho, podemos utilizar un argumento tipo conservación para advertir que la velocidad de cambio del volumen V de líquido en el contenedor (en galones por minuto) es igual a la velocidad de agregación (3 galones por minuto) menos la velocidad de drenado (2 galones por minuto). De esta manera:

$$\frac{dV}{dt} = Cantidad\ de\ entrada - cantidad\ de\ salida$$

$$\frac{dV}{dt} = 3 - 2 = 1\ galón\ por\ minuto. \quad V(0) = 2/3(300) = 200$$

Integrando nos da:

$$V(t) = t + C \text{ galones}$$

Donde C = 200, luego:

$$V(t) = t + 200 \text{ galones} \qquad (17)$$

Si y representa el número de libras de sal en el contenedor en el tiempo t, queremos hallar una ecuación para y basada en la ecuación de conservación del volumen (17), de modo que necesitamos encontrar la velocidad a la que se agrega la sal y la velocidad a la que se extrae, ambas en el tiempo t. La clave es concentrarse en las unidades de dy/dt al tiempo t, que en este caso son libras de sal por minuto. Así, las velocidades de agregación y de drenaje también deben estar en libras de sal por minutos en el tiempo t.

En primer lugar, consideremos la contribución de la velocidad a la cual se agrega la sal. El agua pura se está agregando al contenedor a razón de 3 galones por minuto, y para obtener las unidades de libras de sal por minuto, necesitamos multiplicar los 3 galones por minuto por el número de libras de sal por galón que se agregan, que en este caso es de 0 libras de sal por galón. De esta forma, (0) (3) = 0 libras de sal por minuto, que es la velocidad de agregación de sal en cualquier momento.

En segundo lugar, consideramos la contribución de la velocidad a la que desea extraer la sal. La salmuera está abandonando el contenedor a razón de 2 galones por minuto, y para obtener las unidades de sal por minuto necesitamos multiplicar los dos galones por minuto por el número de libras de sal por galón que se extrae. En el tiempo t el número de libras de sal en el contenedor es y (t), así que para obtener el número de libras de sal por galón en el tiempo t, dividimos y (t) por el número de galones en el contenedor al tiempo t, a saber V (t) = t + 200, lo cual da como resultado y / (t +200) libras de sal por galón en el tiempo t. De esta manera, la razón a la que la sal está abandonando el contenedor es de 2y/ (t+200) libras de sal por minuto.

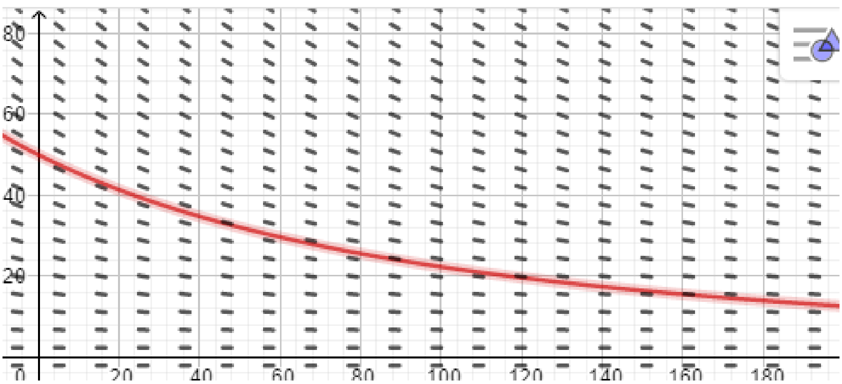
Con esta información vemos que la ecuación de conservación nos da:

$$\frac{dy}{dt} = (0)(3) - \frac{2y}{t+200} = -\frac{2y}{t+200} \quad (18)$$

Debido a que existen 50 libras de sal en el contenedor para t = 0, la condición inicial para esta ecuación diferencial es y (0) = 50. Esta ecuación diferencial es válida para 0 < t < 100.

Si examinamos el campo de pendientes para (18), observamos que todas las soluciones serán decrecientes y cóncavas hacia arriba para la región de interés (t > 0, y y > 0) (para convencerse de este hecho considere la ecuación (18) y el resultado de derivar esta ecuación). Observe también que el campo de pendientes hace caso omiso de la condición de que el contenedor esté lleno cuando t = 100. También se ha trazado la curva solución que pasa por el punto inicial (0, 50). De esta curva podemos calcular el valor de y (t) para t = 100 en aproximadamente 25 libras, lo que es una respuesta aproximada a nuestra pregunta original. Podemos obtener una mejor aproximación numérica usando el método de Euler, dado en la sección anterior, con un paso de $\Delta t$ = 1, encontrando que y (100) = 22.22 libras. Sin embargo, para obtener una respuesta debemos dar una solución explícita.

**Figura 12.** Gráfica del campo de pendientes con una solución particular del problema 15.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

La ecuación (18) es un tipo de ecuación diferencial que se puede resolver por separación de variables, esto es:

$$\frac{1}{y}\, dy = -\frac{2}{t+200} dt$$

Integrando:

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{2}{t+200} dt$$

O:

$$\ln y = - 2\ln (t + 200) + C$$

Resolviendo para y, tenemos:

$$y\,(t) = \frac{e^{C}}{(t+200)^2}$$

De la condición inicial y (0) = 50, encontramos que C = $50(200)^2$, de manera que la forma final de la solución será:

$$y\,(t) = \frac{50(200^2)}{(t+200)^2} \qquad (19)$$

Para contestar la pregunta original acerca de cuántas libras de sal se encuentran en el contenedor cuando se llena, notemos de la ecuación (19) que el contenedor estará lleno cuando t = 100, de modo que y (100) será la cantidad de sal en el contenedor en ese momento. De (18) tenemos que y (100) = 50 $(200)^2$ /$(300)^2$ = $22\frac{2}{9}$ libras de sal, lo que no está muy lejos de la aproximación inicial de 25 libras y corresponde adecuadamente a la solución numérica de 22.22.

## Ejemplo 15:

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+1}{y^3+1} \qquad (20)$$

En el primer cuadrante, es decir x > 0, y y > 0. Aplicando separación de variables a (19), tenemos:

$$(y^3 + 1)dy = (x^3 + 1)dx$$

Integrando:

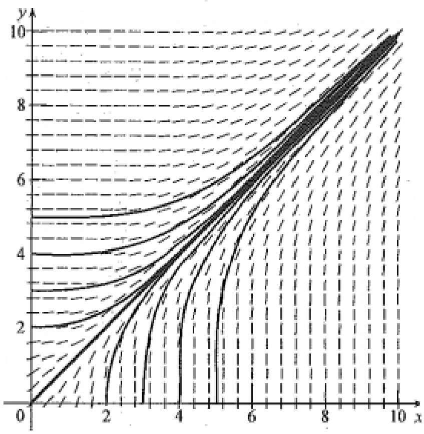
$$\frac{1}{4}y^4 + y = \frac{1}{4}x^4 + x + C$$

O:

$$y^4 - x^4 + 4(y - x) = C \qquad (21)$$

No se puede resolver y en términos explícitos de x. No podemos resolver esto ya sea para y (x) o para x (y). Aun así cuando tengamos una familia de soluciones implícitas, no tenemos ninguna gráfica de ellas. Sin embargo, podemos construir el campo de pendientes y dibujar unas cuantas soluciones a mano. Esta se ve en la figura 13.

**Figura 13.** Campo de pendientes y soluciones particulares del problema 16.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Sugiere que y = x es una solución. De hecho y = x satisface (21) cuando C = 0 y es por consiguiente, una solución de (20). Esta figura también sugiere que si y > x, la solución será creciente y cóncava hacia arriba, mientras que si y < x, la solución será creciente y cóncava hacia abajo. Utilizaremos el cálculo para ver si estas observaciones son precisas.

La derivada de (20) es positiva para x > 0 y, y > 0, de modo que las soluciones serán crecientes, como sugiere la figura 13. También note que las pendientes son más grandes que 1 si x > y, y más pequeñas que 1 si x < y.

Para decidir acerca de la concavidad, derivamos (20) y sustituimos para y/ de (20), proporcionando, después de numerosos cálculos algebraicos la expresión:

$$y^{//} = \frac{3}{(y^3+1)^3}(xy^3 + x + yx^3 + y)(xy^3 + x - yx^3 - y) \qquad (22)$$

Estamos interesados solamente en el primer cuadrante donde x > 0, y y > 0. Aquí el signo de y// está determinado enteramente por el signo del último término del lado derecho de la igualdad, a saber

$$xy^3 + x - yx^3 - y$$

Expresión que analizaremos ahora. La figura 13 sugiere que la concavidad en y = x, lo que significa que y = x es un factor de $xy^3 + x - yx^3 - y$. Y esto es cierto, ya que:

$$xy^3 + x - yx^3 - y = (y - x)(xy^2 + x^2y - 1) = x(y - x)\left(y^2 + xy - \frac{1}{x}\right)$$

$$(23)$$

De modo que el signo de y// lo determina el producto de estos tres términos de los cuales el primero, x, siempre es positivo. La figura 10 sugiere que el único cambio de signo de y// se presenta en y = x; es decir, cuando y – x = 0. Esto significa que el tercer término, $y^2 + xy - \frac{1}{x}$, no cambia de signo. Investiguemos esta posibilidad si pensamos en la ecuación:

$$y^2 + xy - \frac{1}{x} = 0$$

Como una ecuación cuadrática en y, resolviéndola, hallamos que:

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4/x}}{2}$$

Así, 23 puede escribirse como:

$$xy^3 + x - yx^3 - y = (y - x)\left(y + \frac{x - \sqrt{x^2 + 4/x}}{2}\right)\left(y + \frac{x + \sqrt{x^2 + 4/x}}{2}\right)$$

Debido a que estamos interesados en y > 0, y x > 0, el último término siempre es positivo, pero existe una posibilidad de cambio de signo de y a lo largo de la curva:

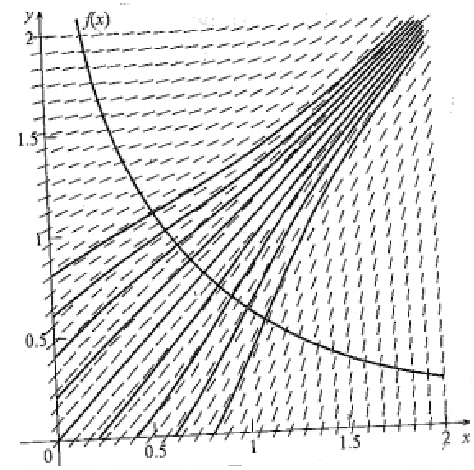
$$y = -\frac{x - \sqrt{x^2 + 4/x}}{2} \qquad (24)$$

Podemos preguntar dónde la curva 24 cruza a y = x, y responder que esto ocurre cuando:

$$x = -\frac{x - \sqrt{x^2 + 4/x}}{2}$$

Resolviendo esta ecuación tenemos que x = $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx\approx 0.7937$. Si examinamos la figura 13 de nuevo, vemos que está ocurriendo algo poco habitual acerca del origen. La figura 14 ilustra el campo de pendientes en la ventana 0 < x < 2, 0 <y < 2, junto con la curva dada por (24) y algunas curvas solución trazadas aproximadamente. El cambio de concavidad cerca del origen es ahora obvio. Sin el análisis de la concavidad, un examen superficial de la figura 14 no habría conducido a creer que una solución individual no podría cambiar de concavidad.

**Figura 14.** Gráfica de la solución del problema 16 con la solución de (24).




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

La figura 14 sugiere que si x → ∞, y (x) → ∞.

# 4.7 Ejercicios

1. Identifique las siguientes ecuaciones diferenciales como autónomas, separables o como ninguna de ellas (algunas de ellas pueden caer en más de una categoría). No intente resolver ninguna de ellas.

| | |
|---|---|
| a. $x^2y' - y^2 = 0$ | b. $y' - \text{sen}(x/y) = 0$ |
| c. $y\,y' - e^{xy} = 0$ | d. $y\,y' - e^{x+y} = 0$ |
| e. $y' - x + y = 0$ | f. $y' - y \text{ sen } x = 0$ |
| g. $y' + 4 + y^2 = 0$ | h. $y' - \ln x + \ln y = 0$ |
| i. $y' - ty = 0$ | j. $y' - t^4 y^2 = 0$ |
| k. $y' - 2y – 1 = 0$ | l. $y' + y - 2 = 0$ |
| m. $y' - t^2y – 1 - y - t^2 = 0$ | n. $y' - 1/(ty + t + y + 1)$ |

En los ejercicios 2 al 14, resuelva la ecuación diferencial. Integrales definidas son necesarias en los ejercicios con asterisco. Algunos ejercicios están en términos de otras variables tales como y, y t.

| | |
|---|---|
| 2. $\frac{dx}{dt} = \frac{x+1}{t}$ | 3. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2+r}{\theta}$ |
| 4. $\frac{dx}{dt} = e^t$ | 5. $\frac{dx}{dt} = e^{t+x}$ |
| 6. $\frac{dx}{dt} = tx + 4x + 3t + 12.$ | 7. . $\frac{du}{dt} = \frac{u^2+4}{t^2+4}$ |
| 8. $\frac{dx}{dt} = 3$ | 9. $\frac{dx}{dt} = t^2x^2$ |

10. $\frac{dx}{dt} = x^5, x(2) = 1$

11. $\frac{dx}{dt} = tx - 2x + t - 2$

12. * $\frac{dx}{dt} = x^2\cos(t^2), x(0) = 1.$

13. * $\frac{dx}{dt} = x^4\cos(t^{-1/2})$, x (0) =1

14. *. $\frac{dx}{dt} = t\, cos(t^{-1/2}), x(1) = 2$

15. $\frac{dx}{dt} = e^{t^2+x^2}$, x (2) = 4

Las ecuaciones del 16 al 18, requieren el método de fracciones parciales.

16. $\frac{dx}{dt} = x(x-1)$

17. $\frac{dx}{dt} = x^2(x-1)^2$

18. $\frac{dx}{dt} = (x-1)(x-2)^2$

En los ejercicios 19 al 25, cada ecuación diferencial de primer orden está escrita en forma diferente. Resuelva la ecuación diferencial.

19. $x^2dt + t^3dx = 0$

20. $(tx + x)dt + (tx + t)dx = 0$

21. $rsen\,\vartheta dr + \cos\theta d\theta = 0$

22. $(t^2 - 4)dz + (z^2 - 9)dt = 0$

23. $(+x)dt + (t^3 + 4t^2)dt = 0$

24. $e^{t+x}dt + e^{2t-3x}dx = 0$

25. $te^x dt + xe^{-t}dx = 0$

26. Resuelva los siguientes problemas con valor inicial, hallando una solución explícita donde sea posible. Confirme sus resultados mediante el uso de métodos gráficos y métodos numéricos.

a. x y y/ - y = 0 y (e) = 1

b. x y/ + $y^2$conx = 0 y (0) = $\frac{\pi}{2}$

c. x y y/ - (4 – $y^2$)$^{1/2}$ = 0 y (8) = 1

d. $(1 - x^2)^{1/2} y y' + y^3 = 0$ $y(1) = 1$

e. $(4x^2 + x - 1) y' + (8x - 1)(y+2) = 0$ $y(1) = -2$

f. $2(2 + y) y y' + y(1 - x^2) = 0$ $y(0) = -1$

g. $y \operatorname{sen} x + (y^2+1) e^{\cos x} y y' = 0$ $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

h. $3ye^{x^2} y y' + 1 = 0$ $y(1) = 2$

i. $3y^2 y y' - \operatorname{sen}(x^2) = 0$ $y(0) = 3$

j. $y' - 2yx/(x^2-1) = 0$, $y(2) = -6$

k. $y' - 2yx/(x^2-1) = 0$ $y(0) = 2$

l. $y' - 2yx/(x^2-1) = 0$ $y(-2) = -6$

27. Muestre que si tomamos la sustitución $z = at + bx + c$, con $b \neq 0$, entonces la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = f(at+bx+c)$$

Se cambia a una ecuación diferencial en z y t que se puede resolver por variables separables.

En los ejercicios 28 al 32, resuelva la ecuación diferencial usando el ejercicio 27.

28. $\frac{dx}{dt} = (t+x)^2$

29. $\frac{dx}{dt} = (t+4x-1)^2$

30. $\frac{dx}{dt} = \tan(-t+x+1)+1$

31. $\frac{dx}{dt} = e^{t+x}(t+x)^{-1}-1$

32. $\frac{dx}{dt} = \frac{t+x+2}{t+x+1}$

33. Una cubeta de 5 galones está llena de agua pura. Suponga que empezamos a añadir sal a la cubeta a razón de ¼ libra por minuto. Además, abrimos el grifo de manera que salga ½ galón por minuto de la cubeta, y agregamos agua pura para mantener llena la cubeta. Si la solución de agua salada está siempre bien mezclada, ¿cuál es la cantidad de sal en la cubeta después de?:

a. 1 minuto. b. 10 minutos. c. 60 minutos.
d. 1000 minutos. e. En un tiempo muy grande.

34. Una taza de chocolate caliente está inicialmente a 170 °F y se deja en un cuarto que tiene temperatura ambiente de 70 °F. Suponga que a partir del tiempo $t = 0$ se enfría a razón de 20° por minuto.

a. Suponga que es aplicable la ley de Newton sobre el enfriamiento: «La razón de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura en curso y la tem-pe-ratura ambiente». Escriba un problema de valor inicial que modele la temperatura del chocolate caliente.

b. ¿Cuánto tiempo le toma al chocolate caliente enfriarse a una temperatura de 110 °F?

35. Inicialmente un contenedor de 2000 galones se llena con agua pura. Al mismo tiempo $t = 0$ una concentración con 3 libras de sal por galón se agrega al contenedor a la velocidad de 4 galones por minuto y la mezcla bien agitada es drenada del contenedor a la misma velocidad.

a. Encuentre el número de libras de sal en el contenedor como una función del tiempo.

b. ¿Cuántos minutos le toma a la concentración en el contenedor para llegar a 2 libras por galón?

c. ¿A qué se aproxima la concentración en el contenedor para valores grandes del tiempo? ¿Coincide esto con su intuición?

36. Encuentre una constante K, tal que la siguiente ecuación sea separable:

$$\frac{dy}{dx} = (lnx)(lny) + ln(kxy)$$

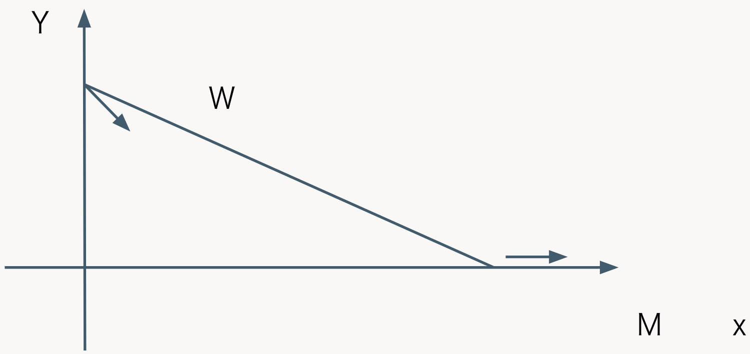
37. Una curva pasa por el punto (1, 1). En cada punto (x, y) de esta curva, la recta tangente pasa por el punto (2x, -y). Pruebe que la curva satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$$

Y encuentre la ecuación de la curva.

38. Un esquiador localizado en el punto W, se sujeta a mediante una cuerda de longitud L a un bote de motor (M), como se muestra en la figura 15.

**Figura 15.** Gráfica para el problema 38.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

El esquiador comienza en (0, 1) sobre el eje y mientras que el bote comienza en un punto sobre el eje x y se mueve hacia la derecha. El esquiador a viaja lo largo de una curva que recibe el nombre de tractriz. Encuentre una ecuación diferencial para esta curva y resuélvala para encontrar la ecuación de la curva (ayuda: la cuerda se encuentra siempre tangente a la curva).

39. Diga si las siguientes ecuaciones diferenciales son separables. Si lo son, haga la separación de las variables.

a. $\frac{dy}{dx} = x^3y^3 + x^3y^2 - xy^3 + y^3 - x^3 + x + y^2 - xy^2 - 1$

b. $\frac{dy}{dx} = con(x + y) + (senx)(cosy)^3$

c. $\frac{dy}{dx} = e^{x.y}$

40. ¿Qué cantidad de dinero se debe invertir al 19 % de interés, de tal manera que el valor de la inversión sea de \$1000 dólares después de 10 años? ¿Cuánto si el valor total de la inversión es de \$1000000 después de 100 años?

41. ¿Qué tasa de interés causará una inversión que se duplica en dos años?

42. La ley de enfriamiento (o calentamiento) de Newton establece que la temperatura T(t) de un cuerpo en el tiempo t cambia con una razón que es proporcional a la diferencia entre T(t) y la temperatura constante del medio $T_m$, esto es:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Donde k es una constante. Si T (t) > $T_m$, entonces el objeto se está enfriando y, en consecuencia, k debe ser negativa. La misma conclusión se cumple para k si T(t) < $T_m$, de manera que en cualquier caso se hace K negativa. Utilizando variables separables demuestre que:

$$T(t) = T_m + C\ e\ kt$$

Para alguna constante C.

a. Pruebe que C = T0 – $T_m$, donde To es la temperatura en el tiempo t = 0.

b. ¿Qué sucede a T (t) después de un periodo largo de tiempo?

---

43. Un tanque de 100 galones contiene una mezcla de 20 % de alcohol con agua en el tiempo t = 0. Supongamos que Q (t) representa la cantidad de alcohol en el tanque en un tiempo t cualquiera, de manera que, medido en galones, q (0) = 20. Suponga que se bombea la mezcla hacia afuera a una razón de 10 galones por hora y, al mismo tiempo, se reemplaza por una cantidad igual de una mezcla con 30 % de alcohol. Entonces, la razón de cambio Q (t) es:

$$\frac{dQ}{dt} = 3 - \left(\frac{1}{10}\right) Q(t)$$

(Cada hora se bombean 3 galones nuevos de alcohol hacia adentro; el segundo término representa la eliminación de un décimo de la mezcla presente). Encuentre la función para Q (t).

---

44. Modifique el problema 14, de tal manera que cada hora se reemplazan 10 galones de la mezcla de alcohol con agua por 9 galones de agua pura. Entonces, la ecuación diferencial apropiada es:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{10}{100-t}Q(t)$$

Resuelva la ecuación diferencial y determine la cantidad de alcohol que aún queda al cabo de 10 horas.

# CAPÍTULO 5.

# MÁS SOBRE MÉTODOS CUANTITATIVOS

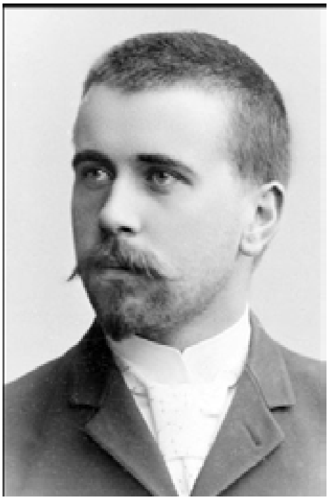
## Contenido



## Competencias

1. Identifica ecuaciones que se pueden llevar a variables separables.
2. Reconocer cambios de variables, que permiten obtener ecuaciones de variables separables.
3. Resuelve problemas mediante el método de variables separables.

**Figura 1.** Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946).



**Fuente.** Murdeshwar (1983).

Lindelöf nació en Helsinki el 7 de marzo de 1870 y murió también en Helsinki, el 4 de junio de 1946. Fue un matemático finlandés que trabajó fundamentalmente en análisis complejo y ecuaciones diferenciales.

Era hijo del matemático y astrónomo Lorenz Leonard Lindelöf y hermano del filólogo Uno Lorenz Lindelöf. Realizó sus estudios en la Universidad de Helsinki, donde defendió su tesis doctoral en 1893, bajo la dirección de Hjalmar Mellin. Posteriormente se convirtió en asistente y después en profesor de matemáticas en 1903. Fue miembro de la Sociedad Finlandesa de las Ciencias y las Letras. Dirigió un gran número de tesis, entre ellas las de Rolf Nevanlinna, Lars Ahlfors, Kalle Väisälä y de Pekka Myrberg.

Diversos teoremas llevan su nombre, entre ellos el teorema de Picard-Lindelöf y el espacio de Lindelöf, así como también el asteroide (1407) Lindelöf.

# Introducción

Volvemos en este capítulo a trabajar de manera más amplia el método cuantitativo o analítico, para resolver ecuaciones diferenciales. El método de separación de variables se aplica a ciertas ecuaciones que cumplen como se vio anteriormente, la condición de poder separar las variables en y, y en x. Pero este método es realmente muy importante ya que una gran cantidad de ecuaciones mediante cambios de variables se pueden llevar a variables separables como veremos en este capítulo.

# 5.1 Ecuaciones transformables en variables separables

Hay muchos tipos de ecuaciones diferenciales que no se pueden resolver inicialmente por variables separables, pero bajo cierto cambio de variable[1] se puede llegar a este tipo de ecuaciones, lo cual fue visto en la unidad 4.1

En ciertas situaciones, dos sustituciones especiales nos permiten transformar ecuaciones no separables, en ecuaciones separables. Estas son:

a. Sustitución lineal: u = ax + by + c (a, b y c constantes).
b. Sustitución racional: u $=\frac{y}{x}$. (Ecuaciones homogéneas)[2].

En cada caso u reemplaza a y, como función desconocida, y, x sigue siendo la variable independiente.

Caso a. Sustitución lineal: u = ax + by + c (a, b y c constantes).

1 Polyanin, A. y Zaitsev, V. (1995). Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. Boca Ratón, Florida: CRC Press.
2 Este uso del término Euler – homogénea es diferente del término lineal – homogénea que se usará más adelante.

## Ejemplo 1:

Resolver la ecuación diferencial utilizando una sustitución adecuada:

$$\frac{dy}{dx} = x + y \qquad (1)$$

### Solución:

Empleando la sustitución u = x + y, donde derivando respecto a x se tiene $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, es decir que $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$-1, luego la ecuación (1) se nos transforma en:

$$\frac{du}{dx}\text{-}1 = u$$

Que ahora se nos vuelve en variables separables:

$$\frac{du}{1+u} = dx$$

Integrando:

$$\int \frac{du}{1+u} = \int x\, dx$$

Se tiene: $\mathrm{Ln}\,(u + 1) = x + C$

Sustituyendo, se transforma en: $\mathrm{Ln}\,(x + y + 1) = x + C$

Resolviendo para y, tenemos: $y = C_1e^x - x - 1$

Caso b, la sustitución u = y/x

## Ejemplo 2:

Resolver la ecuación diferencial utilizando una sustitución adecuada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

## Solución:

Lo primero que se hace es separar la fracción del lado derecho, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} \qquad \textbf{(2)}$$

Y hacemos la sustitución u = $\frac{y}{x}$ , por lo tanto y = ux, derivando respecto a x se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Sustituyendo en la ecuación (2), se tiene:

$$u + x\frac{du}{dx} = 1 + u$$

Cancelado, u se tiene:

$$x\frac{du}{dx} = 1$$

Separando variables:

$$du = \frac{1}{x}dx$$

Integrando, tenemos:

$$u = \ln x + C$$

Sustituyendo u:

$$\frac{y}{x} = \ln x + C, \qquad \text{ó } y = x\ln x + C\,x$$

Los ejemplos 1 y 2 resueltos anteriormente ilustran los aspectos analíticos para una sustitución lineal o racional. Sin embargo, no es necesaria la habilidad de reconocer situaciones en las cuales una sustitución lineal o racional nos llevará a una ecuación separable. Existe una forma fácil de hacerlo: cualquiera de las situaciones lineal o racional, se aplica cuando la ecuación diferencial dada se puede escribir en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F(u)$$

Para alguna función F (u). En el ejemplo 1, F (u) = u (= x+ y), y el ejemplo 2, F (u) = 1 + u.

Se puede ver que es posible emplear la sustitución lineal para separar variables en cada uno de los siguientes casos:

## Caso b. Sustituciones de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+y} \quad u = x + y \quad \textbf{(3)} \qquad \frac{dy}{dx} = 2x\,y\text{-}\,x^2\text{-}y^2 \quad u = x - y \quad \textbf{(4)}$$

$$\frac{dy}{dx} = Ln(2x + 3y\text{-}1) \quad u = 2x + 3y - 1. \quad \textbf{(5)}$$

Las funciones en estos ejemplos son:

$$F(u) = \sqrt{u}$$

$$F(u) = -u^2$$

$$F(u) = \ln u.$$

La sustitución racional u = x/y, se aplica a ecuaciones como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,(Ln(y)\text{-}Ln(x)) \qquad (6)$$

Haciendo la sustitución, nos queda:

$$F(u) = u\,Ln\,u$$

Este mismo proceso se puede emplear para la ecuación diferencial:

$$(x\,y\text{-}\,2x^2)dy = (5x^2 + 2y^2)dx \qquad \textbf{(7)}$$

Para ver la sustitución racional vasta dividir por $x^2$, obteniendo:

$$\left(\frac{y}{x}\text{-}2\right)dy = \left(5 + 2\frac{y^2}{x^2}\right)dx$$

Y haciendo u = y/x, tenemos:

$$(u\text{-}2)dy = \ (5 + 2u^2)dx$$

O bien:

$$\frac{dy}{du} = \frac{5 + u^2}{u\text{-}2}$$

Veamos ahora por qué siempre las ecuaciones de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F(u) \qquad \textbf{(8)}$$

Donde u = ax + by + c o bien u = y/x, se pueden volver de variables separables, empleando la sustitución adecuada.

En el caso de la sustitución lineal u = a x + b y + c, se tiene:

$$d\,u = a\,dx + b\,dy$$

Si se multiplica (8) por la constante b y se sustituye b dy, por (du – a dx), se obtiene que:

$$\frac{du\text{-}adx}{dx} = bF(u)$$

O bien:

$$\frac{du}{dx} = a + bF(u)$$

Es claro que esta última ecuación es separable, independientemente de lo que sea F (u), y esto nos lleva a:

$$x + C = \int \frac{du}{a+bF(u)} \qquad \textbf{(9)}$$

Utilizando la ecuación (9), resolver las ecuaciones (3), (4), y (5), siempre que se aplique la sustitución lineal.

## Solución:

Para la ecuación (3) se tiene que F (u) = $\sqrt{u}$, por tanto, utilizando (8), tenemos:

$$x + C = \int \frac{du}{1+\sqrt{u}}$$

Para (4), se tiene:

$$x + C = \int \frac{du}{1+u^2}$$

Para (5), se tiene:

$$x + C = \int \frac{du}{2+3lnu}$$

El problema que sigue es el cálculo de las integrales, de manera analítica.

Cuando se hace la sustitución racional u = y/x en la ecuación (8), se tiene y = u x de modo que:

$$d\,y = x\,du + u\,dx$$

Sustituyendo en la ecuación (8), tenemos:

$$\frac{x\,du + u\,dx}{dx} = F(u)$$

$$\frac{x\,du}{dx} = F\,(u)\text{-}u$$

Separando variables se tiene:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{F(u)\text{-}u}$$

Y finalmente:

$$\ln x\ + C = \int \frac{du}{F(u)\text{-}u} \qquad \textbf{(9)}$$

Hemos probado el siguiente teorema:

### Teorema 1

Si una ecuación tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F(u)$$

Donde u = ax + by + c o bien u = y/x, y F (u) es una función que depende de u, entonces la ecuación es de variables separables, cuando se escribe en términos de x y u; y su solución se obtiene empleando (8) o (9).

## Ejemplo 4:

Aplique la ecuación (9) a la ecuación (3), para resolverla.

### Solución:

$$\text{Ln } x + C = \int \frac{du}{u\ln u - u}$$

Que se resuelve haciendo la sustitución z = ln u, de donde:

$$\text{Ln } x + C = \int \frac{dz}{z-1} = \ln(z-1)$$

$$z - 1 = C\,x, \text{ luego}$$

$$\ln u - 1 = C\,x, \text{ es decir } \ln u = C\,x + 1$$

$$u = e^{Cx+1}, \text{ entonces } y = xe^{Cx+1}$$

## Ejemplo 5:

Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

### Solución:

Haciendo u = $\frac{y}{x}$, entonces se tiene:

$$\text{Ln } x + C = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

Que se puede integrar haciendo la sustitución trigonométrica u = tan $\theta$, luego du = sec$^2$ $\theta$ d $\theta$, de donde se tiene:

$$\text{Ln x + C} = \int \frac{sec^2\theta d\theta}{\sqrt{1+tan^2\theta}} = \int \frac{sec^2\theta d\theta}{sec\theta} = \int sec\theta d\theta = ln\,(sec\theta + tan\vartheta)$$

De donde:

$$\text{Ln x +C} = \ln (u + \sqrt{1+u^2})$$

Por lo tanto:

$$u + \sqrt{1+u^2} = C_1 x \qquad \textbf{(11)}$$

En este punto se debería remplazar a u por y/x, sin embargo, es mejor primero simplificar más la ecuación (11), esto es:

$$\sqrt{1+u^2} = C_1 x\text{-}u$$

O:

$$1 + u^2 = (C_1 x - u)^2, \text{ entonces } 1 + u^2 = C_1^2 x^2\text{-}2C_1 xu + u^2$$

Luego:

$$1 = C_1^2 x^2\text{-}2C_1 xu, \text{ ó } 1 = C_1^2 x^2\text{-}2C_1 y$$

Por lo tanto:

$$y = \frac{1}{2}\left(C_1 x^2 - \frac{1}{C_1}\right)$$

Antes de resolver la ecuación (7), se observa que sugiere un tipo de ecuaciones que se conocen como solubles mediante una sustitución racional; es decir toda ecuación de la forma:

$$F(x, y)\, dy = G(x, y)\, dx$$

En la cual las funciones coeficientes F (x, y) y, G (x, y) son polinomios en x, y y, en donde el grado de cada término es n. Suponemos que los grados de cada polinomio es el mismo **(es por esto que dichas ecuaciones también reciben el nombre de**

**homogéneas de grado n donde n es el grado de cada término de los polinomios)**. En nuestro ejemplo todos los términos de los polinomios coeficientes son de grado 2, Como resultado, podemos dividir cada término por $x^2$ y se convierte en funciones en u de la forma u = y/x.

En general, esta sustitución funciona ya que:

$$\frac{Cx^m y^n}{x^{m+n}} = Cu^n$$

No existe razón alguna para que m y n, que aparecen en la fórmula anterior, se restrinjan a tomar valores enteros; así que la aplicabilidad de esta idea se extiende más allá de las ecuaciones en que las funciones coeficientes son polinomios. Por ejemplo la ecuación:

$$\left(x + \sqrt{xy}\right)dy = \sqrt[3]{xy^2}dx$$

Esta se puede considerar como una ecuación en la cual cada término en las funciones coeficientes tiene grado 1. En consecuencia, dividiendo entre x se convierten ambas en funciones de u.

En resumen, una ecuación de la forma:

$$F\ (x, y)\ dy = G\ (x, y)\ dx$$

Luego se convierte mediante la sustitución racional u = y/x a la forma:

$$H\ (u)\ dy = K\ (u)\ dx$$

En la cual H (u) y K (u) son funciones que dependen de u, entonces el resultado al sustituir dy, y separando variables es:

$$\text{Ln } x + C = \int \frac{H\ (u)du}{K(u)\text{-}uH(u)} \qquad \textbf{(12)}$$

## Ejemplo 6:

Resolver la ecuación:

$$(x\,y- 2x^2)\,dy = (5x^2 + 2y^2)\,dx$$

### Solución:

Observe que F (x, y) = x y – $2x^2$, y g (x, y) = $5x^2 + 2y^2$ son polinomios de grado dos. Lugo dividiendo por $x^2$, y haciendo la sustitución u = y/x, se tiene:

$$(u -2)\,dy = (5 + 2u^2)\,dx$$

O bien en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 + 2u^2}{u-2}$$

Por (12), tenemos que H (u) = u - 2, y K (u) = 5 + $2u^2$, entonces:

$$\text{Ln}\, x + C = \int \frac{(u-2)du}{5+2u^2-u(u-2)} = \int \frac{(u-2)du}{u^2+2u+5} = \frac{1}{2}ln(u^2 + 2u + 5)-\frac{3}{2}arctan\,(u + 1)$$

Reemplazando u =y/x, tenemos la respuesta:

$$\text{Ln}\, x + C = \frac{1}{2}ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} + 1\right)-\frac{3}{2}arctan\left(\frac{t}{x} + 1\right)$$

## Ejemplo 7:

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x + 1}$$

## Solución:

En este caso no podemos usar la sustitución u = y/x, ya que tenemos una constante en el denominador. Sin embargo, si se hace la sustitución t = x+1, y, u = y - 1, entonces la ecuación toma la forma:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{t+u}{t}$$

Esta ecuación se puede resolver haciendo la sustitución racional v = u/t. Observe que dt = dx, y du = dy. Se tiene que:

$$\frac{du}{dt} = 1 + v$$

De donde:

$$lnt + C = \int dv = v$$

Esta ecuación surge de aplicar (12) con las variables t, y u en lugar de x, y y. Entonces:

$$v = \ln t + c$$

O bien:

$$u = t \ln t + C\, t$$

Reemplazando u, y v tenemos:

$$y - 1 = (x + 1) \ln (x+1) + C(x+1).$$

## Ejemplo 8:

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{2x\text{-}y\text{-}4}$$

## Solución:

Con el fin de encontrar las relaciones entre las variables x, y y con las nuevas variables t y u, se hace:

$$x = t + A, \text{ y } y = u + B$$

Donde A y B son constantes que tenemos que averiguar, sustituyendo en la ecuación diferencial.

$$\frac{du}{dt} = \frac{t + A + u + \ B + 1}{2t + 2A\text{-}u\text{-}B\text{-}4}$$

Y queremos que A + B + 1, y 2A – B - 4 sean cero. Las ecuaciones:

$$A + B + 1 = 0$$

$$2\,A - B - 4 = 0$$

al resolver el sistema tenemos que A = 1 y B = - 2, de este modo el cambio de variables es:

$$x = t + 1, \quad \text{y, } y = u - 2$$

Haciendo la sustitución se obtiene:

$$\frac{du}{dt} = \frac{t + u}{2t\text{-}u}$$

que se puede resolver haciendo v = u/t.

El mismo cambio de variable empleado en el ejemplo 8, se puede aplicar a toda ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x + y + 1}{2x\text{-}y\text{-}4}\right)$$

Donde F es una función cualquiera. Por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x+y+1}{2x\text{-}y\text{-}4}}$$

Se convierte en:

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{t+u}{2t\text{-}u}} = \sqrt{\frac{1+v}{2-v}}$$

Donde v = u/t.

## En resumen

El cambio de variable:

x = t + A,   y = u + B

Se puede emplear para cualquier ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right) \qquad (13)$$

Siempre y cuando se pueda resolver para A, y B que satisfacen

a A + b B + c = 0

dA+ eB + f = 0.

## Ejemplo 9:

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y\text{-}1}{2x+4y\text{-}3}$$

## Solución:

Al formar el sistema:

$$A + 2B - 1 = 0$$

$$2A + 4B - 3 = 0$$

Este sistema no tiene solución, luego las dos rectas son paralelas. En este caso la solución se puede encontrar haciendo v = x + 2y – 1, ya que transforma la ecuación diferencial en:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{2v\text{-}1}$$

que se puede resolver aplicando (9).

En resumen, si en la ecuación diferencial (13) se tiene que a e = b d, (es decir las rectas son paralelas), y en este caso una sustitución lineal sirve para resolver la ecuación, en el caso en que no sean paralelas se puede resolver con las sustituciones racionales planteadas anteriormente.

En general, se puede emplear una sustitución lineal para una ecuación del tipo (13), siempre a e = b d. Y en todos los demás casos se puede resolver aplicando la sustitución racional v = u/t.

Se puede ver que la cantidad de ecuaciones que se pueden resolver mediante una sustitución lineal o racional, es mucho más amplia que lo planteado anteriormente.

## Ejemplo 10:

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x+y}\text{-}1$$

### Solución:

Esta ecuación a pesar de que f(x, y) no es lineal se puede resolver por separación de variables haciendo el cambio lineal u = x + y, luego du = dx + dy, esto es dy = du – dx, entonces la ecuación se transforma en:

$$\frac{du\text{-}dx}{dx} = \frac{x^2}{u}\text{-}1$$

Es decir:

$$\frac{du}{dx}\text{-}1 = \frac{x^2}{u}\text{-}1, \text{o}$$

$\frac{du}{dx} = \frac{x^2}{u}$, separando variables, tenemos:

u du = x$^2$ dx, integrando $\frac{u^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$, sustituyendo u por x + y, tenemos:

$$\frac{(x+y)^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$$

## Ejemplo 11:

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2 + y^2$$

### Solución:

La sustitución racional u = y/x, en este caso nos permite resolver esta ecuación, ya que y = u x, luego dy = u dx + x du, reemplazando en la ecuación tenemos:

$$\frac{xdu + udx}{dx} = u + x^2 + x^2u^2$$

$$x\frac{du}{dx} + u = u + x^2(1+u^2), \text{ó}$$

$x\frac{du}{dx} = x^2(1+u^2)$, separando variables, tenemos:

$\frac{du}{(1+u^2)} = xdx$, integrando:

Arctan (u) = $\frac{x^2}{2} + C$, ó

u = tan $\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$, remplazando el valor de u:

$$\frac{y}{x} = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right),$$

$$y = x\tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

## En resumen:

Se hace la sustitución racional, siempre y cuando el miembro de la derecha de la ecuación diferencial se pueda escribir en la forma:

$$u + G(x).H\,(u)$$

Donde u = y/x, y G(x) y H (u) son funciones que dependen de x y u, respectivamente. En otras palabras, la ecuación es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = u + G(x).H\,(u)$$

Entonces, cuando se reemplaza dy por x du + u dx, el resultado es la ecuación diferencial separable:

$$x\frac{du}{dx} = G(c).H(u)$$

que nos lleva a la ecuación de variables separables:

$$\int \frac{G(x)}{x}dx = \int \frac{1}{H(u)}du$$

La sustitución lineal u = x + y que se emplea en el ejemplo 10, tiene el mismo éxito en cualquier ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = G(x).H(u)\text{-}1, u = x + y$$

Más general, la sustitución u = a x + b y + c separa las variables en cualquier ecuación de esta forma:

$$\frac{dy}{dx} = G(x).H(u)\text{-}\frac{a}{b},\ u = ax + by + c \qquad (14)$$

Para ver esto multipliquemos (14) por b y reemplacemos b.dy por du – a dx:

$$\frac{du\text{-}adx}{dx} = bG(x).H(u)\text{-}a$$

$$\frac{du}{dx} = b.G(x).H(u)$$

que nos lleva a la fórmula:

$$\int G(x)dx = \int \frac{du}{bH(u)}$$

## Ejemplo 12:

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = xe^{x+y} + 2$$

### Solución:

En este caso, el término constante 2 sugiere la sustitución lineal. Si se sustituye u = - 2x + y, entonces –a/b = 2. Entonces du = -2dx + dy, de donde dy = du +2dx. La ecuación se puede escribir en la forma:

$$\frac{du+2dx}{dx} = xe^{3x+y}+2$$

$$\frac{du}{dx} + 2 = xe^{3x}e^{y} + 2$$

$\frac{du}{dx} = xe^{3x}e^{u}$, o separando variables

$\frac{du}{e^u} = xe^{3x}dx$, integrando $\int \frac{du}{e^u} = \int xe^{3x}dx$ tenemos:

$-e^{-u} = \frac{1}{3}xe^{3x}\text{-}\frac{1}{9}e^{3x} + C$ Sustituyendo u = -2x-+y

$$-e^{2x\text{-}y} = \frac{1}{3}xe^{3x}\text{-}\frac{1}{9}e^{3x} + C$$

$$e^{2x}e^{\text{-}y} + \frac{1}{3}xe^{3x}\text{-}\frac{1}{9}e^{3x} = C$$

# 5.2 Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios utilizando una sustitución lineal.

1. $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{(x\text{-}y)^2}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x+y+1}$

3. $\frac{dy}{dx} = (3x + y)^2\text{-}3$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{(2x\text{-}y+1)^2}{2x\text{-}y}$

5. $\frac{dy}{dx} = 5x + y\text{-}2$

6. $\frac{dy}{dx} = sen^2(x\text{-}y)$

Resuelva los siguientes ejercicios mediante una sustitución racional.

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x\text{-}y}{x+y}$

9. $2xydy = (x^2 + 3y^2)dx$

10. $(x\text{-}2y)dy = (4x\text{-}y)dx$

11. $x^2dy = (y^2 + xy\text{-}x^2)dx$

12. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

Resuelva los siguientes ejercicios, mediante una sustitución lineal o racional, cualquiera que sea la que se aplique.

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{2x+y}$

14. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2x+y}$

15. Dada la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y\text{-}x}$

a. Mediante una sustitución racional.

b. Mediante una sustitución lineal u = y – x.

16. Para la ecuación diferencial:

$(x^3 + xy^2)dy = (x^3 + 4x^2y + 2y^3)dx$

Resuélvala, mediante una sustitución racional como se indica:

a. Empleando dy = xdu+udx.

b. Empleando la fórmula (9).

c. Empleando la fórmula (12)

Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, indique cuál método se aplica:

a. Separación de variables.

b. Sustitución lineal.

c. Sustitución racional.

d. Ninguna de ellas.

17. $\frac{dy}{dx} = (x + y)e^{x+y}$

18. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} + \sqrt{\frac{x}{y} + 1}$

19. $\frac{dy}{dx} = xye^{x+y}$

20. $\frac{dy}{dx} = (x + y)(x\text{-}y)$

21. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x\text{-}y}{y\text{-}x+1}\right)^4$

22. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + e^x + e^y + 1$

23. $(x^3 + y^3)dy = xy\sqrt{x^2 + y^2}dx$

24. $\frac{dy}{dx} = senx\ seny + cosx\ cosy$

25. $\frac{dy}{dx} = sen(lnx)sen(lny) + \cos(lnx)\cos(lny)$

26. $\frac{dy}{dx} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

En las ecuaciones de los ejercicios 27 al 37, cada ecuación tiene la forma P (x, y) dx + Q (x, y) dy = 0. En cada caso, muestre que P y Q son homogéneas del mismo grado y halle su solución.

27. (x + y) dx + (x – y) dy = 0.

28. ($x^2$ – x y – $y^2$) dx + 4 x y dy = 0

29. $\left(x\text{-}\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx\text{-}ydy = 0$

30. $(\ln x - \ln y)dx + dy$

31. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

32. $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$

33. $(3x + y)dx + xdy = 0$]

34. $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x^2+y^2)}{xy^2-2x^3}$

35. $x^2y' = 2y^2 - x^2$

36. $y' = \left(7 + 2xe^{-\frac{y}{x}}\right)$

37. $\left(y + 2xr^{-\frac{y}{x}}\right) dx - xdy = 0$

38. Una curva tiene la propiedad de que para cualquier punto (x, y) sobre la curva, la línea tangente en (x, y) también pasa por el punto (y, x- 1).

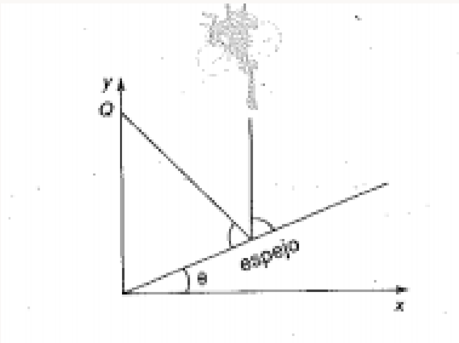
a. Pruebe que la curva satisface la ecuación diferencial:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{x-y}$

b. Resuelva esta ecuación diferencial mediante una sustitución apropiada. Encuentre una solución que pase por el punto (1, 0).

39. Un insecto se encuentra volando junto a una pequeña lámpara. La luz se dirige verticalmente hacia abajo apuntando a un espejo que tiene una inclinación de un ángulo $\theta$ y refleja la luz hacia una pared vertical. En todo momento el insecto vuela hacia el punto Q de la pared vertical, ¿dónde cae el reflejo de la luz? Vea la siguiente figura:

**Figura 2.** Gráfica del vuelo del insecto del problema 38.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

a. Pruebe que cuando el insecto se encuentra en el punto (x, y), Q tiene coordenada (0, kx), donde K = tan $\theta$ + cot(2 $\theta$)

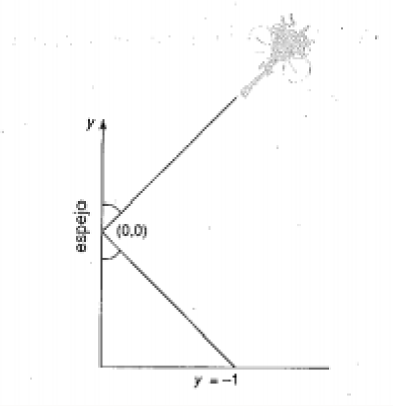
b. Pruebe que el movimiento del insecto satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\text{-}kx}{x}$$

Resuelva dicha ecuación mediante una sustitución adecuada.

40. Suponga que el insecto del problema anterior se dirige siempre con la lámpara hacia un punto fijo en un espejo vertical, a una unidad del piso. En todo momento, el insecto vuela hacia el reflejo de la luz en el piso. Empleando coordenadas como se ve en la figura (3), obtenga una ecuación diferencial para el movimiento resultante, y resuélvala mediante un método adecuado.

**Figura 3.** Vuelo del insecto para el problema 39.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

# 5.3 Más sustituciones que llevan a variables separables

**Figura 4.** Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903).

**Fuente.** Bell (2002).

Sigismund nació el 14 de mayo de 1832, y muere el 7 de octubre de 1903. Fue un matemático alemán, profesor en la Universidad de Bonn desde 1864. Supervisó el trabajo inicial de Felix Klein. Lipschitz dio su nombre a la condición de continuidad de Lipschitz y trabajó en una amplia gama de áreas, que incluyen teoría de números, álgebras con involución, análisis matemático, geometría diferencial y mecánica clásica.

Algunas veces se puede resolver una ecuación diferencial mediante una sustitución lineal o racional, si antes se ha convertido la ecuación en otra mediante una sustitución lineal o racional. Ya se ha visto que en ecuaciones de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + +C}\right)$$

Donde F es una función cualquiera, se puede usar este tipo de transformaciones.

## Ejemplo 13:

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = x(x^2 + 2y + 1)$$

### Solución:

Haciendo z = $x^2$, se tiene que d z = 2x dx. Dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2x, se puede reemplazar x por z como variable independiente, es decir:

$$\frac{dy}{2xdx} = \frac{1}{2}(x^2 + 2y + 1)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2}(z + 2y + 1)$$

Ahora se hace la sustitución lineal u = z + 2y +1 y así se puede llegar a variables separables:

$$\frac{2dy}{dz} = u$$

Pero du = dz + 2 dy, es decir que 2 dy = du – dz, por lo tanto:

$$\frac{du\text{-}dz}{dz} = u$$

Separando variables tenemos:

$$\frac{du}{dz} = u + 1, \quad \text{o} \quad \frac{du}{u} = z + 1$$

De donde:

$$\text{Ln u } + z^2 + z + C$$

$$u = e^{(z^2+z+C)}, \text{ o } u = C_1 e^{z^2+z}$$

Sustituyendo se tiene:

$$z + 2y + 1 = C_1 e^{z^2+z}$$

y sustituyendo z, se tiene la respuesta:

$$x^2 + 2y + 1 = C_1 e^{x^4+x^2}$$

## Ejemplo 14:

Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = y(x + lny)$.

### Solución:

En este caso dividimos por el factor y, y obtenemos:

$$\frac{y^{-1}dy}{dx} = x + lny$$

Que haciendo la sustitución:

$$d\,u = y^{-1}\,dy$$

Luego esto sugiere u = ln y, y esto transforma la ecuación en:

$$\frac{du}{dx} = x + u$$

Esta última ecuación nos lleva a la sustitución z = x + u, de donde dz = dx + du, y du = d z – dx, luego:

$\frac{dz\text{-}dx}{dx} = z$, separando variables:

$\frac{dz}{dx} = z + 1$, o

$\frac{dz}{z+1} = dx$, integrando:

$$\int \frac{dz}{z+1} = \int dx$$

Es decir que:

$$\text{Ln } (z + 1) = x + C$$

O:

$$z + 1 = e^{x+C}$$

$$z = e^{x+C} - 1,$$

z = $C_1 e^x$-1, reemplazando a z por su valor, se tiene:

$$x + u = C_1 e^x \text{-} 1$$

Y u por su igual:

$$x + \ln y = C_1 e^x \text{-} 1, \quad \text{o} \qquad \ln y = C_1\, e^{x-1} - z$$

$$y = e^{C_1 e^x \text{-} 1 - x}$$

## Ejemplo 15:

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ysenx}{y + cosx}$$

### Solución:

Dividiendo por sen x, tenemos:

$$\frac{dy}{senxdx} = \frac{y}{y+cosx}$$

Haciendo t = - cos x

se tiene d t = sen x dx que produce la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{y\text{-}1}$$

Separando variables tenemos:

$$\frac{y\text{-}1}{y}dy = dt, \text{ integrando}$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy = t + C$$

y – ln y = t + C sustituyendo se tiene:

$$y - \ln y = \text{-con } x + C$$

Observe que en los ejemplos 13, 14 y 15, se siguió un procedimiento en el cual se encuentra, en primer término, un factor del miembro derecho de la ecuación, que involucra tan solo una variable, y luego se dividen ambos miembros de la ecuación entre dicho factor. De esta manera el miembro derecho de la ecuación se simplifica, y el miembro izquierdo sugiere una sustitución posible para una de las variables. Aunque el procedimiento no puede garantizar el éxito, se puede aplicar rápidamente y, si no conduce a un buen resultado, se abandona.

## La sustitución $u = x^m y^n$

Otro método que resulta eficaz con frecuencia para convertir ecuaciones no separables en separables, involucra una sustitución de la forma:

$$u = x^m y^n$$

Donde m y n son números reales diferentes de cero.

### Teorema 2

La sustitución $u = x^m y^n$ transforma una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} F(u)$$

Donde F (u) puede ser una función cualquiera que depende de u, en una ecuación separable en términos de x y u.

## Ejemplo 16:

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - x^3 y^3$$

### Solución:

Si factorizamos y/x en la ecuación, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(x^2 y - x^4 y^2)$$

En la cual se hace la sustitución $u = x^2 y$, y tenemos $F(u) = u - u^2$. Pero de la sustitución propuesta se tiene que $y = x^{-2} u$, de donde:

$$dy = x^{-2} du - 2ux^{-3} dx,$$

De esta forma se tiene:

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u + u^2 - u^3}{x}$$

Separando variable, se obtiene:

$$\frac{du}{2u + u^2 - u^3} = \frac{1}{x} dx$$

Integrando:

$$\int \frac{du}{2u + u^2\text{-}u^3} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\text{-}\int \frac{du}{u(u^2\text{-}u\text{-}2)} = lnx + C$$

$$\text{-}\int \frac{du}{u(u+1)(u\text{-}2)} = lnx + C$$

Por fracciones parciales se tiene que:

½ ln u - 1/3 ln (u+1) – 1/6 ln (u-2) = ln x + C

El método empleado en el ejemplo 16 se puede generalizar para obtener una demostración del teorema 2.

Se comienza con la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\ F(u), \quad u = \ x^m y^n$$

Y se tiene tomando logaritmos que:

Ln u = m ln x + n ln y, derivando tenemos:

$$\frac{du}{u} = m\frac{dx}{x} + n\frac{dy}{y}$$

Esta ecuación la podemos escribir en la forma:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}\ F(u)$$

Multiplicando esta ecuación por n:

$$\frac{du}{u}\text{-}\ m\frac{dx}{x} = n\frac{dx}{x}F(u), \text{o}$$

$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}(m + nF(u))$, separando variables:

$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u(m+nF(u))}$, integrando: $\ln x = \displaystyle\int \frac{du}{u(m + nF(u))}$

Veamos un ejemplo que se puede resolver con la fórmula del teorema 2.

## Problema 17:

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{1}{x^2}$$

### Solución:

Si factorizamos y/x en la expresión, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(xy + \frac{1}{xy}\right),$$

Entonces hacemos el cambio de variable u = xy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

Aplicando la fórmula del teorema 2 con m=n= 1, se tiene:

$$\text{Ln } x = \int \frac{du}{u\left(1+u+\frac{1}{u}\right)} = \int \frac{du}{u+u^2+1} = \int \frac{du}{\left(u^2+u+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{2}} = \int \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

Haciendo z = u+$\frac{1}{2}$, entonces du = dz, y se tiene que:

$$\text{Ln } x = \int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dz}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}z\right)^2+1\right)} = \frac{4}{3} arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}z\right)$$

Es decir:

Ln x + C = $\frac{4}{3} arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}z\right)$, sustituyendo se tiene:

$$\text{Ln } x + C = \frac{4}{3} arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u + \frac{1}{2}\right)\right)$$

o, $\quad$ $$\text{Ln } x + C = \frac{4}{3} arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(xy + \frac{1}{2}\right)\right)$$

## Problema 18:

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\text{-}\sqrt[3]{y}$$

### Solución:

Reescribiendo la ecuación en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{y}\text{-}\frac{x}{y^{\frac{2}{3}}}\right)$$

Se puede ver que la ecuación diferencial se puede resolver haciendo la sustitución u = $x^3y^{-2}$. Con esta sustitución la ecuación se transforma en:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\sqrt{u}\text{-}\sqrt[3]{u}\right)$$

Sin embargo, esta transformación no nos ayuda mucho a la solución, ya que nos quedan unas raíces de diferente orden. Permitiendo que n y m sean fraccionarios podemos realizar un cambio de variable mucho más cómodo para resolver la ecuación diferencial, así:

u = $x^{\frac{1}{2}}y^{3}$, esta sustitución nos lleva a la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(u^3\text{-}u^2\right)$$

# 5.4 Ejercicios

En los siguientes ejercicios encuentre una sustitución que convierta cada ecuación en una que se pueda resolver mediante una sustitución lineal o racional. Reemplace x o y por las nuevas variables en la ecuación, y en cada caso indique la relación entre la variable x y la variable u:

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x^3+y}$
2. $\frac{dy}{dx} = e^x y^2 - 2e^{2x} y + e^{3x}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\sqrt{x^2 + y^2}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{cosx}{seny} + \frac{cosxcosy}{senxseny}$
5. $\frac{dy}{dx} = e^x(y + lnx)$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{x^2+(lnx)^2}$

En los problemas 7 al 14, encuentre una sustitución de la forma u = $x^m y^n$ que convierta cada ecuación dada en una ecuación de variables separables en términos de x y u.

7. $\frac{dy}{dx} = y^4 - xy^7$
8. $\frac{dy}{dx} = y^2 e^{xy}$
9. $\frac{dy}{dx} = x + \sqrt{y}$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x}$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+xy^3}{1-x^3y^3}$
12. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y - x^2}$
13. $\frac{dy}{dx} = x^3y^4 - 5x^{-5}y^{-2}$
14. $\frac{dy}{dx} = \left(2y + \frac{1}{x}\right)^2$

En cada ecuación de los problemas del 15 al 23, indique si el método que se aplica para resolver la ecuación diferencial es: a) separación de variables; b) sustitución lineal; c) sustitución racional; d) u = $x^m y^n$; e) ninguno de estos.

15. $\frac{dy}{dx} = y^2(lnx + lny)$
16. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y - 2y}{xy^2+4x}$

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

18. $\frac{dy}{dx} = \sqrt[6]{x^3 + y^2}$

19. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^4 + x^{-4}}$

20. $\frac{dy}{dx} = x + y^2$

21. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(x + y)^2$

22. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3y^2+x^5y^5}$

23. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 4xy + 4y^2$

# 5.5 Métodos adicionales para ecuaciones de primer orden

**Figura 5.** Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

**Fuente.** Katz (1998).

Louis Cauchy nació en París, el 21 de agosto de 1789 y murió en Sceaux, Lion, el 23 de mayo de 1857. Fue un matemático francés, miembro de la Academia de Ciencias de Francia y profesor en la Escuela Politécnica.

Cauchy ha sido uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos, solo superado por Leonhard Euler, Paul Erdős y Arthur Cayley con cerca de 800 publicaciones y siete trabajos; su investigación cubre el conjunto de áreas matemáticas de la época. Fue pionero en análisis donde se le debe la introducción de las funciones holomorfas, los criterios de convergencia de series y las series de potencias. Sus trabajos sobre permutaciones fueron precursores de la teoría de grupos, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. En óptica se le atribuyen trabajos sobre la propagación de ondas electromagnéticas.

### 5.5.1 Derivadas parciales y ecuaciones exactas

Con frecuencia algunas ecuaciones diferenciales de primer grado que no se pueden resolver por los métodos dados en la sección anterior, se pueden intentar resolver de otra forma. Veremos en esta sección otras formas de resolverlas.

Consideremos la ecuación:

$$y\,dx + x\,dy = 0 \qquad \textbf{(15)}$$

Es claro que esta ecuación es separable, sin embargo, hay otra forma de verla: el miembro izquierdo de dicha ecuación se puede ver como el resultado que se obtiene de calcular la regla del producto para diferenciales al producto x y. En otras palabras, si llamamos u = x y, entonces la ecuación (15) la podemos escribir como:

$$d\,u = 0$$

De lo anterior:

$$u = C$$

Reemplazando u por x y, tenemos:

$$x\,y = C$$

Que sería el mismo resultado si resolviéramos (15) por variables separables, como se hizo en la sección anterior.

## Ejemplo 19:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(y+2)\,dx + x\,dy = 0 \qquad \textbf{(16)}$$
$$(y+2)\,dx + (x + y^2)\,dy = 0 \qquad \textbf{(17)}$$
$$(ye^x+5x^4\ln y)dx + (x^5y^{-1} + e^x)dy = 0 \qquad \textbf{(18)}$$

## Solución:

La única diferencia de la ecuación (15) y (16) es el término extra 2.dx, por lo tanto, no resulta difícil ver cómo se debe modificar la situación que se empleó en (15) para resolver (16): si se hace u = x y + 2x, entonces el miembro izquierdo de (16) es igual du, en consecuencia, se tiene de nuevo:

$$d\,u = 0, \text{ o } u = C$$

Entonces la solución es:

$$x\,y + 2x = C$$

Haciendo el mismo análisis para (17) se encuentra el término extra $y^2dy$. De nuevo no resulta difícil ver cómo se modificará la sustitución, en este caso basta tomar:

$$u = x\,y + 2x + \frac{1}{3}y^3$$

Entonces el miembro izquierdo de (17) es igual a du, es decir que:

$$x\,y + 2x + \frac{1}{3}y^3 = C$$

Multiplicando por 3 se tiene:

$$3x.y + 6x + y^3 = 3C$$

Resolver (18) de la forma anterior es algo más difícil. Si se puede de alguna manera reconocer que el miembro de la izquierda de (18) es la diferencial de:

$$u = y\,e^x + x^5 \ln x$$

Entonces se puede obtener la solución:

$$y\,e^x + x^5 \ln x = C$$

De los ejemplos dados anteriormente, requerimos un procedimiento general que no sea necesariamente el ensayo y error.

## 5.5.2 Ecuaciones exactas

Tal como se dijo anteriormente, una ecuación que se puede escribir en la forma.

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{o} \qquad \textbf{(19)}$$

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

Donde M y N son ambas funciones de la variable independiente x y la variable dependiente y. Este es un tipo muy importante de ecuaciones generales.

Como es usual, una solución tiene que ser una función diferenciable y(x) definida para x en un cierto intervalo y que satisface la ecuación (19) en cada punto del intervalo. Descubriremos en nuestra discusión de la ecuación separable que es necesario permitir soluciones implícitamente definidas por ecuaciones de la forma:

$$F(x, y) = C$$

Observe que la ecuación trata a las dos variables x y, y simétricamente. No se hace ninguna distinción entre los dos. Es natural y conveniente simetrizar la ecuación diferencial también. Esto lleva al lenguaje de formas diferenciales.

Una forma diferencial en dos variables x y, y es una expresión de la forma:

$$w = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

Donde M y N son funciones de x y, y. Las formas simples dx y dy son llamadas diferenciales.

Si suponemos que y = y(x), entonces dy = y $'$(x) dx. Si sustituimos esto en la ecuación diferencial w, tenemos:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = (M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx})\, dx$$

Luego y es una solución de la ecuación diferencial (19) sí y solo sí:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \qquad \textbf{(20)}$$

Por esta razón, consideraremos a (20) como otra forma de escribir la ecuación diferencial (19). En general, en esta sección es la forma que utilizaremos.

## Ejemplo 20:

Consideremos la ecuación diferencial:

$$W = x\, dx + y\, dy = 0 \quad \text{o,} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Mostrar que esta ecuación diferencial tiene soluciones de la forma:

$$\mathbf{x}^2 + y^2 = C$$

### Solución:

Para verificar esto basta derivar implícitamente esta ecuación respecto a x, así:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0, \text{ o, } \; x\, dx + y\, dy = 0$$

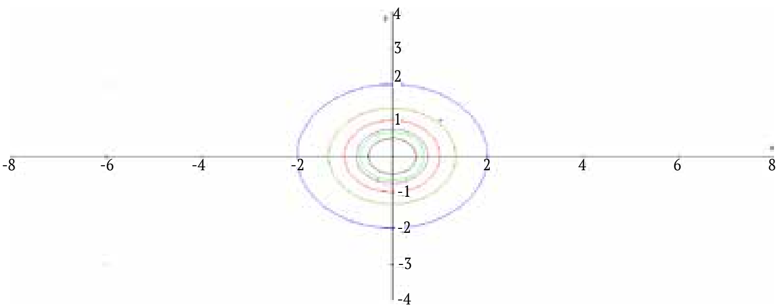
Despejando para y, obtenemos dos soluciones:

$$y\,(x) = \pm\sqrt{C - x^2}, \text{ definida para } |x| \leq \sqrt{C}$$

### 5.5.3 Curva solución y curva integral

El ejemplo anterior muestra algunos hechos que podemos enfatizar, ya que se aplica generalmente. Primero, el conjunto de solución de nivel está definido por $x^2 + y^2 = C$, cuyas gráficas son círculos centrados en el origen y de radio $\sqrt{C}$, $C \geq 0$ (figura 6). Este conjunto solución no es la gráfica de una función, pero contiene las gráficas de ambas funciones de las soluciones. Esto significa que el conjunto de nivel contiene dos curvas solución, lo cual da origen a la siguiente definición.

**Figura 6.** Curvas de nivel para $x^2 + y^2 = C$.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

**Definición**

Si las soluciones para la ecuación diferencial M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 estan dadas Implícitamente por la ecuación: F(x,y) = C

Entonces el conjunto de nivel definido por F(x, y) = C son llamadas curvas integrales de la ecuación diferencial.

Entonces, tenemos que una curva integral puede contener dos o más curvas solución, como se muestra en la figura 6.

Veamos ahora que significa que la ecuación:

$$F(x, y) = C \qquad \textbf{(21)}$$

Es una solución de la ecuación diferencial:

$$w = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad \textbf{(22)}$$

Supongamos que y = y(x) está definida implícitamente por la ecuación (21). Derivando esta ecuación con respecto a x, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, o \;\; \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad \textbf{(23)}$$

Y como y(x) es una solución de (22), tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \qquad \textbf{(24)}$$

Igualando (23) y (24), tenemos:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

o

$$\frac{1}{P}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q}\frac{\partial F}{\partial y} \qquad \textbf{(25)}$$

Si tomamos la función definida por (25) como $\mu = \mu(x, y)$, entonces se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu M \qquad y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu N \qquad \textbf{(26)}$$

Luego para encontrar la solución de la ecuación diferencial (22), tenemos que encontrar las funciones $\mu$ y F que satisfacen (26). Esta es una tarea enorme. La ecuación (22), se convierte en:

$$w = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

## 5.5.4 Ecuaciones diferenciales exactas

La tarea se hace más fácil si nos acercamos a ella de manera sistemática. Primero vamos a ver el caso más manejable cuando $\mu=1$ en (26). En este caso nuestra forma diferencial en:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \qquad y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

Daremos a estas formas un nombre especial.

**Definición**
La diferencial de una función continuamente diferenciable F es la forma diferencial:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Una forma diferencial se dice que es exacta si ella es la diferencial de una función continuamente diferenciable.

Vamos a señalar explícitamente que la forma diferencial es exacta si existe la función F(x, y) continuamente diferenciable, tal que:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

Esto significa que el coeficiente de dx y dy tienen que ser iguales, es decir que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \;\; y \;\; \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \qquad (27)$$

Además, si la forma w = M dx + N dy es exacta, y es igual al diferencial dF, entonces, por la discusión anterior las ecuaciones (26), la solución general para dF= M dx + N dy está dada por F(x, y) = C.

## Ejemplo 21:

Resolver la ecuación diferencial 2x dx + 4 $y^3$ dy = 0.

### Solución:

Usando las ecuaciones (27), podemos encontrar la función F(x, y) que satisfacen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \;\; y \;\; \frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3$$

Debido a que las variables se pueden separar en estas ecuaciones, es natural buscar una función F que sea la suma de una función de x y una función de y. Entonces, integrando ambas ecuaciones y sumando tenemos:

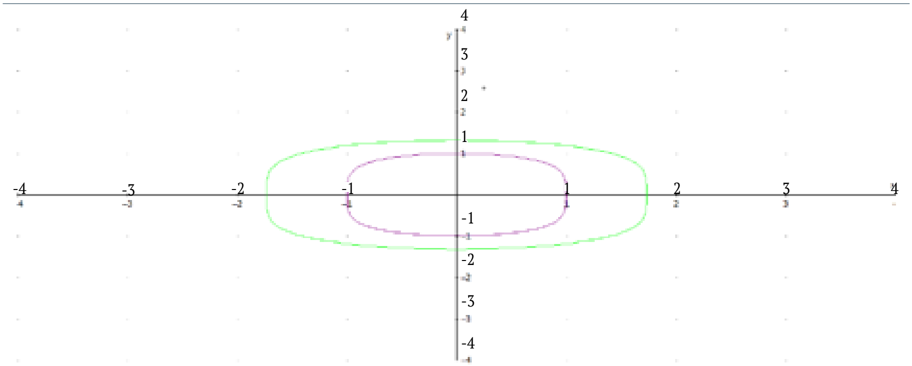
$$F(x, y) = x^2 + y^4$$

Como consecuencia, la forma diferencial 2x dx + 4 $y^3$ dy es exacta. En consecuencia, la solución general de la ecuación dada es:

$$x^2 + y^4 = C$$

Ver la siguiente figura de dos curvas de la solución general para C = 1 y C = 3.

**Figura 7.** Curvas solución para la ecuación x2 + y4 = C.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

El ejemplo 22 ilustra que es bastante fácil de resolver una ecuación diferencial que se pueda llevar a separación de variables, por lo cual queremos decir una ecuación de la forma:

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

Usando el método utilizado en el ejemplo 22, encontramos que la solución dada por F(x, y) = C, donde:

$$F(x, y) = \int M(x)dx + \int N(y)dy$$

Sin embargo, dos preguntas vienen a la mente con respecto a la cuestión general.

a. ¿Dada una forma diferencial w = M dx + N dy, ¿cómo saber si es exacta?
b. ¿Si una forma diferencial es exacta, existe una forma para encontrar F tal que dF = M dx + N dy?

Estas preguntas se responden mediante el siguiente teorema:

## Teorema

Sea w = M(x, y) dx + N(x, y) dy una forma diferencial donde M y N son continuamente diferenciables.

a. Si w es exacta, entonces:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \textbf{(28)}$$

b. Si la ecuación (28) es verdadera en una región rectangular R, entonces w es exacta en R.

## Demostración

Para probar la parte a, supongamos que w = d F, entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \qquad y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N \qquad \textbf{(29)}$$

Ambas M y N son continuamente diferenciables, luego F es doblemente continuamente diferenciable. Esto significa que las segundas derivadas mixtas de F son iguales. De donde:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Para la prueba de b, se necesita encontrar una función F que satisfaga ambas ecuaciones en (29). Si integramos la primera ecuación de $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, entonces por el teorema fundamental del cálculo tenemos:

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx \; + \; \emptyset(y) \qquad \textbf{(30)}$$

Donde $\emptyset$ es una función de y solamente. En esta fórmula $\int M(x,y)dx$ representa una integral indefinida particular, y $\emptyset(y)$ representa la constante de integración. Como integramos respecto a x, esta constante depende de y.

Para encontrar a $\emptyset$, derivamos ambos lados de (30) con respecto a y, obteniendo:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \; + \; \emptyset'(y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Por la segunda fórmula en (29) se tiene que $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, igualando y despejando a $\emptyset'(\boldsymbol{y})$, se tiene:

$$\emptyset'(\boldsymbol{y}) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx$$

Esta ecuación puede ser resuelta teniendo en cuenta que la integral de la derecha no depende de la variable x. Para ver que esto es verdadero, es suficiente mostrar que la derivada de la función de la derecha es cero. Tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y)-\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial M}{\partial y}dx=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{y}=0$$

Este último paso es verdadero por la hipótesis del teorema.

De lo visto hasta el momento, tenemos dos maneras para resolver una ecuación exacta. El primer método es el que se usó en el ejemplo 21, en donde se encontró la función F que satisface (27). La segunda forma, y más sistemática es usada en la prueba de la parte b del teorema.

Si la ecuación M(x, y) dx+ N(x, y) dy = 0 es exacta, la solución está dada por F(x, y) = C donde F se encuentra resolviendo (29), usando los siguientes pasos:

Resolver $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, integrando:

$$F(x, y) = \int M(x,y)dx \ + \ \emptyset(y). \qquad (31)$$

Resolver $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ usando (31) escogiendo $\emptyset$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \ \emptyset^{/}(y) = N(x,y)$$

También es posible resolver la ecuación diferencial, $integrando\ \frac{\partial F}{\partial y} = N$ primero para encontrar F(x, y) = $\int N(x,y)dy + \ \varphi(x)$ y luego resolver $\frac{\partial F}{\partial y} = M$ escogiendo la «constante» como $\varphi(x)$

## Ejemplo 22:

Muestre que la ecuación:

$$\text{Sen } (x + y)\, dx + (2y + \text{sen } (x + y)\,)\, dy = 0$$

Es exacta y encuentre la solución general.

## Solución:

En este caso tenemos que M(x, y) = sen (x + y), y, N(x, y) = 2y + sen (x + y), y:

$$\frac{\partial}{\partial y} M = \frac{\partial}{\partial y}\big(sen(x + y)\big) = cos(x + y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(2y + sen(x + y)\big) = cos(x + y)$$

Es decir que la ecuación diferencial es exacta. Para encontrar la solución general, necesitamos encontrar una función F(x, y) tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = sen(x + y) \quad \text{y,} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + sen(x + y) \qquad \textbf{(32)}$$

Integrando la primera ecuación respecto a x, se tiene:

$$F(x, y) = \int sen(x + y)dx \ + \emptyset(y) = -\cos(x + y) + \emptyset(y)$$

Luego:

$$F(x, y) = -\cos\,(x + y) + \emptyset(y)$$

Ahora, derivando con respecto y, esta ecuación tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = sen(x + y) + \emptyset^{/}(y) = 2y + \text{sen } (x + y)$$

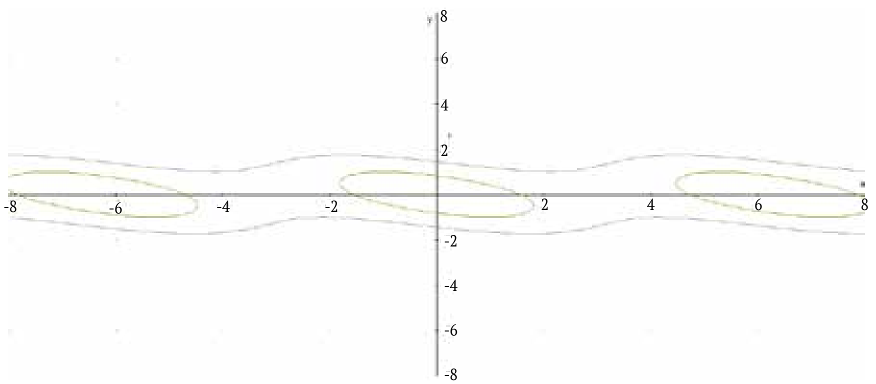
Entonces:

$\emptyset'(y) = 2y$, luego $\emptyset(y) = y^2$, Finalmente F(x, y) = $y^2$ – cos (x +y). De donde la solución implícita Está dada por:

$$F(x, y) = y^2 - \cos(x + y) = C$$

Dos curvas integrales de esta ecuación se muestran en la figura 8.

**Figura 8.** Dos curvas solución de F(x,y) = y2 – cos(x+y) = C.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

La de adentro es para C = 0 y la de afuera es para C = 2.

En algunos casos es más fácil resolver la otra ecuación en el orden opuesto, es decir, resolvemos primero la segunda ecuación en (32), integrándola:

$$F(x, y) = \int\big(2y + sen(x + y))\big)dy = y^2\text{-}cos(x + y) + \varphi(x)$$

Derivando e igualando a la primera ecuación, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = sen(x + y) + \varphi'(x) = sen(x + y)$$

Luego $\varphi'(x) = 0$, tomando $\varphi(x) = 0$. De nuevo tenemos que F(x, y) = $y^2\text{-}cos(x + y)$ = C.

## Ejemplo 23:

Muestre que la ecuación:

$$(3y + e^{x})dx + (3x + \cos y)\, dy = 0$$

Es exacta y encuentre la solución general.

### Solución:

Como $M(x, y) = 3y + e^x$ y $N(x, y) = 3x + \cos y$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3, \ \ y \ \ \frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

La ecuación diferencial es exacta, entonces existe una función F(x, y), tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3y + e^{x} \quad \text{y,} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3x + cos(y)$$

De la primera ecuación, se tiene que:

$$F(x, y) = 3yx + e^x + \emptyset(y)$$

Derivando con respecto a y, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x + \emptyset^{/}(y)$$

Igualando a la segunda ecuación, se tiene:

$$3x + \emptyset^{/}(y) = 3x + cos(y)$$

Luego:

$$\emptyset^{/}(y) = cos(y)$$

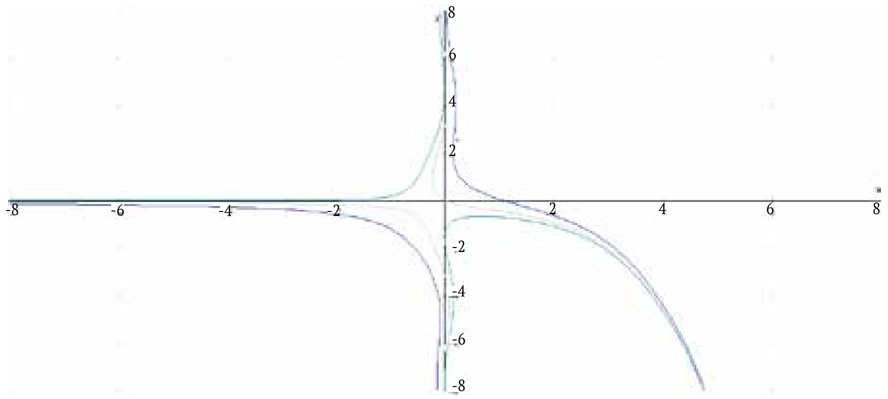
Es decir que:

$$\emptyset(y) = seny$$

De donde:

$$F(x, y) = 3xy + e^x + \text{sen } y = C.$$

**Figura 9.** Curvas solución de F(x,y) = 3xy + ex + seny = C.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

La figura 9 muestra las gráficas para C = 0, C = 1 y C = 3.

## 5.5.5 Factores integrantes

Hemos visto anteriormente, en la ecuación (26), que para resolver la ecuación diferencial P dx + Q dy = 0 tenemos que encontrar funciones $\mu$ y F que satisfagan:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu P, \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu Q$$

Tenga en cuenta que:

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = \mu P\,dx + \mu Q\,dy = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = dF$$

Es decir, que la forma $\mu(P\,dx + Q\,dy)$ es exacta. Esto nos lleva a la siguiente definición.

### Definición

Un factor integrante para la ecuación diferencial $\omega = P\,dx + Q\,dy = 0$, es una función $\mu(x,y)$ tal que la forma $\mu\omega = \mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy$ es exacta.

## Ejemplo 24:

Considere la ecuación $(x + 2y^2)\,dx\text{-}2xy\,dy = 0$. Muestre que la ecuación no es exacta y que $1/x^3$es un factor integrante. Encuentre la solución general.

### Solución:

Como:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x + 2y^2) = 4y \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x}(\text{-}2xy) = -2y$$

La ecuación no es exacta. Por otra parte, después de multiplicar la ecuación por $1/x^3$, tenemos la ecuación:

$$\frac{(x+2y^2)dx}{x^3} - \frac{2ydy}{x^2} = 0$$

Para esta ecuación se tiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}(x + 2y^2) = \right) = \frac{4y}{x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\text{-}\frac{2y}{x^2}\right)$$

Es decir que la ecuación es exacta y $1/x^3$ es un factor de integración. Para resolver esta ecuación tenemos:

$$F(x, y) = \int \frac{(x+2y^2)dx}{x^3} + \emptyset(\,y\,) = \text{-}\frac{1}{x}\text{-}\frac{y^2}{x^2} + \emptyset(\,y\,)$$

Para encontrar $\emptyset$, entonces derivamos esta expresión con respecto a y, usando el hecho de que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \text{-}\frac{2y}{x^2}, \text{ tenemos: } \text{-}\frac{2y}{x^2} = \text{-}\frac{2y}{x^2} + \emptyset^{/}(y)$$

Luego $\emptyset^{/}(y) = 0$, y podemos tomar a $\emptyset(\ y\ ) = 0$. En consecuencia, la solución general será:

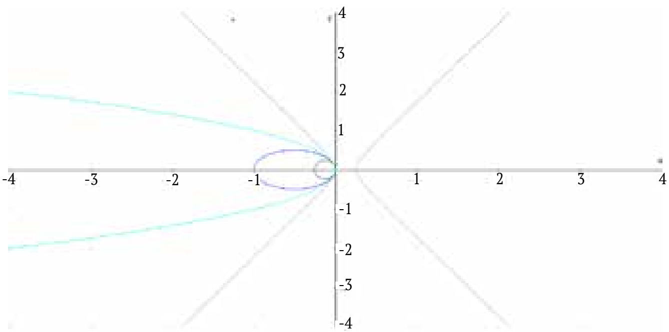
$$F(x, y) = -\frac{1}{x} - \frac{y^2}{x^2} = c$$

Si multiplicamos por $x^2$ y reorganizamos los términos de la solución, se tiene:

$$x + y^2 + C\,x^2 = 0$$

Entonces las curvas integrales son todas las cónicas a medida que le vamos dando valores a C.

**Figura 10.** Curvas solución para $x+y^2+Cx = 0$.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## 5.5.6 Encontrando factores integrantes que dependen solamente de una variable

Como se mostró en el ejemplo 22, podemos decir que tenemos una estrategia para encontrar la solución general de la ecuación diferencial M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, que consiste en:

- Encontrar el factor integrante $\mu$, tal que $\mu M(x,y)dx + \mu\, N(x,y)dy = 0$ es exacta.

- Encontrar una función F (x, y) tal que d F = $\mu M(x,y)dx + \mu\, N(x,y)dy$.

Entonces la solución general está dada por F(x, y) = C.

El procedimiento general para buscar un factor de integración se inicia desde el criterio de exactitud que encontramos en el teorema anterior, donde asumimos que $\mu$ = 1. Vamos entonces a suponer ahora que $\mu(x,y)\ \neq 1.$ Supongamos $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ y queremos encontrar $\mu$ tal que $\mu(x,y)\omega = \mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy$ sea exacta. De acuerdo a nuestro teorema, esto quiere decir que $\mu$ satisface el criterio:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y)) \quad (33)$$

Que es una ecuación diferencial parcial para $\mu(x,y)$. Veamos cómo es el procedimiento para resolver esta ecuación en general.

En el ejemplo 24 vimos que el factor integrante era $\mu = 1/x^3$, y en este caso $\mu$ solo depende de la variable x, también se puede ver que si $\mu$ depende solo de la variable y es fácil encontrar dicho factor integrante. Vamos a considerar estos dos casos. Es decir, vamos a considerar cómo se resuelve el problema cuando el factor $\mu$ depende solamente de una sola variable.

Vamos a averiguar cuando la ecuación:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

tiene un factor integrante $\mu(x)$ que depende solamente de x. Si $\mu$ no depende de la variable y entonces, la ecuación (33) se simplifica como:

$$\mu(x)\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d\mu}{dx}M(x,y) + \ \mu(x)\frac{\partial N}{\partial x}$$

Resolviendo para la derivada de $\mu$, tenemos:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \qquad (34)$$

Esta ecuación diferencial para $\mu$ tiene una que depende solo de x y es independiente de y, la expresión:

$$h(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \qquad (35)$$

que no depende de la variable y, y es una función solamente de x. Si esto es así, entonces de (34) se tiene que el factor integrante $\mu(x)$, es solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = h(x)\mu(x)$$

Esta ecuación es de variables separables y su solución es:

$$\mu(x) = e^{\int h(x)dx} \qquad (36)$$

Veamos un ejemplo de este caso:

## Ejemplo 25:

Resolver la ecuación:

$$(xy-2)dx + (x^2-xy)dy = 0$$

### Solución:

En este caso tenemos que $\frac{\partial M}{\partial y} = x$, y $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x-y$, es decir que no es exacta. Pero de acuerdo a la ecuación (34), tenemos que:

$$h = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{(x^2-xy)}[x-(2x-y)] = -\frac{1}{x}.$$

Como esta expresión es una función solamente de x, luego es un factor integrante que depende solamente de x, y este factor es una solución de la ecuación diferencial:

$$\mu' = -\frac{1}{x}\mu$$

La solución es $\mu = \frac{1}{x}$. Multiplicando la ecuación original por $\mu$, se obtiene la ecuación diferencial exacta:

$$\left(y - \frac{2}{x}\right)dx + (x-y)dy = 0$$

Es decir que:

$$F(x,y) = \int \left(y - \frac{2}{x}\right)dx + \emptyset(y) = xy - 2\ ln|x| + \emptyset(y)$$

Para encontrar $\emptyset(y)$, derivamos con respecto a y, obteniendo $\partial F/\partial y = x-y$.

Luego: $x - y = x + \emptyset'(y)$, o $\emptyset'(y) = -y$

Es decir una solución es $\emptyset(y) = -\frac{y^2}{2}$, y la solución total está dada por:

$$F(x, y) = xy - 2\ ln|x| - \frac{y^2}{2} = C$$

Podemos resolver esta ecuación para y usando la fórmula cuadrática, y encontramos que la solución es:

$$y(x) = x \pm \sqrt{x^2 - 4ln|x| - 2C}$$

De manera similar se puede analizar el caso cuando el factor integrante solamente depende de y, obteniendo en este caso que:

$$g(y) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

En resumen, podemos concluir que:

La forma M(x, y) dx + N(x, y) dy tiene un factor integrante, dependiendo de una de las variables bajo las siguientes condiciones:

$$\text{Si} \quad h = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

Es una función de x solamente, entonces $\mu(x) = e^{\int h(x)dx}$ es un factor integrante.

$$\text{Si} \quad g = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

Es una función de y solamente, entonces $\mu(y) = e^{-\int g(y)dy}$ es una factor Integrante.

## Ejemplo 26:

Encuentre el factor integrante para la ecuación diferencial:

$$2xy^3\, dx + (3\, x^2\, y^2 + x^2\, y^3 + 1)\, d\, y = 0 \qquad (37)$$

Y resuelva la ecuación.

### Solución:

Tenemos que, M(x, y) = $2xy^3$ y, N(x,y) = $3x^2y^2 + x^2\, y^3 + 1$, de donde se tiene que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2, y\ \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 + 2xy^3$$

Luego:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Es decir que no es exacta.

Veamos si el factor integrante depende de x, para esto calculamos la expresión:

$$h = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{(3\text{ x2 y2} + \text{x2 y3} + 1)}(6xy^2 - 6xy^2 - 2xy^3) = -\frac{2xy^3}{(3\text{ x2 y2} + \text{x2 y3} + 1)}$$

Que no depende solamente de x.

Veamos ahora la expresión:

$$g = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{2xy^3}(6xy^2 - 6xy^2 - 2xy^3) = -1$$

Que es independiente de x. Luego el factor integrante sería:

$$\mu(y) = e^{-\int g(y)dy} = e^{-\int -1dy} = e^{y}$$

Multiplicando la ecuación (37) por $e^y$, obtenemos la ecuación exacta:

$$2xy^3e^y\,dx + (3x^2y^2 + x^2y^3 + 1)\,ey\,d\,y = 0$$

Necesitamos encontrar una función F(x, y) , tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = 2xy^3e^y$$

Integrando respecto a x, se tiene:

$$F(x, y) = x^2y^3e^y + \emptyset(y)$$

Para encontrar $\emptyset(y)$, derivamos a F(x, y) respecto a y, e igualamos a N(x, y), para obtener:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2e^y + x^2y^3e^y + \emptyset^{/}(y) = (3\,x^2y^2 + x^2\,y^3 + 1)\,e^y,$$

de donde se tiene que:

$$\emptyset^{/}(y) = e^y, \text{ y por tanto } \emptyset(y) = e^y$$

Es decir que nuestra función solución es:

$$F(x, y) = x^2y^3e^y + e^y = C, o\ (x^2y^3 + 1)e^y = C$$

# 5.6 Ejercicios

Calcule la diferencial d F para la función dada F:

1. $F(x, y) = 2xy + y^2$

2. $F(x, y) = x^2 - x y + y^2$

3. $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

4. $F(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$

5. $F(x, y) = x y + \tan^{-1}(y/x)$

6. $F(x, y) = \ln (x y) + x^2y^3$

7. $F(x, y) = \ln (x^2 + y^2) + x/y$

8. $F(x, y) = \tan^{-1}(x/y) + y^4$

En los ejercicios 9 a 21 determine cuáles de las ecuaciones son exactas y resuelva las que sí lo sean:

9. $(2x + y)\, dx + (x - 6y)\, dy = 0$

10. $(1 - y \operatorname{sen} x)\, dx + (\cos x)\, dy = 0$

11. $\left(1 + \frac{y}{x}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0$

12. $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy = 0$

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+y}{3y^2-x}$

14. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x-t}$

15. $(u + v)\, du + (u - v)\, dv = 0$

16. $\frac{2u}{u^2+v^2} du + \frac{2v}{u^2+v^2} dv = 0$

17. $\frac{dr}{ds} = \frac{\ln s}{\frac{r}{s}-2s}$

18. $\frac{dy}{du} = \frac{2-\frac{y}{u}}{\ln u}$

19. $(sen2t)dx + \ (2x\ cos2t\text{-}2t)dt = 0$

20. $2xy^2 + 4x^3 + 2x^2y\ \frac{dy}{dx} = 0$

21. (2r + ln y) dr + r y dy = 0.

En los ejercicios 22 a 25, la ecuación diferencial no es exacta. Sin embargo, si se multiplica por el factor integrante dado se vuelve exacta, y entonces se puede resolver.

Resolver las siguientes ecuaciones:

22. $(y^2 - x\ y)\ dx + x^2\ dy = 0$, $\mu(x, y) = \frac{1}{xy^2}$

23. $(x^2y^2 - 1)\ y\ dx + (1 + x^2y^2)\ x\ dx$, $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$

24. $3(y + 1)\ dx - 2x\ dy = 0$, $\mu(x, y) = \frac{y+1}{x^4}$

25. $(x^2 + y^2 - x)\ dx - y\ dy = 0$, $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

26. Suponga que $y\ dx + (x^2\ y - x)\ dy = 0$, tiene un factor integrante que depende solamente de x. Encuentre el factor integrante y úselo para resolver la ecuación diferencial.

27. Suponga que $(x\ y - 1)\ dx + (x^2 - x\ y)\ dy = 0$, tiene un factor integrante que depende solamente de x. Encuentre el factor integrante y úselo para resolver la ecuación diferencial.

28. Suponga que $2y\,dx + (x + y)\,dy = 0$, tiene un factor integrante que depende solamente de y. Encuentre el factor integrante y úselo para resolver la ecuación diferencial.

29. Suponga que $(y^2 + 2xy)\,dx - x^2\,dy = 0$, tiene un factor integrante que depende solamente de y. Encuentre el factor integrante y úselo para resolver la ecuación diferencial.

30. Considere la ecuación diferencial $2y\,dx + 3x\,dy = 0$. Determine condiciones sobre a y b tal que $\mu(x, y) = x^a y^b$ sea un factor integrante. Encuentre un factor integrante particular y úselo para resolver la ecuación diferencial.

# CAPÍTULO 6.

# ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN Y MODELOS

## Contenido



## Competencias

1. Identificar la forma estándar de una ecuación diferencial lineal de primer orden.
2. Reconocer que en toda ecuación diferencial lineal de primer orden, su solución general es la suma de una solución particular y la solución de la homogénea.
3. Deducir la solución general de una ecuación diferencial lineal.
4. Aplicar la solución general de la ecuación diferencial lineal.

Figura 1. Jacques Bernoulli (1654-1705).

Fuente. Katz (2002).

Bernoulli nació en Basilea el 27 de diciembre de 1654, y murió el 16 de agosto de 1705, también conocido como Jacob, Jacques o James Bernoulli, fue un destacado matemático y científico suizo; hermano mayor de Johann Bernoulli (miembro de la familia Bernoulli). Introdujo las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y su hermano, Jean (1667-1748) las resolvió, pero Gottfried Leibniz (1646-1717) las resolvió como lo hacemos hoy en día. Los hermanos Bernoulli pertenecieron a una noble familia suiza que produjo 8 famosos matemáticos en solo cuatro generaciones.

# Introducción

La apariencia sencilla de las ecuaciones diferenciales de primer orden puede confundir a algunas personas y hacerles creer que son fáciles de resolver. A veces lo son, tal como se vio en el capítulo 4 y 5, pero con frecuencia, resolverlas no es un desafío menor. No existe un método general para resolver todas las ecuaciones diferenciales de primer orden. Los métodos existentes de resolución son aplicables a ciertos tipos de ecuaciones diferenciales y, por tanto, es necesario clasificarlas y estudiarlas en grupos separados. En este capítulo aprenderemos a reconocer las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, ya que estas siempre se pueden resolver usando un enfoque sistemático, es decir, mediante una fórmula general, tal como veremos.

# 6.1 Resolución de ecuaciones diferenciales lineales

En este capítulo consideramos las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = g(x) \quad (1)$$

Donde $a_1(x)$, $a_2(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un cierto intervalo I, y además $a_1(x) \neq 0$, para todo x en I. Estas ecuaciones se llaman ecuaciones lineales en la variable dependiente y.

Como $a_1(x) \neq 0$, para todo x en I, entonces podemos dividir toda la ecuación por $a_1(x)$, para obtener:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_2(x)}{a_1(x)}y\,) = \frac{g(x)}{a_1(x)} \qquad (2)$$

Si hacemos $P(x) = \frac{a_2(x)}{a_1(x)}$ y $Q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$ entonces nuestra ecuación (1) se transforma en:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (3)$$

A esta ecuación se le llama la forma estándar de la ecuación (1).

Estas ecuaciones diferenciales son comparativamente fáciles de resolver, y sus aplicaciones son frecuentemente dadas por tal ecuación. La función Q(x) es llamada **la función forzada**, o el **término no homogéneo**, dependiendo de su aplicación. Cuando la ecuación diferencial está escrita en la forma (3), Q(x) se le llama función de **entrada (input)**, y a la solución de la ecuación diferencial y(t) usualmente se le llama la función de **salida (output)**. Es importante entender cuáles ecuaciones diferenciales son lineales y cuáles ecuaciones no lo son. Una ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ **es lineal** si g(x, y) es una función lineal de y, como está escrito en (3).

La mayoría de los fenómenos en la naturaleza en realidad no satisfacen las ecuaciones diferenciales lineales. Sin embargo, en muchas aplicaciones, las soluciones de interés no difieren demasiado de las soluciones de una ecuación diferencial lineal. En este caso, la ecuación diferencial puede ser aproximada por una ecuación diferencial lineal. Como consecuencia, las ecuaciones diferenciales lineales juegan un papel fundamental en muchos lugares de la ciencia y la ingeniería.

# 6.2 Solución general de la ecuación diferencial lineal

Una solución particular $y_{p1}$ de la ecuación diferencial (3) es cualquier función $y_p(x)$ que satisface la ecuación diferencial (3). Esto es:

$$\frac{dy_p}{dx} + P(x)y_p = Q(x) \qquad (4)$$

Si Q(x) = 0, entonces la ecuación diferencial es llamada homogénea. Si Q(x) es idénticamente cero, la ecuación homogénea asociada a (4) es:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad (5)$$

Entonces una solución $y_h$ de la ecuación homogénea asociada satisface:

$$\frac{dy_h}{dx} + P(x)y_h = 0$$

Introducimos estas ideas de una solución particular y soluciones de la ecuación homogénea asociada, porque veremos que ellas juegan un papel muy importante en matemáticas y en física.

Mostraremos más adelante que:

La solución general de toda ecuación diferencial lineal de primer orden (3) siempre se puede dar como:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) \qquad (6)$$

Donde $y_p(x)$ es la solución particular dada en (4) y $y_h(x)$ es la solución general asociada a la ecuación homogénea dada en (5).

1 La solución $y_p$ es siempre llamada la solución particular. Aunque no hay nada especial al respecto. Ella es una solución simple de la ecuación diferencial no homogénea, incluso si las personas eligen soluciones diferentes, las diferencias entre ellas siempre serán una constante.

Además, mostraremos que:

La solución general de la ecuación lineal homogénea de primer grado es siempre de la forma:

$$y_h(x) = c.y_1(x) \qquad (7)$$

Donde $y_1$ es una solución no cero de la ecuación homogénea asociada y c es una constante arbitraria.

Así, el resultado clave es que:

Para la ecuación diferencial (3), todas las soluciones (la solución general) son de la forma de una solución particular $y_p(x)$ más c veces una solución $y_1(x)$ de la ecuación diferencial homogénea asociada, esto es:

$$Y(x) = y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + c.y_1(x) \qquad (8)$$

La ecuación (8) es muy importante. Usaremos la notación $y_1(x)$ de esta unidad, más adelante cuando hablaremos de ecuaciones lineales de segundo orden, en donde veremos que la solución de la ecuación diferencial homogénea está dada por dos funciones $y_1(x)$ y, $y_2(x)$.

Una verificación completa de los hechos dados en (6) y (7), se dará más adelante. Veamos, que $y(x) = y_p(x) + c\ y_1(x)$ satisface la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (9)$$

Si sustituimos $y(x) = y_p(x) + c\ y_1(x)$ en (9) para y, y ordenamos los términos que tiene c, entonces tenemos:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = \frac{d}{dx}\left(y_p(\mathrm{x}) + \mathrm{c}.y_1(\mathrm{x})\right) + P(x)\left(y_p(x) + cy_1(x)\right) = \frac{dy_p(x)}{dx} + P(x)y_p(x) + c\left(\frac{dy_1(x)}{dx} + P(x)y_1(x)\right).$$

Como $y_p(x)$ satisface (3) y, $y_1(x)$ satisface (5), entonces tenemos:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) + c.0 = Q(x)$$

Esto verifica que $y(x) = y_p(x) + cy_1(x)$ satisface (9).

De lo anterior se puede recomendar que se memorice el hecho de que la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden (9) es de la forma (8), donde la solución particular $y_p(x)$ satisface (5) y, $y_1(x)$ satisface la ecuación homogénea asociada a (5).

# 6.3 Solución de la ecuación diferencial homogénea de primer orden

La solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden (9), $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, siempre es de la forma y(x) = $y_p(x)$ + $cy_1(x)$. De donde necesitamos discutir métodos para hallar la solución $y_1(x)$ de la ecuación homogénea asociada y también de la solución particular $y_p(x)$. Por lo tanto, en esta sección veremos cómo obtener la solución de la ecuación homogénea asociada a (9) mediante separación de variables.

Consideremos la ecuación diferencial lineal de primer grado homogénea:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad (10)$$

Observemos que la función constante y(x) = 0 siempre es solución de dicha ecuación. Esta solución es llamada la solución trivial de la ecuación homogénea. De acuerdo a lo anterior, es bueno aclarar que cuando decimos que la solución general de la ecuación $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, es de la forma y(x) = $y_p(x)$ + $cy_1(x)$, nosotros asumimos que $y_1(x)$ no es la solución trivial.

Las soluciones no triviales de la ecuación homogénea, se pueden obtener mediante separación de variables a partir de (10), escribiendo:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

Es decir:

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + C_0$$

Donde $C_0$ es la constante arbitraria de integración. Tomando exponencial a ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene:

$$|y| = e^{C_0}e^{-\int P(x)dx} \qquad (11)$$

Observe que $C_0$ es una constante arbitraria, también que $e^{C_0}$ es una constante arbitraria positiva. Resolviendo (11) para y, se obtiene:

$$y = [\pm]e^{C_0-\int P(x)dx}$$

Si hacemos C = $\pm e^{C_0}$, entonces C es una constante arbitraria, y se tiene:

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)dx} \qquad (12)$$

Por separación de variables, se ha mostrado en (12) que la forma $cy_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial de primer grado homogénea, que es correcta y que podemos tomar a:

$$y_1(x) = e^{-\int P(x)dx} \qquad (13)$$

Si se requiere usar la integral definida, lo cual es a veces preferible si la función P(x) no es simple, entonces se puede obtener una expresión equivalente a (13):

$$y_1(x) = e^{-\int_a^x P(t)dt} \qquad (14)$$

El límite inferior a, puede ser escogido como alguna constante. Este es usualmente el valor inicial $x_0$ de x.

## Ejemplo 1:

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial homogénea de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$$

### Solución:

Como la ecuación es homogénea, por separación de variables tenemos:

$$\frac{dy}{y} = -\int x^2 dx$$

Integrando:

$$ln|y| = -\frac{1}{3}x^3 + C_0$$

Tomando exponencial a ambos lados:

$$|y| = e^{C_0} e^{-\frac{x^3}{3}}$$

Luego la solución general, será:

$$\mathrm{y}\ (\mathrm{x}) = \pm \mathrm{C} e^{-\frac{x^3}{3}},$$

Donde C es una constante arbitraria.

## Ejemplo 2:

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial homogénea de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + sen(x^2)\, y = 0$$

### Solución:

Separando variables, obtenemos:

$$\int \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = -\int \mathrm{sen}(\mathrm{x}^2)\mathrm{dx}$$

Integrando:

$$\ln|y| = -\int_0^x sen(z^2)dz + C_0$$

Donde escogemos el límite inferior como cero y como variable de integración z, tenemos:

$$|y| = e^{C_0}e^{-\int_0^x sen(z^2)dz}$$

Esto nos lleva a la solución general:

$$y = Ce^{-\int_0^x sen(z^2 dz)}$$

Donde C es una constante arbitraria.

# 6.4 Factores integrantes[2] para la ecuación diferencial lineal de primer orden

Teniendo ya un método para resolver la ecuación diferencial homogénea lineal de primer orden, necesitamos un método para obtener la solución particular; podemos discutir dos de ellos para obtener soluciones particulares. Un método usa un factor de integración que siempre trabaja para ecuaciones diferenciales lineales, pero los pasos algebraicos necesarios para llegar a una respuesta pueden ser difíciles. Más adelante describiremos otro método mucho más fácil, llamado de los coeficientes indeterminados. El mismo método es discutido para ecuaciones lineales de segundo orden. Desafortunadamente, solo funciona para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y solo en estos casos. Sin embargo, la técnica es muy útil en las aplicaciones.

Veamos entonces en qué consiste el método del factor integrante. Consideremos nuestra ecuación lineal en su forma estándar:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (15)$$

La idea para resolver la ecuación, es tratar de reducirla a variables separables, y para esto hacemos un cambio de variable de la forma[3]:

$$y(x) = u(x).z(x) \qquad (16)$$

2 Los dos grandes matemáticos del siglo XVIII, Leonard Euler (1707-1783) y Joseph Louis Lagrange (1736-1818) hicieron la mejor contribución para la solución $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, Euler resolvió la ecuación homogénea, introduciendo la expresión c$e^{-px}$ para p una constante, y Lagrange resolvió la ecuación no homogénea usando el método de variación de parámetros.

3 El método de variación de parámetros es muy útil ya que esa misma idea se utiliza para ecuaciones lineales de grado superior.

Donde z es la nueva variable dependiente y buscaremos una elección prudente de la función u(x), de modo que la ecuación sea transformada en separable. Por la regla del producto tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$$

Sustituyendo en (15), se tiene:

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + P(x)u(x)z(x) = Q(x)$$

Asociando, tenemos:

$$u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + P(x)\,u(x)\right)z(x) = Q(x) \qquad \mathbf{(17)}$$

Elegimos u(x) para que satisfaga la ecuación diferencial:

$$\frac{du}{dx} + P(x)\,u(x) = 0 \qquad (18)0{,}2$$

O en su forma separable:

$$\frac{1}{u(x)}\frac{du}{dx} = -p(x) \qquad (19)$$

Al seleccionar u(x) de esta manera reduce a (17) a la forma separable:

$$u\frac{dz}{dx} = Q(x)$$

Al dividir esta ecuación entre u(x) y hacer la integración, obtenemos:

$$z(x) = \int \frac{Q(x)}{u(x)}dx + C \qquad (20)$$

La función u(x) en el denominador de esta ecuación se encuentra al integrar (19), esto es:

$$ln|u(x)| = \int -P(x)dx \qquad (21)$$

Observe nuevamente que debido a que buscamos solamente una función específica, u(x), en este paso podemos igualar la constante arbitraria de integración a cero y elegir la solución positiva de u(x)

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx} \qquad (22)$$

Combinando (16) y (20) tenemos la solución y(x), para nuestra ecuación diferencial original como:

$$y(x) = u(x)\int \frac{Q(x)}{u(x)}dx + C\,u(x) \qquad (23)$$

Donde u(x) está dada por (22) y C es una constante arbitraria, si reemplazamos la expresión (22) en (23), se tiene:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \int \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}}dx + C\ e^{-\int P(x)d},\ \text{ó} \qquad (24)$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}}dx + C\right\}$$

La fórmula (24) nos muestra que en general la solución de una ecuación diferencial lineal de primer grado es de la forma y(x) = $y_p$(x) + C $y_h$(x), donde C es una constante arbitraria:

$$Y_h(x) = e^{-\int P(x)dx},\ \text{y} \qquad (25)$$

$$y_p(x) = e^{-\int P(x)dx} \int \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}}dx$$

Esta es una importante fórmula que aparece frecuentemente en aplicaciones. Sin embargo, cuando se resuelve un problema, no es buena idea memorizar este resultado. En cada aplicación es bueno repetir los siguientes pasos:

1. Calcule el factor integrante u(x) = = $e^{-\int P(x)dx}$, y simplifique.
2. Multiplique ambos lados de la ecuación diferencial lineal (15) por u(x) para obtener:
$$\frac{d}{dx}(u(x).y(x)) = u(x).Q(x)$$
3. Integre ambos lados con respecto a x para obtener u(x).y(x) = $\int u(x)Q(x)dx + C$
4. Divida por u(x) para obtener y(x).

## Ejemplo 3:

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer grado, utilizando el algoritmo anterior:

$$x\frac{dy}{dx} - 3y = x^4$$

Para x > 0.

### Solución:

Para empezar, debemos llevar la ecuación diferencial a su forma estándar, es decir debemos dividir por x la ecuación dada:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^3 \qquad (26)$$

Luego tenemos que P(x) = $-\frac{3}{x}$, y por tanto, el factor integrante será:

$$u(x) = e^{-\int \frac{3}{x}dx} = e^{-3lnx} = e^{lnx^{-3}} = x^{-3}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación (26) por el factor integrante y tenemos:

$$\frac{1}{x^3}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y\right) = \frac{1}{x^3}x^4 = x$$

Es decir que el lado izquierdo de la igualdad anterior es la derivada exacta de y veces el factor integrante:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}y\right) = x \qquad (27)$$

Por definición de integración se tiene de (27) que:

$$\frac{1}{x^3}\cdot y = \frac{x^2}{2} + C$$

Despejando y, tenemos:

$$y(x) = \frac{x^5}{2} + Cx^3$$

## Ejemplo 4:

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer grado utilizando el algoritmo anterior:

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3 e^{-2x}$$

Para x > 0.

### Solución:

Para empezar, debemos llevar la ecuación diferencial a su forma estándar, es decir debemos dividir por x la ecuación dada:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 e^{-2x} \qquad (28)$$

Luego tenemos que P(x) = $-\frac{2}{x}$ y por tanto, el factor integrante será:

$$u(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación (28) por el factor integrante y tenemos:

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y\right) = \frac{1}{x^2}x^2 e^{-2x} = e^{-2x}$$

Es decir que el lado izquierdo de la igualdad anterior es la derivada exacta de y veces el factor integrante:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = e^{-2x} \qquad (29)$$

Por definición de integración se tiene de (27) que:

$$\frac{1}{x^2}.y = \int e^{-2x}dx \ + C = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

Despejando y, tenemos:

$$\text{y (x)} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + Cx^2$$

## Ejemplo 5:

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer grado, utilizando el algoritmo anterior:

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

Para x > 0.

### Solución:

Para empezar, debemos llevar la ecuación diferencial a su forma estándar, es decir debemos dividir por x la ecuación dada:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 4x \qquad (30)$$

Luego tenemos que P(x) = $\frac{2}{x}$ y por tanto, el factor integrante será:

$$\text{u(x)} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2lnx} = e^{lnx^2} = x^2$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación (30) por el factor integrante y tenemos:

$$x^2\left(\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y\right) = \ 4x^3$$

Es decir que el lado izquierdo de la igualdad anterior es la derivada exacta de y veces el factor integrante:

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = 4x^3 \qquad (31)$$

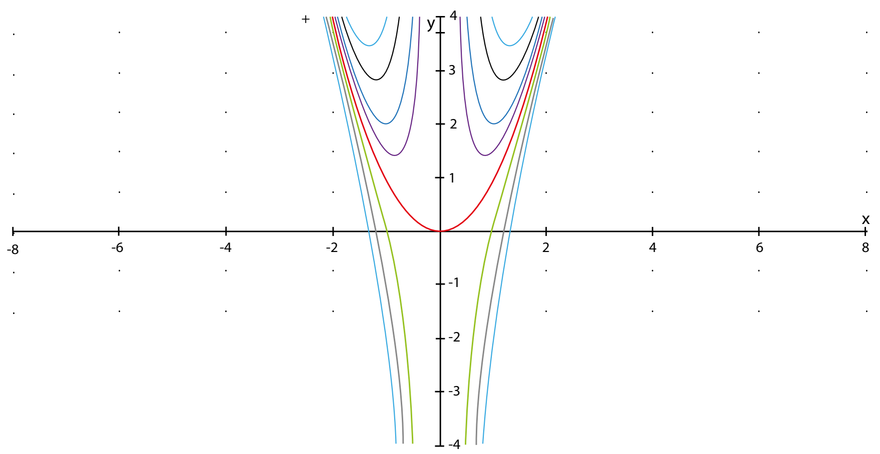
Por definición de integración se tiene de (31) que:

$$x^2.y = \int 4x^3dx \; + C = \; x^4 + C$$

Despejando y, tenemos:

$$y\,(x) = x^2 + Cx^{-2} \quad (32)$$

**Figura 2.** Gráfica de las curvas solución de 32.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Vemos que (32) contiene dos tipos de soluciones, aquellas en las que y está definida para x = 0 (a saber, cuando C = 0, de modo que y = $x^2$) y aquellas en las cuales y no está definida en x = 0 (a saber, cuando C$\neq 0$ ).

La figura 2 ilustra varias curvas solución de (32), incluyendo la curva y = $x^2$. Vemos que el campo de pendiente es simétrico con respecto al eje y.

También notamos de la figura 2 que a medida que x $\rightarrow 0$ desde la izquierda, todas las curvas solución (exceptuando y(x)= $x^2$) tienden a $\infty$ si la curva solución comienza arriba de y = $x^2$, y tienden hacia -$\infty$

si la curva solución comienza por debajo de $y = x^2$. De modo que $y = x^2$ es una solución inestable a medida que $x \to 0$ desde la izquierda.

Para $x > 0$, todas las curvas solución en la figura 2 parecen ir hacia ∞ a medida que $x \to \infty$; además, todas ellas parecen aproximarse a $y = x^2$ a medida que $x \to \infty$. De manera que $y(x) = x^2$ es una solución estable cuando $x > 0$ y $x \to \infty$.

Estas observaciones hechas al examinar la figura 2 pueden confirmarse directamente de la solución (32). Finalmente, notemos que de (32) la única solución que es válida para toda x es la que se tiene cuando $C = 0$, a saber $y(x) = x^2$.

***Coeficientes discontinuos.*** En aplicaciones de las ecuaciones lineales, los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ en (15) pueden ser continuos a trozos o por tramos. En el siguiente ejemplo $Q(x)$ es continua a trozos en $[0,\infty)$ con una sola discontinuidad, en particular un salto finito discontinuo en $x = 1$. Se resuelve el problema en dos partes correspondientes a los dos intervalos en los que $Q(x)$ está definida. Es entonces juntar las partes de las dos soluciones en $x = 1$ de manera que $y(x)$ sea continua en $[0,\infty)$.

## Ejemplo 6. Un problema con valor inicial:

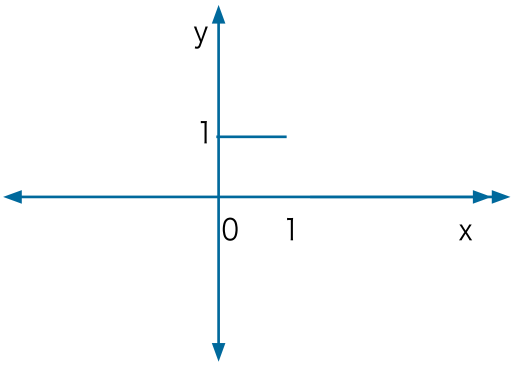
Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + y = Q(x), \text{ con } y(0) = 0, \text{ donde } Q(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & si\ x > 1 \end{cases}$$

### Solución:

La gráfica de la función $Q(x)$ es la siguiente:

**Figura 3.** Gráfica de la función Q(x).




**Fuente.** Elaborada por el autor.

En la figura 3 se muestra la gráfica de la función discontinua Q(x). Se resuelve la ecuación diferencial en dos partes, primero tomando x en el intervalo [0, 1] y después en el intervalo (0, ∞).

Luego para $0 \leq x \leq 1$, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} + y = 1$$

Por lo tanto, se tiene P(x) = 1, Q(x) = 1 y entonces el factor integrante sería:

$$U(x) = e^{\int 1dx} = e^{x}$$

Multiplicando por el factor se tiene:

$$e^{x}\frac{dy}{dx} + ye^{x} = 1.e^{x}, \text{o}$$

$$(e^{x}y)^{/} = e^{x}$$

Integrando:

$$e^{x}y = e^{x} + C_1$$

Despejando y, se tiene:

$$y = 1 + \frac{C_1}{e^{x}}$$

Por la condición inicial se tiene que:

$$0 = 1 + \frac{C_1}{e^0}, \text{ es decir que } C_1 = -1$$

Luego para x en el intervalo [0, 1], la solución es y = 1 - $e^{-x}$

Entonces para x > 1, la ecuación diferencial será:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Que por separación de variables se obtiene:

$$\frac{1}{y} dy = -dx$$

O:

Ln y = -x + C, de la cual se puede concluir que y = $C_2e^{-x}$ para x > 1

En resumen, se tiene que:

$$y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ C_2e^{-x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que la función y(x) debe ser continua en x = 1[4], entonces es posible calcular la constante $C_2$, ya el $lim_{x\to 1} y(x) = y(1) = lim_{x\to 1}(1 - e^{-x}) = 1 - e^{-1}$= $C_2e^{-1}$ de donde $C_2$ = e – 1.

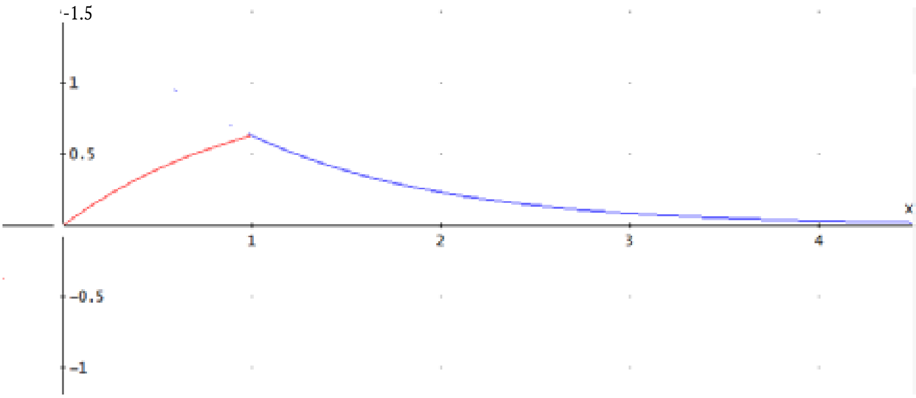
Luego la función buscada es:

$$y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ (e-1)e^{-x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Y es continua en $[0, \infty)$

4 Recuerde que los símbolos ($x_0^+$) y (respectivamente y ($x_0^-$) denotan el límite de y(x) cuando x se aproxima a $x_0$ con valores de x mayores o menores que $x_0$.

**Figura 4.** Gráfica de la función Y(x).




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 7. Funciones definidas por integrales:

Como último ejemplo de esta sección veremos un problema en donde se da una función continua simple elemental que no tiene antiderivada, que son funciones simples elementales y que su integral es de la clase de funciones que se llama no elementales. Como ejemplo, el hecho de que algunas funciones continuas simples no tienen antiderivadas fue vista en el capítulo 1, ejemplo 4, donde apareció la función de error.

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2; \;\; y(0) = 1$$

### Solución:

La ecuación ya se encuentra en la forma estándar, por lo tanto, se tiene que:

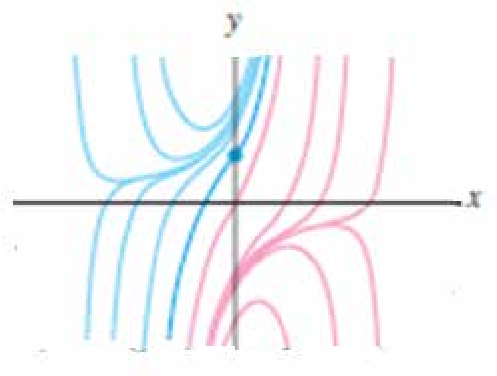
P(x) = -2x, y Q(x) = 2, es decir que, el factor integrante, $\mu(x) = e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2}$, luego:

$\left(ye^{-x^2}\right)' = 2e^{-x^2}$, de donde se obtiene y = $2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + Ce^{x^2}$

Aplicando, la condición inicial y (0) = 1, en la última expresión obtenemos C = 1; por lo tanto:

$$y = y = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2} \text{ o, } y(x) = e^{x^2}\left[1+\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,(x)\right]$$

**Figura 5.** Gráfica de la familia solución de la ecuación diferencial.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

En la figura 5 se muestra en azul la gráfica de esta solución en el intervalo $(-\infty, \infty)$, junto con otros miembros de la familia definida en la ecuación anterior, obtenidas con la ayuda de un sistema algebraico de computación.

## 6.5 Ejercicios

En los ejercicios 1-10, encuentre la solución general mediante la separación de variables. Problemas donde se necesita una integral definida se indican con asterisco.

1. $\frac{dy}{dx} = 3y$

2. $\frac{dy}{dx} = -8y$

3. $\cdot\frac{dy}{dx} = 2yx$

4. $\frac{dy}{dx} = -x^3y$

5. $2x\frac{dy}{dx} + y = 0$

6. $2x\frac{dy}{dx} - y = 0$

7. $\frac{dy}{dx} + (cosx)y = 0$

8. $\frac{dy}{dx} + (3 + x^2)y = 0$

9. $\frac{dy}{dx} = cos\left(x^{-1/2}\right)y = 0$

10. $\frac{dy}{dx} + \frac{lnx}{1+e^x} = 0$

En los ejercicios 11 al 16, resuelva el problema con valor inicial usando variables separables.

11. $\frac{dy}{dx} = -5y$, con y (0) = 9

12. $\frac{dy}{dx} = 2y$, con y (0) = 5

13. $\frac{dy}{dx} = 9y$, con y (3) = 7

14. $\frac{dy}{dx} = -6y$, con y (2) = 4

15. $*\ \frac{dy}{dx} + \frac{sen\ x}{4+e^x}y = 0$, con y (5) = 10

16. $*\ \frac{dy}{dx} + ln(7 + xe^x)y = 0$, con y (0) = 3

En los ejercicios 17 al 26 encuentre la solución general de la ecuación lineal homogénea de primer grado y analice su solución gráfica:

17. $\frac{dy}{dx} = 8y$ 18. $\frac{dy}{dx} = 3y$

19. $\frac{dy}{dx} = -2y$ 20. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}y$

21. $\frac{dy}{dx} + 7y = 0$ 22. $\frac{dy}{dx} - y = 0$

23. $\frac{dy}{dx} + y = 0$ 24. $\frac{dy}{dx} - \frac{3}{4}y = 0$

25. $\frac{dy}{dx} = 8y$ 26. $\frac{dy}{dx} = -3y$

En los ejercicios 27 a 38, encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer grado, expresándola como la suma de la solución de la homogénea y de la solución particular.

27. $\frac{dy}{dx} + 3y = 8$ 28. $\frac{dy}{dx} + 6y = 5$

29. $\frac{dy}{dx} - 4y = -9$ 30. $\frac{dy}{dx} - y = -\frac{1}{3}$

31. $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{5}y = 3$ 32. $\frac{dy}{dx} - 8x = 7$

33. $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{3}y = -\frac{4}{3}$ 34. $\frac{dy}{dx} + \frac{3}{8}y = -4$

35. $\frac{dy}{dx} = 2y + 18$ 36. $\frac{dy}{dx} = -8y + 9$

37. $\frac{dy}{dx} = -y - \frac{17}{3}$ 38. $\frac{dy}{dx} = 6y - 15$

En los ejercicios 39 al 46, la entrada es un múltiple constante de una función exponencial. Suponga que existe una solución particular de la forma A $e^{at}$ para alguna constante A. Encuentre la constante A y determine la solución particular y la solución general.

39. $\frac{dy}{dx} + 7y = 8e^{-4x}$

40. $\frac{dy}{dx} - y = 4e^{3x}$

41. $\frac{dy}{dx} - 2y = -3e^{-5x}$

42. $\frac{dy}{dx} + y = -2e^{8x}$

43. $\frac{dy}{dx} + 4y = 3e^{4x}$

44. $\frac{dy}{dx} - y = 5e^{-x}$

45. $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$

46. $\frac{dy}{dx} - 5y = 6e^{7t}$

En los ejercicios 47 a 56, obtenga simplemente una solución particular (la solución general siempre se puede obtener fácilmente mediante la adición de un múltiplo arbitrario de una solucion de la ecuación homogénea asociada) si la función forzada es un polinomio. Suponga que la solución particular es también un polinomio del mismo grado y utiliza el método de coeficientes indeterminados para encontrar dicha solución particular. Por ejemplo, si su función forzada es un polinomio de grado 2, entonces se propone como solución partículas a $y_p = Ax^2+Bx + C$, en la ecuación diferencial y determinar las constantes, de modo que $y_p = Ax^2+Bx + C$ satisface la ecuación diferencial.

47. $\frac{dy}{dx} + 7y = 3 + 5x$

48. $\frac{dy}{dx} - 4y = -6 + 9x.$

49. $\frac{dy}{dx} + 2y = 14x$

50. $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = -3x$

51. $\frac{dy}{dx} + y = 2x^2 + 5x - 8$

52. $\frac{dy}{dx} - 9y = -x^2 + 7x + 2$

53. $\frac{dy}{dx} + 3y = x^3$

54. $\frac{dy}{dx} - 6y = 4x^2 + 3$

55. $\frac{dy}{dx} + 5y = x$

56. $\frac{dy}{dx} + 8y = 5x + 11$

En los ejercicios 57 a 68, obtener simplemente una solución particular (la solución general siempre se puede obtener fácilmente mediante la adición de un múltiplo arbitrario de una solucion de la ecuación homogénea asociada) si la función forzada es una función sinusoidal elemental. Suponga que la solución particular es también una función sinusoidal de la misma forma, y utilizar el método de coeficientes indeterminados para encontrar dicha solución particular. Por ejemplo, si su función forzada es una función sinusoidal que resulta de combinar linealmente a cos (5x) y sen (5x), entonces se propone como solución partículas a $y_p$ = A cos (5x)+ B sen (5x), en la ecuación diferencial y determinar las constantes de modo que $y_p$ satisface la ecuación diferencial.

57. $\frac{dy}{dx} + 2y = 3sen(6x)$

58. $\frac{dy}{dx} - 5y = 4\cos(3x)$

59. $\frac{dy}{dx} - 5y = 2\cos(x)$

60. $\frac{dy}{dx} + 8y = sen(x)$

61. $\frac{dy}{dx} + 4y = 3\cos(2x) + 5sen(2x)$

62. $\frac{dy}{dx} - y = 2cos(4x) + sen(4x)$

63. $\frac{dy}{dx} + 6y = \cos(x) + sen(5x)$

64. $\frac{dy}{dx} + y = \cos(2x) + \cos(4x)$

65. $\frac{dy}{dx} - 9y = 5 + 2\,sen(3x)$

66. $\frac{dy}{dx} - 2y = -3 + 4\cos(x)$

67. $\frac{dy}{dx} + y = 2e^{x} + sen(x)$

68. $\frac{dy}{dx} + 9y = 4e^{-5x} + \cos(2x)$

69. Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} + 3y = 8e^{-3t}$. Muestre que la exponencial simple $Ae^{-3t}$, no sirve como una solución particular, porque $e^{-3t}$ es una solución de

la ecuación homogénea asociada. Resuelva la ecuación usando el método del factor integrante. Haga una conjetura para mostrar cómo modificar el método de coeficientes indeterminados cuando la función forzada simple exponencial es solución de la ecuación homogénea asociada a la ecuación.

70. Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - ky = P(x)e^{kx}$ donde P(x) es un polinomio de grado n. Resuelva esta ecuación diferencial haciendo el cambio de variable $y = v\,e^{kx}$. Encuentre y resuelva la ecuación diferencial para v. Muestre que v resulta ser un polinomio de grado n + 1. Esto nos dice que si una solución particular tiene la forma de una exponencial $e^{kx}$ veces un polinomio de un grado más alto, donde la parte exponencial de la función forzada, es una solución de la ecuación homogénea asociada. Una ligera generalización de esta idea se verá más adelante.

71. Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - 2y = 7e^{2x}$. Muestre que una exponencial simple de la forma $A.e^{2x}$, no sirve como una solución particular, porque $e^{2x}$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada. En cambio, resuelva la ecuación diferencial haciendo un cambio de variable $y = v.e^{2x}$. Encuentre y resuelva la ecuación diferencial para v. Haga una conjetura en cuanto a cómo modificar el método de coeficientes indeterminados,

En los ejercicios 72 al 78, una exponencial simple no es una solución particular y, $y_p$ es de la forma A x $e^{ax}$. Encuentre la solución general.

72. $\frac{dy}{dx} - 3y = 8e^{3x}$

73. $\frac{dy}{dx} - y = 4e^{x}$

74. $\frac{dy}{dx} + 4y = 3e^{-4t}$

75. $\frac{dy}{dx} + y = 5e^{-x}$

76. $\frac{dy}{dx} - 9y = -2e^{9x}$

77. $\frac{dy}{dx} - 7y = 8e^{7x}$

78. $\frac{dy}{dx} + 5y = -3e^{5x}$

En los ejercicios 79 a 84, encuentre la solución continua de:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \qquad 0 \leq x \leq 2$$

Y haga un bosquejo de la solución.

79. P(x) = $\begin{cases} 2, & si\ 0 \leq x < 1, \\ 1, & si\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $y\ f(0) = 0, y(0) = 2$

80. P(x) = 1, f(x) = $\begin{cases} 1, & si\ 0 \leq x < 1, \\ 0, & si\ 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ $y, y(0) = 1$

81. P(x) = 0, f(x) = $\begin{cases} 1, & si\ 0 \leq x < 1, \\ -1, & si\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $y\ f(0) = 0$

82. P(x) = $\begin{cases} 0, & si\ 0 \leq x < 1, \\ 1, & si\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $f(x) = 1, y(0) = 0$

83. P(x) = $\begin{cases} 1, & si\ 0 \leq x < 1, \\ 0, & si\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $y\ f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}, y(0) = 2$

84. P(x) = $\begin{cases} 1, & si\ 0 \leq x < 1, \\ -1, & si\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $y\ f(x) = 2, y(0) = 1$

# 6.6 Algunas ecuaciones especiales reducibles a lineales

## 6.6.1 La ecuación de Bernoulli

**Definición**

Toda ecuación de la forma:

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ Donde n es un entero

Se llama una ecuación de Bernoulli[5].

(Esta ecuación se denomina así, en nombre de Jakob Bernoulli, 1654-1705, quién nació en una familia de notables científicos y matemáticos suizos). Observe que si n = 0, o 1, simplemente se obtiene una ecuación lineal. Pero si n no es igual a 0 o 1, y si ambos miembros de la ecuación se dividen por $y^n$, podemos tomar z = $y^{1-n}$, y obtener una ecuación lineal en la variable dependiente z. Si esta ecuación lineal se resuelve, se obtiene z en términos de x y posteriormente se vuelve a las variables originales x e y. Este método de sustitución fue ideado por Leibniz en 1696.

5 Los Bernoulli fueron una gran familia de famosos matemáticos suizos durante cuatro generaciones. Esta ecuación es nombrada por los dos hermanos Jakob (1654-1705) y Johann (1667-1748) quienes trabajaron desde 1695 hasta 1697 sobre la solución de esta ecuación en competencia con Leibniz.

## Ejemplo 8. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^2$$

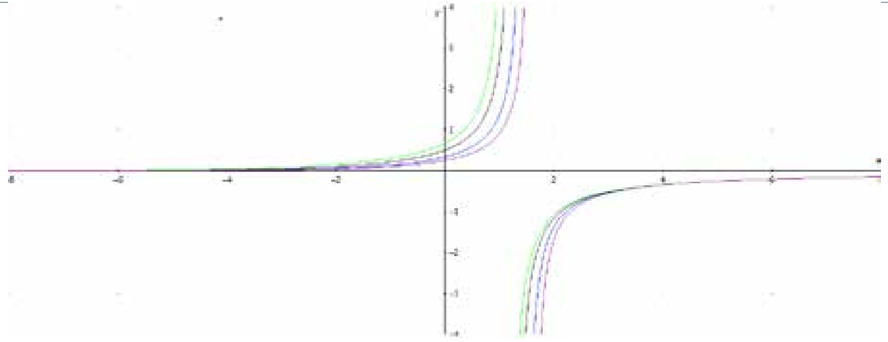
### Solución:

Esta es una ecuación de Bernoulli con P(x) = -1, Q(x) =x, y n = 2. Al dividir por $y^2$, la ecuación se obtiene:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1} = x$$

Si se hace z = $y^{-1}$, se obtiene la ecuación lineal $-\frac{dz}{dx} - z = x$. ó $\frac{dz}{dx} + z = -x$, que es lineal, al resolverla se tiene z = 1 – x + Ce-x, dado que z = $y^{-1}$, se concluye que y = $(1 - x + ce^{-x})^{-1}$. Es bueno observar que se ha dividido por $y^2$, y que y = 0 es una solución singular de la ecuación diferencial. Observe la figura 6, en donde se dan las gráficas de algunas soluciones.

**Figura 6.** Algunas gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 9. Resolver la ecuación diferencial:

$$y^{/}+\frac{2x}{x^2+1}y=\frac{1}{(x^2+1)^2y^2} \quad (33)$$

### Solución:

Esta ecuación se puede escribir en la forma:

$$y^{/}+\frac{2x}{x^2+1}y=\frac{1}{(x^2+1)^2}y^{-2}$$

Que es una ecuación de Bernoulli, con P(x) = $\frac{2x}{x^2+1}$, Q(x) = $\frac{1}{(x^2+1)^2}$, n= -2, por lo tanto 1 – (-{2)= 3.

Al multiplicar la ecuación por y$^2$, se tiene:

$$y^2y^{/}+\frac{2x}{x^2+1}y^3=\frac{1}{(x^2+1)^2} \qquad (34)$$

Haciendo z = y$^3$, derivando respecto a x, tenemos: $\frac{dz}{dx}=3y^2\frac{dy}{dx}$, luego $\frac{1}{3}\frac{dz}{dx}=y^2\frac{dy}{dx}$, remplazando en (34), se tiene:

$$\frac{1}{3}z^{/}+\frac{2x}{x^2+1}z=\frac{1}{(x^2+1)^2}, \text{ó}$$

$$z^{/}+\frac{6x}{x^2+1}z=\frac{3}{(x^2+1)^2}$$

Que es una ecuación lineal en z, en donde P(x) = $\frac{6x}{x^2+1}$, y Q(x) = $\frac{3}{(x^2+1)^2}$

Luego si hacemos $\mu=e^{\int\frac{6x}{x^2+1}dx}=e^{3\ln(x^2+1)}=(x^2+1)^3$

se tiene:

$$z=\frac{1}{(x^2+1)^3}\left[\int(x^2+1)^3\frac{3}{(x^2+1)^2}\right]dx=\frac{3}{(x^2+1)^3}\int(x^2+1)\,dx$$

$$=\frac{3}{(x^2+1)^3}.\left(\frac{x^3}{3}+3x+C\right)=\frac{x^3+3x+C}{(x^2+1)^3}$$

De donde se tiene:

$$y^3 = \frac{x^3 + 3x + C}{(x^2 + 1)^3}$$

Extrayendo raíz cúbica:

$$y = \frac{(x^3+3x+C)^{\frac{1}{3}}}{x^2+1} \qquad (35)$$

Esta es la solución explícita de la ecuación diferencial dada por Bernoulli, podemos ver su gráfica para algunos valores de C. Siempre es importante intentar comprender las propiedades de la solución para asegurarnos que entendemos por completo el comportamiento de dicha solución.

De la figura (6) vemos que existe un valor $x_0$ para el cual $y(x_0) = 0$, entonces $y'$ en $x_0$ será infinita, de modo que la curva y(x) se aproxima al punto $y(x_0)= 0$ (el eje x) verticalmente. Podemos ver que efectivamente existe un $x_0$ para el cual $y(x_0)= 0$, basta inspeccionar el numerador de la solución explícita de (35). Debido a que la función $x^3 + 3x + C$ es una función creciente en x para cualquier C (ver la derivada de esta función) y el dominio en los números reales, entonces la función: $(x^3 + 3x + C)^{\frac{1}{3}}$ tiene una raíz real (la raíz es $\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(a - \sqrt{1 + a^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, donde a = C/2.

De esta forma, para cualquier selección de C, es decir para cualquier curva solución, existe exactamente un punto $x_0$ para el cual se cumple $y(x_0)= 0$. De esta forma sabemos que cualquier curva solución tendrá exactamente un lugar donde se aproxima al eje x verticalmente.

Otros hechos que son evidentes son:

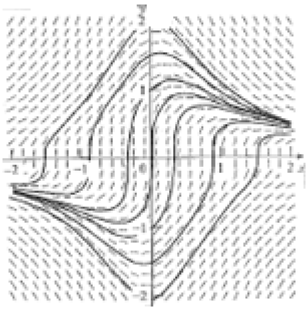
a. De (33) vemos que la isóclina para la pendiente cero está dada por $y = \frac{1}{[2x(x^2+1)]^{\frac{1}{3}}}$. Así las curvas solución tendrán extremos locales en sitios que están en valores de y más y más grandes, a medida que x se aproxima al origen desde la derecha, y a valores de y más y más pequeños a medida que se aproxima a $+\infty$.

b. También de (33) observamos que el campo de pendientes tiene simetría con respecto al origen.

c. De (33) vemos que las curvas solución están acotadas para todo valor finito de x. La intersección en y está dada por $C^{\frac{1}{3}}$.

d. La figura (7) muestra el campo de pendientes y varias curvas solución para esta ecuación diferencial. En esta figura hay 14 curvas solución, no 7, porque la derivada se encuentra indefinida en el eje x. Observe que esto está de acuerdo con lo visto anteriormente.

**Figura 7.** Familia de soluciones para la ecuación (35).



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

## Ejemplo 10:

Resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x-2} y = 5(x-2)\sqrt{y}, para\ x > 2. \quad (36)$$

### Solución:

La ecuación se puede escribir, después de dividir por $\sqrt{y}$ en la forma:

$$y^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x-2} y^{\frac{1}{2}} = 5(x-2) \qquad (37)$$

Si hacemos el cambio de variable:

$$u = y^{\frac{1}{2}}, entonces\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}$$

Reemplazando en (37) se tiene:

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{2(x-2)} u = \frac{5}{2}(x-2)$$

Esta es una ecuación lineal, en donde su factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{2(x-2)} dx} = (x-2)^{\frac{1}{2}}.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por dicho factor integrante se tiene:

$$(x-2)^{\frac{1}{2}} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}} u = \frac{5}{2}(x-2)^{\frac{3}{2}}$$

O:

$$\frac{d}{dx}\left[u(x-2)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{5}{2}(x-2)^{\frac{3}{2}}$$

Luego:

$$u(x-2)^{\frac{1}{2}} = (x-2)^{\frac{3}{2}} + C,$$

De donde:

$$u = (x-2)^2 + C(x-2)^{-\frac{1}{2}}$$

Reemplazando u, tenemos:

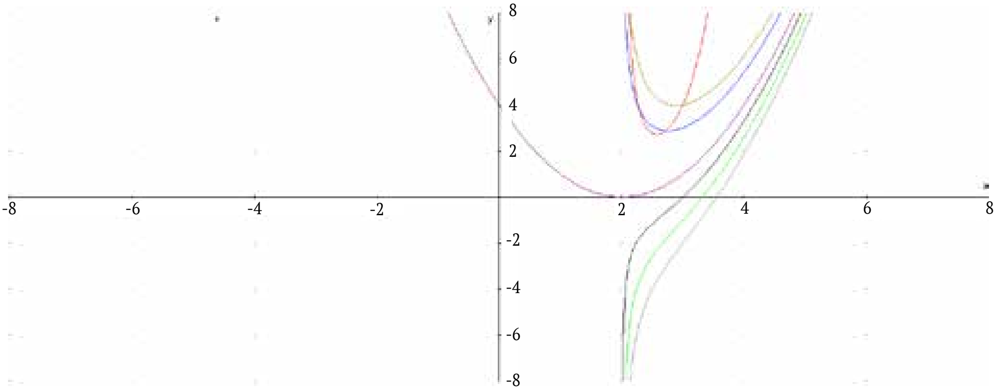
$$y^{\frac{1}{2}} = (x-2)^2 + C(x-2)^{-\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto, y será igual a:

$$y = \left[(x-2)^2 + C(x-2)^{-\frac{1}{2}}\right]^2$$

La figura 8 nos muestra la gráfica de algunas soluciones, para diferentes valores positivos, negativo y cero, que en este valor obviamente es una parábola trasladada.

**Figura 8.** Gráficas de algunas soluciones de la ecuación diferencial dada.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 11. Un problema de aplicación de la ecuación de Bernoulli:

La longitud de un pez L(x), se describe mediante la ecuación:

$$\frac{dL}{dt} = a(L_e - L) \qquad (38)$$

Donde a y $L_e$ son constantes. Además el peso w (t) del mismo pez está relacionado con su longitud L (t) por la ecuación:

$$w(t) = bL^3(t) \qquad (39)$$

Donde b es una constante.

a. Expresar el peso del pez en función del tiempo.
b. ¿Qué tipo de ecuación es la que expresa el peso del pez en función del tiempo?
c. Hacer un análisis cualitativo de la ecuación diferencial.
d. Resolver analíticamente la ecuación diferencial para H = 1, y k = 0.6.

## Solución:

a. Para expresar el peso del pez en función del tiempo, entonces tenemos de la ecuación (39), despejando L que:

$$\mathrm{L}\,(\mathrm{t}) = b^{-\frac{1}{3}} w(t)^{1/3}$$

Si hacemos d = $b^{-\frac{1}{3}}$, tendremos que:

$$\mathrm{L}\,(\mathrm{t}) = \mathrm{d}.\, w(t)^{1/3}$$

Reemplazando en (38), teniendo en cuenta que $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{3} w(t)^{-2/3} \frac{dw}{dt}$, nos da que:

$$\frac{d}{3} w(t)^{-2/3} \frac{dw}{dt} = a\left(L_e - cw^{1/3}\right)$$

Despejando en función de w (t), tenemos:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{3aL_e}{c} w^{\frac{2}{3}} - \frac{3a}{c} w(t)$$

Luego, tenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{dw}{dt} = \left(H - kw(t)^{1/3}\right) w(t)^{2/3}$$

Donde H = $\frac{3aL_e}{c}$, y k =$\frac{3a}{c}$, constantes. Esta ecuación, la podemos escribir como:

$$\frac{dw}{dt} + kw(t) = H[w(t)]^{2/3} \quad (40)$$

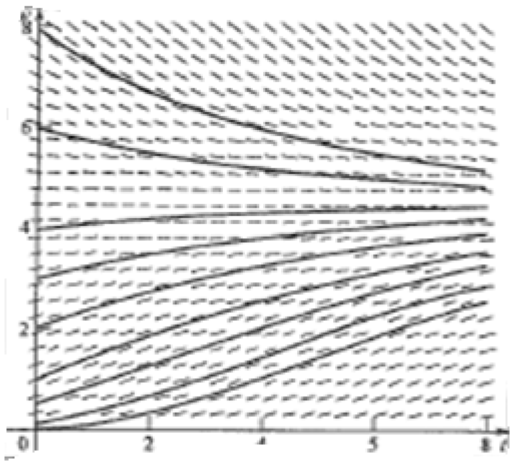
b. Si observamos, esta ecuación es una ecuación de Bernoulli, ya que es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \text{ Donde n es un entero.}$$

Para la ecuación (40), se tiene P (t)= k, y Q (t) = H, para n = 2/3. Esta ecuación particular es también llamada la ecuación **de Von Bertalanffy.**

c. **El campo de pendientes:** la figura 9 nos muestra el campo de pendientes y algunas curvas solución para esta ecuación diferencial con H = 1 y K = 0.6. Observe que el campo de pendientes tiene una solución de equilibrio con soluciones crecientes por debajo de este equilibrio, y decrecientes por arriba de él. Estas soluciones de equilibrio están cuando w = 0 y w = $\left(\frac{H}{k}\right)^3$. La solución de equilibrio w = 0 no es de interés en este ejemplo, y w = $\left(\frac{H}{k}\right)^3$ corresponde al peso límite del pez. Para el caso, de H = 1 y K = 0.6, este peso límite se presenta en w = $\left(\frac{5}{3}\right)^3 \approx 4.63$.

**Figura 9.** Campo de pendientes con unas curvas solución para (38).



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Concavidad: también se advierte que las curvas solución tienen un cambio de concavidad en la esquina inferior izquierda de la figura, en donde toma valores pequeños para w. Podemos obtener más información de la ecuación diferencial, si derivamos (40), obtenemos:

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \left(\frac{2}{3}Hw^{-1/3} - k\right)\frac{dw}{dt}$$

De donde se deduce que los cambios de concavidad ocurren cuando:

$$w = \left(\frac{2H}{3k}\right)^3$$

Es decir, entre w = 0 y la solución de equilibrio en w =$\left(\frac{H}{k}\right)^3$ 8. Observe que los lugares donde $\frac{dw}{dt} = 0$ dan soluciones de equilibrio y no se tienen en cuenta cuando se buscan puntos de inflexión. Para el caso de la figura (40) cuando H = 1 y K = 0.6, esto ocurre cuando w = $\left(\frac{10}{9}\right)^3$ ≈ 1.37. Observe que los puntos de inflexión dependen de los valores iniciales.

d. Veamos la solución analítica, cuando H = 1, y K = 0.6, en la ecuación (40), esto nos da:

$$\frac{dw}{dt} + 0.6w = w^{\frac{2}{3}} \qquad (41)$$

Aunque esta ecuación se puede resolver por variables separables (y de hecho es autónoma), la técnica para permitir la integración simple no es muy clara, por esta razón la vamos a resolver teniendo en cuenta que es una ecuación de Bernoulli.

Hacemos el cambio de variables u = $w^{1-n} = w^{-1/3}$, en la ecuación (41) después de escribirla como:

$$w^{-\frac{2}{3}}\frac{dw}{dt} + 0.6w^{-1/3} = 1$$

Este cambio de variables nos lleva a la ecuación diferencial lineal:

$$-3\frac{du}{dt} + 0.6u = 1, \text{ ó}$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{1}{5}u = 1$$

Lo cual nos lleva a la solución, u (t) = $\frac{5}{3}(1 - Ce^{-0.2t})$. Haciendo el cambio de variable original, se tiene:

$$w(t) = \left[\frac{5}{3}(1 - Ce^{-0.2t})\right]^3 \qquad (42)$$

Donde:

$$C = 1 - 0.6w(0)^{1/3} \qquad (43)$$

Y w (0) es el peso inicial del pez. Donde la solución de equilibrio es $\left(\frac{5}{3}\right)^3$ que está de acuerdo con la observación inicial.

La solución explícita dada en (42) se puede utilizar para calcular las veces en que se presentan los puntos de inflexión, a saber, las veces en que w (t) = $\left(\frac{10}{9}\right)^3$. De (42) esto equivale a solicitar las veces en que:

$$\left(\frac{10}{9}\right)^3 = \left[\frac{5}{3}(1 - Ce^{-0.2t})\right]^3$$

Tomando la raíz cúbica de ambos lados de la igualdad y resolviendo para t, se tiene que t = 5 ln (3C), y por (43), se tiene que t = $5ln\{3[1 - 0.6w(0)^{1/3}]\} = 5ln[3 - 1.8w(0)^{!/3}]$.

Como se esperaba, este tiempo depende del valor inicial w (0). Para garantizar que t > 0 en esta última expresión, debemos tener 3 – 1.8 $w(0)^{!/3}$ > 1, lo que implica que w (0) < $\left(\frac{10}{9}\right)^3$. De esta manera, solamente las curvas solución correspondientes a pesos iniciales menores que $\left(\frac{10}{9}\right)^3$ tendrán un punto de inflexión.

La solución de (40) para otras selecciones de H y K es posible mediante el mismo proceso, siendo dicha solución:

$$w(t) = \left[\frac{H}{k}\left(1 - Ce^{-k/3}\right)\right]^3$$

### 6.6.2 La ecuación de Riccati

**Figura 10.** Jacobo Francesco Ricatti (1676-1754).

**Fuente.** Fuente. Bell (2002).

El conde Jacobo Francesco Riccati nació en Venecia, el 28 de mayo de 1676, y murió el 15 de abril de 1754. Fue un matemático y filósofo veneciano, que estudió detalladamente la hidrodinámica sobre la base de la mecánica newtoniana, colaborando en su introducción en Italia. En su momento se le ofreció la presidencia de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, pero rechazó el honor en aras de su retirada y aristocrática vida. Analizó casos particulares de ecuaciones diferenciales ordinarias que hoy llevan su nombre, pero fueron los hermanos Bernoulli quienes en realidad obtuvieron las soluciones.

Se ha visto hasta el momento que toda ecuación diferencial de primer grado es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x.y)$$

En donde f(x, y) puede tomar la forma:

$$F(x, y) = P(x) + Q(x)\ y + R(x)\ y^2 + \cdots.$$

Si f(x, y) para en Q(x) y entonces la ecuación es lineal, si f(x, y) para en R(x) $y^2$, tenemos entonces la ecuación de Riccati.

Las ecuaciones de Riccati forman una clase de ecuaciones que algunas veces se pueden reducir a ecuaciones de Bernoulli. Una ecuación de Riccati tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

Donde los coeficientes P $(x)$, Q $(x)$ y R(x) son funciones cualesquiera que dependan de x.

La dificultad en la solución de una ecuación de Riccati consiste en que primero se debe conocer una solución $y_1(x)$, antes que se pueda obtener la solución completa. Para hallar esta segunda solución y reducir la ecuación a una ecuación lineal basta hacer la sustitución:

$$u = \frac{1}{y - y_1(x)}$$

De donde despejando y se tiene:

$$y = u^{-1} + y_1(x)$$

que luego de derivar y reemplazar se obtiene la ecuación lineal. Veamos un ejemplo.

## Ejemplo 12. Resolver la ecuación de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 + y + \frac{2}{x^3} y^2, x \in (0, \infty) \quad (38)$$

Si se tiene que $y_1(x) = x^2$, es una solución.

### Solución:

Se hace el cambio de variable u = $\frac{1}{y - x^2}$, luego

$$u^{-1} = y - x^2 \; o, y = u^{-1} + x^2$$

Derivando respecto a x, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2} \frac{du}{dx} + 2x$$

Reemplazando (38), se tiene:

$$-u^{-2} \frac{du}{dx} + 2x = -x^2 + u^{-1} + x^2 + \frac{2}{x^3}(u^{-1} + x^2)^2$$

Realizando los cálculos, obtenemos la ecuación de Bernoulli:

$$u^{-2} \frac{du}{dx} - \left(1 + \frac{4}{x}\right) u^{-1} = \frac{2}{x^3}$$

Haciendo z = $u^{-1}$, luego $\frac{dz}{dx} = -u^{-2} \frac{du}{dx}, u \neq 0$, se obtiene la ecuación lineal:

$$\frac{dz}{dx} + \left(1 + \frac{4}{x}\right) z = -\frac{2}{x^3}$$

Cuya solución es:

$$z = -2\left(\frac{x-1}{x^4}\right) + C\frac{e^{-x}}{x^4}$$

Como z = u-1, hacemos el cambio de variable, y se obtiene:

$$u^{-1} = -2\left(\frac{x-1}{x^4}\right) + C\frac{e^{-x}}{x^4} = \frac{2(1-x)e^x + C}{x^4 e^x}$$

Como $, u \neq 0$, se impone una restricción, la cual genera una singularidad en y = $x^2$, entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = x^2 + \frac{x^4 e^x}{2(1-x)e^x + C},\ y = x^2$$

## Ejemplo 13:

Resolver la ecuación de Riccati[6]:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2xy + 1 + x^2 \quad (39)$$

Si se sabe que $y_1(x) = x$ es una solución.

### Solución:

Como es una ecuación de Riccati, podemos hacer la sustitución:

$z = \frac{1}{y-x}$, o $y = x + z^{-1}$, es decir que $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$, reemplazando en la ecuación (39), tenemos:

$$1 - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = (x + z^{-1})^2 - 2x(x + z^{-1}) + 1 + x^2$$

Simplificando obtenemos:

$$\frac{dz}{dx} = -1$$

Es decir:

$$z = -x + C$$

Sustituyendo z, se tiene:

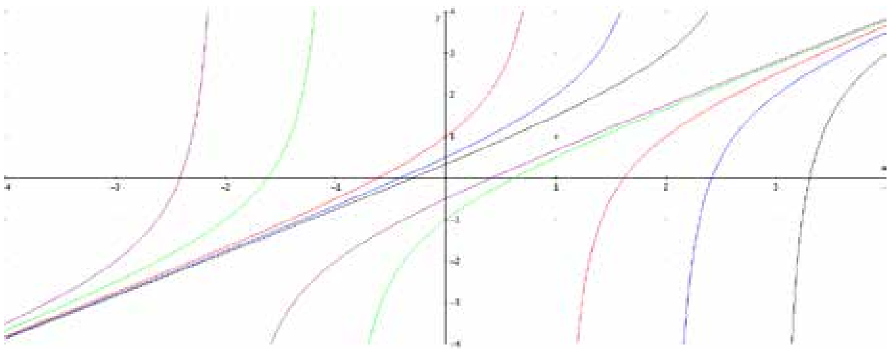
$$\frac{1}{y-x} = x + C, o\ y - x = \frac{1}{(x - C)}$$

6 El matemático italiano Jacobo Riccati (1676-1754) analizó casos particulares de ecuaciones diferenciales ordinarias que hoy llevan su nombre, pero fueron los hermanos Bernoulli quienes en realidad obtuvieron las soluciones.

De donde la solución de la ecuación será:

$$y = x + (C - x)^{-1}$$

**Figura 11.** Familia de soluciones para la ecuación diferencial (39).



**Fuente** . Elaborada por el autor con el programa Derive.

# 6.7 Ejercicios

Las siguientes son ecuaciones de Bernoulli, resolverlas haciendo el cambio de variables necesario.

1. $\frac{dy}{dx} + y = xy^2$

2. $3x\frac{dy}{dx} + 4y = \sqrt{\frac{x}{y}}$

3. $x^2\frac{dy}{dx} = xy + \frac{1}{xy}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^5+y^5}{x^4y^4}$

5. $\frac{dy}{dx} + xy^3 = 2x^3y$

6. $y^{-1/2}\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy} + ye^x$

Convertir cada ecuación en una ecuación lineal:

7. $\frac{dy}{dx} = xe^y - 1$

8. $x\frac{dy}{dx} = x^2 + e^{2y-x^2}$

9. $\frac{dy}{dx} = x^{-1} + e^{-y}$

10. $e^{x+y}\frac{dy}{dx} = e^{x-y} - x^3e^y$

En los problemas siguientes, identifique cada ecuación como una lineal, de Bernoulli, de Riccati o ninguna de las anteriores.

11. $\frac{dy}{dx} = x + y^2$

12. $\frac{dy}{dx} = xy + y^3$

13. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$

14. $y\frac{dy}{dx} = x + y^2$

15. $\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$

16. $y\frac{dy}{dx} = x^2 + y$

17. $\frac{dy}{dx} = x + y^3$

18. $y\frac{dy}{dx} = x + y + y^2$

Dada la ecuación de Riccati, utilice una transformación para convertir cada ecuación en una ecuación de Bernoulli. En cada caso encuentre la solución:

19. $\frac{dy}{dx} = 2x + xy + y^2\ 4$, dado que $y = -2$ es una solución.

20. $\frac{dy}{dx} = -4x^2 + 2 + y^2$, dado que y = 2x es una solución.

21. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + y + xy^2$, dado que y = - $\frac{1}{x}$ es una solución.

22. $x^3 \frac{dy}{dx} = x^4y^2 - 2x^2y - 1$, dado que $y = \frac{1}{x^2}$, es una solución.

23. Emplee la sustitución y = w + $x^{-1}$ para convertir la ecuación diferencial en una ecuación de Bernoulli:

$$x\frac{dy}{dx} + y = \sqrt{xy - 1}$$

24. Resuelva la ecuación del ejercicio 23.

25. Pruebe que la sustitución:

Y = 2 arctan u

Convierte la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = Q(x)sen(y) + R(x)cos\ (y)$$

En una ecuación de Riccati:

$$\frac{du}{dx} = Q(x)u + \frac{1}{2}R(x)(1 - u^2)$$

Ayuda: en primer lugar, establezca que:

Sen y=$\frac{2u}{1+u^2}$, y

Cos y = $\frac{1-u^2}{1+u^2}$

26. Emplee el problema 25 para convertir la ecuación en una ecuación de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = xsen(y) - 2cos\ (y)$$

27. La ecuación de Riccati del ejercicio 26 tiene una solución de la forma y = kx, para alguna constante K. Encuéntrela y redúzcala a una ecuación de Bernoulli.

28. Considere una ecuación de Bernoulli de la forma $\frac{dy}{dx} + y = m^{n-1}y^n$, donde m y n son constantes positivas.

a) Para el caso n = 2, encuentre todas las soluciones de equilibrio y determine su estabilidad.

b) Repita el enciso a) para n = 3.

c) Repita el enciso a) para n = 5.

d) ¿Puede hallar valores de m y n tales que una solución de equilibrio de esta ecuación dada por y = 0 sea inestable? Si así fuera, ¿cuáles serían? Si no, proporcione una explicación detallada.

# CAPÍTULO 7.

# APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

## Contenido



## Competencias

1. Identifica problemas de la vida real que se resuelven mediante ecuaciones lineales de primer grado.
2. Aplica la ecuación diferencial lineal a modelos de crecimiento y decrecimiento.
3. Aplica la ecuación diferencial a modelos de mezclas.
4. Aplica la ecuación diferencial a modelos de la física.

# Introducción

Algún matemático, mencionaba que de alguna manera la matemática es el arte de resolver problemas de la vida real, es por esto que en este capítulo se plantean una serie de modelos básicos que se pueden resolver mediante ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Se han tratado de mostrar los modelos más importantes que cualquier ingeniero, físico, químico, biólogo, economistas o matemático debe conocer.

# 7.1 Problemas de crecimiento y decrecimiento

Aunque en cada sección que hablamos de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden vimos algunos ejemplos de aplicación, creo que es bueno organizar y presentar otros ejemplos de aplicación de estos modelos, recordemos que si el crecimiento de una población P (t) en el tiempo t está dado por ${dP}/{dt}$, ella es proporcional al número de individuos de la población en el mismo tiempo t, es decir $\frac{dP}{dt} = kP$[7], luego integrando se tiene siempre el modelo de la forma P (t) = $P_0e^{kt}$, para k un parámetro, y $P_0$ la población en el tiempo t = 0.

## Ejemplo 1. Crecimiento de la población:

En cierta ciudad, la razón a la que la población crece en cualquier tiempo es proporcional al tamaño de esta. Si la población era de 125.000 en 1970 y de 140.000 en 1990, ¿cuál es la población esperada en el año 2010?

### Solución:

De acuerdo a nuestra hipótesis del modelo, tenemos que si P (t) es el tamaño de la población en el tiempo t, entonces tenemos la ley del crecimiento población es aplicable, por lo tanto:

$$P(t) = P_0e^{kt}$$

Para encontrar la población en el año 2010, primero se debe encontrar los parámetros de este modelo, es decir, debemos encontrar

7 Para un químico esta ecuación es llamada una ley de tasas de primer orden, en tanto que las leyes de tasas como $dP/dt=-kP^2$ son de segundo orden.

$P_0$ y k. Para el año 1970, lo hacemos corresponder a t = 0. Entonces t = 20 en 1990 y t = 40 a 2010. Tenemos:

$$P_0 = P(0) = 125000$$

Luego:

$$N(t) = 125000e^{kt}$$

Para encontrar k, se usa la condición de que N= 140000 cuando t = 20.

Así:

$$140000 = 125000e^{20k}$$

Por consiguiente:

$$e^{20k} = \frac{140000}{125000} = 1.12$$

Por lo tanto, por la hipótesis del modelo de crecimiento se tiene:

$$P(t) = 125000e^{kt}$$

$$= 125000\left(e^{20k}\right)^{t/20}$$

$$=125000\,(1.12)^{t/20}$$

Para t = 40 se tiene la población esperada para 2010:

$$P = P(40) = 125000\,(1.12)^{40/20} = 125000(1.12)^2 = 156800$$

Definición: el tiempo para que una materia radioctiva se reduzca a la mitad se le llama vida media de la sustancia.

## Ejemplo 2. Determinación de la constante de decaimiento y de la vida media:

Si después de 50 días queda el 60 % de una sustancia radioactiva, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.[8]

### Solución:

El modelo del decaimiento radioactivo, es muy similar al del decrecimiento exponencial, solo que en este caso se sabe la razón a la que un elemento radioactivo decae en un tiempo cualquiera en forma proporcional a la cantidad presente en ese tiempo.

Luego si N (t) es la cantidad presente en el tiempo t, entonces la tasa de decaimiento está dada por:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t)$$

La cantidad positiva k, se llama constante de decaimiento, y el signo menos indica que N decrece cuando t crece. Por lo tanto, se tiene un decaimiento exponencial; integrado por el método de separación de variables, se tiene la ecuación solución:

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

Para nuestro ejemplo $N_0$ es w la cantidad presente del material en t = 0. Cuando t = 50, entonces N = $0.6N_0$ y se tiene:

$$0.6\, N_0 = N_0 e^{-50k}, \text{o}$$

$$0.6 = e^{-50k}$$

$$-50k = \ln (0.6)$$

$$K = -\frac{\ln (0.6)}{50} = 0.01022$$

8 La científica polaca Marie Curie (1867-1934) recibió el premio Nobel de física en 1903 y en 1911 por sus experimentos precursores con el radio y otras sustancias radioactivas.

Luego, N (t) = $N_0e^{-0.01022t}$. Para hallar la vida media, usamos la definición de vida media, es decir:

$$N_0/2=N_0e^{-0.010222t}$$

Tomando logaritmos a ambos lados, después de simplificar $N_0$ tenemos:

$$t_m=\frac{ln2}{0.01022}=67.82 \text{ días.}$$

# 7.2 Problemas de la ecuación logística

Es claro que, bajo un crecimiento exponencial, la población llegaría a ser infinitamente grande con el transcurso del tiempo. Sin embargo, en la realidad cuando una población llega a ser suficiente existen factores ambientales que hacen más lenta la razón de crecimiento. Ejemplos de estos factores podrían ser: la disponibilidad de alimentos, los depredadores, la falta de espacio suficiente, etc. Estos factores ocasionan que en algún momento ${dP}/{dt}$ comience a decrecer y en este caso, se puede suponer que el tamaño de la población esté limitado a cierto número máximo M, donde o < P < M y cuando P → M, ${dP}/{dt}$ → 0, y el tamaño de la población tiende a ser estable.

Es decir que se busca un modelo de población que tenga un crecimiento inicial exponencial, pero que también incluya los efectos de la resistencia ambiental a grandes crecimientos de la población. Tal modelo se obtiene al multiplicar el lado derecho de $\frac{dP}{dt} = kP$, por el factor $\left(\frac{M-P}{M}\right)$:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(\frac{M-P}{M}\right)$$

Observe que si P es pequeña, es decir, P < M, entonces $\left(\frac{M-P}{M}\right)$ es cercana a 1 positivamente se tiene un crecimiento que es aproximadamente exponencial. Pero si es grande, es decir, P > M, entonces M – P tiende a cero, negativamente por tanto $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ será negativo, comportándose tal como se busca que sea el modelo. Debido a que k/M es una constante, esta expresión se puede reemplazar por K y así, se tiene:

$$\frac{dP}{dt} = KP(M-P)$$

El anterior modelo establece que «la razón de crecimiento es proporcional al producto del tamaño de la población y la diferencia entre el tamaño máximo de la población actual».

## Ejemplo 3:

¿Cómo se puede modelar este tipo de fenómeno de crecimiento? Para esto consideremos la siguiente tabla que nos muestra las alturas de unas plantas de girasol y, como función del tiempo t.

**Tabla 1.** Tabla de valores del crecimiento de una planta de Girasol, tomada en días.

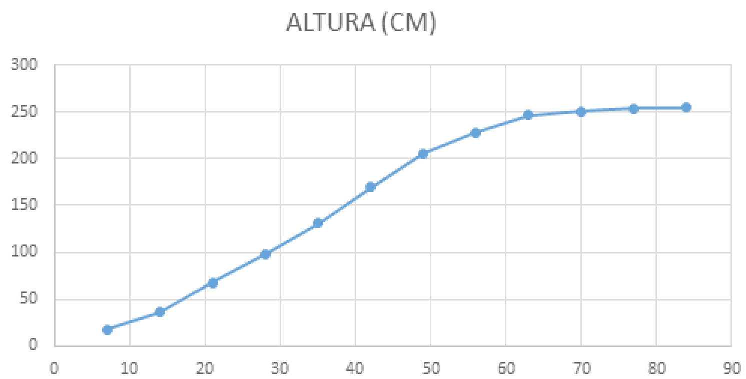
| Tiempo (días) | Altura (cm) |
|---|---|
| 7 | 17,93 |
| 14 | 36,36 |
| 21 | 67,76 |
| 28 | 98,10 |
| 35 | 131 |
| 42 | 169,50 |
| 49 | 205,50 |
| 56 | 228,30 |
| 63 | 247,10 |
| 70 | 250,50 |
| 77 | 253,80 |
| 84 | 254,50 |

**Fuente.** Lomen y Lovelock (2000).

## Solución:

Primero tratemos de hacer una gráfica con dichos datos:

**Figura 1.** Gráfica de los puntos de la tabla.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

Observemos que para valores pequeños del tiempo la altura se incrementa rápidamente, pero para valores mayores del tiempo el incremento disminuye, de hecho los últimos datos muestran muy poca variación en la altura.

## Solución cualitativa

Una manera de describir este crecimiento mediante ecuaciones diferenciales es agregar un término al miembro de la derecha de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = ay$, el cual disminuirá la tasa de crecimiento para valores grandes de y. Esto debería hacerse de tal manera que la tasa de cambio de altura por altura unitaria (la tasa de crecimiento relativo) disminuye a medida que la altura aumenta.

La ecuación:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = a(b - y)$$

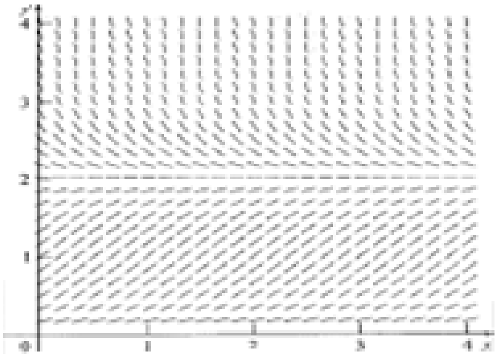
Donde a y b son constantes positivas. Este modelo de crecimiento logístico describe muy bien nuestro ejemplo. Podemos volver a escribir dicha ecuación en la forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay(b - y) \qquad (40)$$

Que toma la forma de la ecuación logística, y se aplica comúnmente en modelos de población, donde la tasa de crecimiento poblacional disminuye con el crecimiento de población debido a factores reales tales como el suministro de alimentos limitados, sobrepoblación y enfermedades.

Queremos descubrir toda la información cualitativa que podamos acerca de las soluciones de (40) de la ecuación diferencial. Comencemos con la construcción del campo de pendientes. Debido a que estamos tratando con alturas de plantas de girasol, consideramos solamente valores no negativos de y. A medida que utilizamos (40) para evaluar las pendientes de curvas solución en puntos igualmente espaciados (x, y), observamos que a lo largo de las líneas horizontales y= 0 (el eje x) y, y = b, las pendientes son iguales a cero. A lo largo de la línea horizontal y = 1, las pendientes son a (b-1). A lo largo de la línea y = 2, las pendientes son 2a (b-2), y así sucesivamente. El campo de pendientes de (40), con a =1 y b= 2, como se ilustra en la siguiente figura.

**Figura 2.** Campo de pendientes de (40) para a = 1 y b = 2.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Como solo nos interesa para $x \geq 0$, y $y \geq 0$, no buscaremos simetrías.

## Las isóclinas

Las isóclinas de (40) están dadas por:

$$Ay\,(b - y) = m \qquad (41)$$

Si $m = m_0$, vemos que los únicos lugares donde las curvas solución tienen tangentes horizontales se encuentran a lo largo de las líneas horizontales y = 0, y = b. Para considerar otros valores de m, volvemos a escribir (41) como una ecuación cuadrática en y, así:

$$y^2 - by + \frac{m}{a} = 0$$

Empleando la fórmula para la ecuación cuadrática, para resolver nuestras isóclinas tenemos:

$$y = \frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{\frac{ab^2 - 4m}{a}}\right) \qquad (42)$$

Donde m es la pendiente especificada. Esta fórmula nos dice que cuando $ab^2$-4m < 0. Es decir, m > $\frac{ab^2}{4}$, no hay curvas solución con pendiente m. En otras palabras, las únicas curvas solución de (40) que pueden tener pendiente m se presentan si m se encuentra en el intervalo $-\infty < m \leq \frac{ab^2}{4}$. La ecuación (42) también nos dice que la pendiente máxima, m = $\frac{ab^2}{4}$, se presenta para y = b/2, a la mitad (en la dirección del eje y) de las líneas horizontales y = 0, y y = b. El campo de pendientes que se muestra la figura 2 concuerda con esta información.

## Monotonía

El campo de pendientes también sugiere que las soluciones de (40) son, ya sea creciente o decreciente, dependiendo del valor inicial de y. esto puede verificarse a partir de (40); es decir, $y^{/}$= a. y. (b – y), en la que la derivada es positiva si 0 < y < b y negativa si y > b. Luego, si comenzamos con un valor $y_0$ para x = 0, donde $y_0$ > b, la solución disminuirá hasta el valor límite b. De manera semejante, si comenzamos un valor inicial de $y_0$, donde 0 < $y_0$ < b, la solución se incrementará hasta su valor límite b. En contraste con el modelo de crecimiento de poblaciones, las soluciones de la ecuación diferencial logística para $y_0$ > 0 se aproximan al valor de b para valores grandes del tiempo. Este valor límite de b se denomina a menudo **capacidad de transporte** de una población específica para situaciones en que y denota una población.

## Soluciones de equilibrio

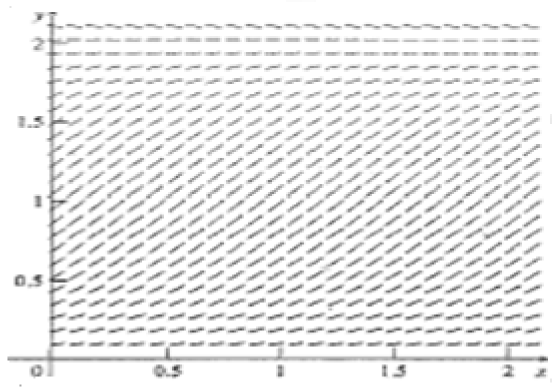
Existen dos condiciones iniciales específicas para las cuales el análisis anterior se demora, a saber, $y_0$ = 0, y $y_0$ = b. Si $y_0$ = b, entonces de la ecuación diferencial vemos que su tasa de cambio es siempre cero, (recordemos que y = b era una isóclina para pendiente cero). Advierta que y(x) = 0 es también una solución de equilibrio, y tiene sentido el hecho de que si tenemos un proceso en el que la tasa de cambio es proporcional al número presente, si comenzamos con cero, nos quedaremos en cero. De manera semejante, como se vio del campo de pendientes, para cualquier $y_0 > 0$ todas las soluciones tienden hacia b a medida que el tiempo se incrementa, de modo que si comenzamos en este valor límite de b, no habrá cambio en la población.

## Puntos de inflexión

La figura 3 muestra una ampliación del campo de pendientes entre las dos soluciones de equilibrio, donde vemos que hay puntos de inflexión. Para descubrir la ubicación exacta de los puntos de inflexión, derivamos la ecuación diferencial original (40) con respecto a t para obtener:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\left[\frac{dy}{dt}(b-y) + y\left(-\frac{dy}{dt}\right)\right] = a(b-2y)\frac{dy}{dt} = a^2(b-2y)(b-y)$$

**Figura 3.** Campo de pendiente entre las dos soluciones de equilibrio.



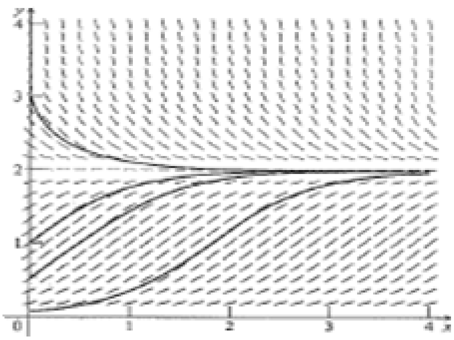

**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Se ve que hay tres lugares donde esta segunda derivada es cero: dos que coinciden con las soluciones de equilibrio y la tercera cuando b = 2y. Por lo tanto, el punto de inflexión debe presentarse cuando y = b/2, es decir, a la mitad de la capacidad de transporte b.

## Concavidad

Debido a que y es monótonamente creciente para $0 < y < b$, acabamos de descubrir que las soluciones de la ecuación logística para $y > 0$ tendrán un punto de inflexión solamente cuando $o < y_0 < b/2$. En las otras soluciones las curvas solución son crecientes cóncavas hacia abajo (para $b/2 < y_0 < b$) o bien decrecientes y su concavidad hacia arriba (para $y_0 > b$). Algunas curvas solución trazadas a mano para la ecuación logística se ilustran en la figura 4. Observe que se han dado muchas características esenciales de las soluciones de la ecuación logística sin tener la solución explícita.

**Figura 4.** Gráfica de algunas curvas solución de la ecuación logística.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

### Solución analítica de la ecuación logística

Podemos encontrar soluciones explícitas de la ecuación diferencial logística:

$$\frac{dy}{dt} = ay(b - y) \qquad (43)$$

En primer lugar, observemos que existen dos soluciones explícitas de la ecuación diferencial logística; a saber:

$$Y(t) = 0 \text{ y, } y(t) = b$$

Si ahora buscamos las soluciones explícitas sin equilibrio, de (43) encontramos haciendo separación de variables que:

$$\int \frac{dy}{y(b-y)} = \int a dt.$$

Esta ecuación se resuelve por fracciones parciales, la cual nos lleva a:

$$\int \frac{1}{b}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b-y}\right) dy = \int a dt$$

Integrando, se tiene:

$$ln|y| - ln|b-y| = abt + C_1$$

Donde $C_1$ es la constante de integración. Haciendo uso de las propiedades de las funciones logarítmicas, podemos volver a escribir la expresión anterior como:

$$\ln\left|\frac{y}{b-y}\right| = abt + C_1 \qquad (44)$$

Esta es una función explícita de t, e implícita de y. En este caso es posible resolver (44) para y, para obtener una solución explícita. Tomando la exponencial en ambos miembros de (44), obtenemos:

$$\frac{y}{b-y} = Ce^{abt} \qquad (45)$$

Donde C = $\pm e^{C} \neq 0.$ Multiplicando esta ecuación por b – y para resolver la ecuación para y, y encontrar:

$$y(t) = \frac{bCe^{abt}}{1 + Ce^{abt}}$$

Si en esta ecuación dividimos todo por $e^{abt}$, tendremos la ecuación:

$$y(t) = \frac{bC}{e^{-abt} + C} \qquad (46)$$

Observe que la solución de equilibrio, y (t)= 0, puede quedar absorbida en la ecuación inmediatamente anterior, si permitimos C = 0, pero si la otra solución, y (t) = b, no está implícita en esta misma ecuación para cualquier selección finita de C.

Si damos la condición inicial y (0) = $y_0$, entonces podemos encontrar el valor de la constante C a partir de (45), a saber:

$$C = \frac{y_0}{b - y_0}$$

Que se puede sustituir en (46) para obtener:

$$y\,(t) = \frac{b y_0}{(b - y_0)e^{-abt} + y_0} \qquad (47)$$

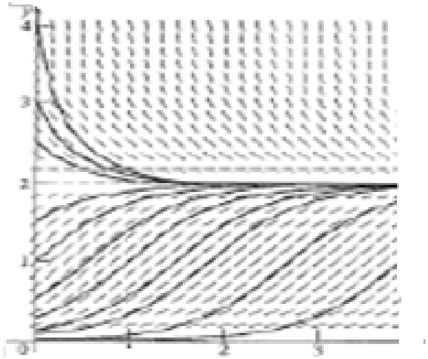
Esta es la solución explícita del problema de valor inicial asociado a (43). Examinemos esta solución dada en (47) más cuidadosamente con respecto al caso físicamente significativo en que $0 < y_0 < b$. Vemos que y (t) → $b$ a medida que t → ∞, está en completamente de acuerdo con nuestro análisis gráfico hecho anteriormente, el sugiere que b era la capacidad de transporte de la población. Al dividir esta ecuación entre b, encontramos que:

$$y(t) = \frac{y_0}{\left(1 - \frac{y_0}{b}\right)e^{-abt} + \frac{y_0}{b}}$$

De esta ecuación se infiere que si la capacidad de transporte b, es grande en comparación a la población inicial, $y_0$ de manera que $y_0/b$ pueda despreciarse cuando se le compara con 1, entonces $y \approx y_0 e^{abt}$ para t pequeños. En otras palabras, en este caso, el crecimiento inicial del modelo logístico es aproximadamente exponencial. En consecuencia, al comienzo del crecimiento de una plantación o una plantación, crecimiento logístico y exponencial.

La siguiente figura muestra algunas soluciones analíticas de la ecuación logística. Observe que hay muchas semejanzas de las gráficas analizadas cualitativamente.

**Figura 5.** Gráficas de algunas curvas solución de la función solución logística.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

## Ejemplo 4. Crecimiento logístico de la membresía de un club:

Suponga que el número máximo de socios en un club nuevo es de 800 personas debido a las limitaciones de espacio. Hace un año, el número inicial de socios era de 50 personas, pero ahora es de 200. Si el número de socios crece como una función logística, ¿cuántos socios habrá dentro de tres años?

### Solución:

Observe que el crecimiento del número de socios del club, tiene un tope de 800. Si llamamos N (t) el número de socios en un tiempo t. Entonces la cantidad de cupos para nuevos socios será 800 – N (t) y así en número de no socios que se quieren afiliar por unidad de tiempo serán: (800 – N(t))/800, y por lo tanto la razón de cambio de los socios será directamente proporcional entre los que son socios y los que se quieren afiliar, es decir:

$$\frac{dN}{dt} = kN(t)(800 - N(t))/800$$

Que se puede escribir como:

$$\frac{dN}{N(t)(800-N(t))}=\frac{k}{800}dt$$

$$\int\frac{dN}{N(800-N)}=\frac{k}{800}\int dt$$

Por fracciones parciales, se tiene:

$$\int\frac{dN}{N(800-N)}dN=\int\frac{\frac{1}{800}}{N}dN+\int\frac{\frac{1}{800}}{800-N}dN$$

$$=\frac{1}{800}lnN-\frac{1}{800}ln(800-N)=\frac{1}{800}ln\left|\frac{N}{800-N}\right|$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{1}{800}ln\left|\frac{N}{800-N}\right|=\frac{k}{800}t+C_1$$

Que se puede escribir como:

$$ln\left|\frac{N}{800-N}\right|=kt+800C_1$$

Tomando exponencial:

$$\frac{N}{800-N}=\mathrm{C}\,e^{kt}$$

Despejando N (t),

$$\mathrm{N}\,(\mathrm{t})=\frac{800Ce^{kt}}{1+ce^{kt}}$$

Dividiendo, por C$e^{kt}$, tenemos:

$$N(t)=\frac{800}{1+be^{-kt}}$$

Sabemos que cuando t = 0, se tiene N (0) = 50, luego:

$$50=\frac{800}{1+b},\qquad \mathrm{o}$$

$$1+\mathrm{b}=\frac{800}{50}=16$$

$$\mathrm{b}=15$$

Así,

$$N(t) = \frac{800}{1+15e^{-kt}} \qquad (48)$$

Cuando t = 1, entonces N (1) = 200, por lo tanto:

$$200 = \frac{800}{1+15e^{-k}}$$

$$1+15\, e^{-t} = \frac{800}{200} = 4$$

$$e^{-k} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Es decir que k = -ln (1/5). En lugar de sustituir este valor en (48), es más conveniente reemplazar el valor de e-k, así:

$$N(t) = \frac{800}{1+15\left(\frac{1}{5}\right)^{t}}$$

Dentro de tres años t será 4. Por lo tanto:

$$N(t) = \frac{800}{1+15\left(\frac{1}{5}\right)^{4}} = 781$$

Un último ejemplo de las muchas aplicaciones de la función logística es el del modelado de un rumor, en una población de un cierto tamaño M. Esta situación es similar a la de la propagación de una epidemia o de una moda nueva.

## Ejemplo 5. Modelado de la difusión de un rumor:

En una gran universidad de 45.000 habitantes, un estudiante de sociología investiga la propagación de un rumor en el campus. Cuando comienza su investigación, determina que 300 estudiantes conocen un rumor. Después de una semana, determina que 900 lo conocen. Estime el número de estudiantes que lo conocen después de cuatro semanas de comenzada la investigación, se supone que el crecimiento es logístico. Dé la respuesta al millar más cercano.

## Solución:

Sea N (t) el número de estudiantes que conocen el rumor en t semanas después de que comienza la investigación. Entonces, como el crecimiento es de tipo logístico podemos usar la ecuación, que obtuvimos en el ejemplo 5, es decir:

$$N(t) = \frac{M}{1+be^{-kt}}$$

Donde M es el tamaño de la población, que es de 45.000 y cuando t = 0 tenemos N (0) = 300. Así se tiene:

$$300 = \frac{45000}{1+b}, \text{ o}$$

$$1 + b = \frac{45000}{300} = 150$$

$$b = 149$$

Por lo tanto:

$$N(t) = \frac{45000}{1+149e^{-k}}$$

Cuando t = 1, entonces N (t) = 900. Por consiguiente:

$$900 = \frac{45000}{1+149e^{-k}}$$

$$1 + 149e^{-k} = \frac{45000}{900} = 50$$

Por lo tanto $e^{-k} = \frac{49}{149}$, entonces:

$$N(t) = \frac{45000}{1+149\left(\frac{49}{149}\right)^{t}}$$

Cuanto t = 4,

$$N(4) = \frac{45000}{1 + 149\left(\left(\frac{49}{149}\right)^{4}\right)} \approx 16000$$

Después de cuatro semanas, aproximadamente 16.000 estudiantes conocerán el rumor.

# 7.3 Finanzas personales

Hay un gran número de problemas que involucran las finanzas personales que pueden ser modelados usando ecuaciones diferenciales. Vamos a empezar por considerar lo que ocurre con el saldo de una cuenta de ahorros o de dinero invertido en una cartera de acciones y bonos.

Sea P (t) el balance en un tiempo t, y supongamos que la cuenta paga intereses a una tasa de r por ciento anual, compuesto en forma continua. Esto significa que el balance va creciendo entre el tiempo t y t + $\Delta t$, como:

P (t+ $\Delta t$) - P (t) = interés obtenido en el tiempo $\Delta t$ (49)

Como r es la tasa de interés en un año, entonces el interés obtenido en el tiempo $\Delta t$ es aproximadamente:

Interés obtenido en el tiempo m $\Delta t \approx rP(t)\Delta t$ (50)

Luego nuestro modelo, es:

$$P'(t) = lím_{\Delta t \to o} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = lím_{\Delta t \to o} \frac{rP(t)\Delta t}{\Delta t} = rP(t)$$

Esto es una vez más la ecuación exponencial, que ya hemos visto en una variedad de aplicaciones. Sabemos que la solución de esta ecuación tiene la forma:

$$P(t) = C\,e^{rt}$$

Si el valor inicial es P (0) = $P_0$, entonces tenemos que C = $P_0$, y:

$$P(t) = P_0\,e^{rt}$$

## Ejemplo 6:

Supongamos que usted coloca $1.000 en una cuenta que paga intereses a una tasa del 5% anual, compuesto en forma continua. ¿Cuál es su capital después de 40 años?

### Solución:

Para este caso tenemos que $P_0 = 1000$, y r = 0.05. Luego:

$$P(40) = 1000e^{0.05(40)} = 1000e^2 \approx 7389$$

Bajo el supuesto de que hemos hecho el balance en nuestra cuenta de ahorros, ella crecerá de manera exponencial. El supuesto básico es que la tasa de interés r es constante. Por supuesto, en la práctica esto no es cierto. Las tasas de interés cambian constantemente en respuesta a una variedad de eventos económicos y políticos que son impredecibles. Esto limita la efectividad de nuestro modelo. Para no permitir esta impredecibilidad, debemos hacer el análisis para la variedad de intereses que van desde el más bajo hasta el más alto que esperamos. Este tipo de análisis de "qué pasaría si" nos permitirá poner entre paréntesis los resultados reales.

### Un interés, teniendo en cuenta los retiros constantes

Vamos a mirar el saldo P (t) en una cuenta de inversión de la cual la cantidad W se retira todos los años y la cual paga intereses a razón de r porcentaje anual, compuesto continuamente. Cuando agregamos el efecto de los retiros anuales a la ecuación (49), tenemos:

P (t+ $\Delta t$) - P (t) = interés obtenido en el tiempo $\Delta t$ – el retiro en el tiempo $\Delta t$

Una vez más, el interés ganado está dado por (50). Por otro lado, si W es la cantidad retirada por unidad de tiempo, la cantidad retirada en el tiempo es:

$$W\Delta t$$

Luego

$$P(t+\Delta t) - P(t) \approx rP(t)\Delta t - W\Delta t$$

Calculamos la derivada usando la definición del límite del cociente:

$$\frac{dP}{dt} = lím_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{rP(t)\Delta t - W\Delta t}{\Delta t}$$

$$= rP - W \qquad (51)$$

De manera similar, si en vez de retirar depositamos D dólares por año, entonces, tendríamos:

$$\frac{dP}{dt} = rP + D \qquad (52)$$

Nuestro siguiente problema es comenzar a planificar la jubilación. Los mismos modelos de procesos de ahorro funcionan hacia cualquier meta financiera, tales como el ahorro para la educación del niño o la compra de la casa.

## Ejemplo 7:

Supongamos que usted está empezando a trabajar y decide guardar $2.000 cada año. Suponiendo que usted no tiene ahorros para empezar y que sus ahorros se ganan 5 % por año, compuesto continuamente, ¿cuánto dinero acumula después de 30 años?

## Solución:

Aplicando nuestro modelo (52) y tomando P (t) en miles de dólares, tenemos:

$$\frac{dP}{dt} = 0.05\mathrm{P} + 2$$

Esta es una ecuación diferencial lineal. Calculamos el factor integrante que sería:

$$\mu(t) = e^{-\int 0.05dt} = e^{-0.05t}$$

Luego:

$$[e^{-0.05t}]^{/} = e^{-0.05t}\left[P^{/} - 0.05P\right] = 2e^{-0.05t}$$

Integrando a ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$e^{-0.05t}P(t) = -40e^{-0.05t} + C$$

O,

$$P(t) = \ -40 + Ce^{0.05t}$$

De acuerdo a la condición inicial, P (0) = 0, se tiene:

$$0 = \mathrm{P}\ (0) = -\ 40 + \mathrm{C}$$

Luego:

$$\mathrm{C} = 40$$

Y la solución general es:

$$\mathrm{P}\ (\mathrm{t}) = 40\ (e^{0.05t} - 1) \qquad (53)$$

Queremos averiguar que es P (30), usando (53), se tiene:

$$\mathrm{P}\ (30) = 40\ \ (\mathrm{e}^{1.5} - 1) = 139.257{,}6$$

Este resultado está en miles de dólares, luego después de 30 años el balance es $139.268.

## Planificando para la pensión

Vimos en el ejemplo 7, cómo después de todo, la cantidad de dinero puesto en el ahorro fue de $2.000 por año, durante 30 años, para un total de $139.268. Debido al interés compuesto, esto ha aumentado considerablemente.

Ahora, sin embargo, vamos a invertir la pregunta ¿cuánto dinero se necesita para jubilarse? Miremos un problema que nos resuelva esta pregunta.

## Ejemplo 8:

Después de pensarlo, usted ha decidido que va a necesitar $50.000 cada año para vivir después de jubilarse y que usted ha planeado vivir 30 años después de su jubilación. Suponiendo que su cuenta de jubilación ganará interés del 5 %, mientras que usted está tomando de su cuenta $50.000 cada año después de su retiro, ¿qué cantidad de dinero debe estar en la cuenta cuando se retire?

## Solución:

Sea P (t) el saldo de su cuenta de jubilación en el tiempo t después de la jubilación. Sea $P_0$ el saldo de su cuenta de jubilación cuando se retire. Entonces P (0) = $P_0$. El problema es encontrar $P_0$ con P (30) $\geq 0$. De nuevo usamos en miles de dólares como nuestra unidad.

De acuerdo al modelo desarrollado (51), tenemos:

$$\frac{dP}{dt} = 0.05P - 50$$

Que de nuevo es una ecuación lineal. Buscando el factor integrante:

$$\mu(t) = e^{-\int 0.05dt} = e^{-0.05t}$$

De donde se tiene:

$$[e^{-0.05t}P]^{/} = -50e^{-0.05t}$$

Integrando, se tiene:

$$e^{-0.05t}P(t) = 1000e^{-0.05t} + C$$

o,

$$P\ (t) = 1000 + Ce^{0.05t} \quad (54)$$

Como tenemos que P (0) = $P_0$, entonces tenemos que:

$$P_0 = P\ (0) = 1000 + C$$

Por lo tanto:

$$C = P_0 - 1000$$

Reemplazando en (54), se tiene:

$$P\ (t) = 1000 + (P_0 - 1000)e^{0.05t}$$

Puesto que usted quiere retirar $50.000 cada año hasta que muera por 30 años después de retirarse, tendrá que ser P (30)$\geq 30$. Si usted tiene su cuenta en cero al cabo de los 30 años, entonces se tendrá que:

$$0 = P\ (30) = 1000 + (P_0 - 1000)e^{1.5}$$

Resolviendo esta ecuación para $P_0$, se tiene:

$$P_0 = 1000(1 - e^{-1.5}) = 776.8698$$

Por lo tanto, tendrá que haber ahorrado $776.870 antes de retirarse, con el fin de tener la jubilación que desea.

## Ahorrar para la jubilación

Vimos en el ejemplo 7, que ahorrando $2.000 dólares al año producen después de 30 años un capital de $139.00. Pero la verdad es que usted va a tener que hacer mucho más. Pero, ¿cómo se van a acumular los fondos necesarios para financiar una jubilación cómoda? Veamos el siguiente ejemplo.

## Ejemplo 9:

Después de pensar un poco más sobre el ejemplo 8, se decide que se debería poner un porcentaje fijo $\rho$ de su sueldo para la jubilación. La pregunta es, ¿qué valor de r permitirá alcanzar nuestro objetivo?

## Solución:

En primer lugar, se da cuenta de que su sueldo actual de $35.000 por año no se quedará para siempre en ese nivel, con suerte por no más de un año. Necesitamos un modelo de cómo su salario crecerá con el tiempo. Vamos a suponer que su salario se incrementará en 4 % por año. Eso es solo un poco más que la tasa de inflación. Este pensamiento conduce a la ecuación diferencial $S' = 0.04\ S\ (t)$ donde $S\ (t)$ es el salario anual en miles de dólares. Estamos familiarizados con la ecuación exponencial, por lo que es fácil resolver esta ecuación para obtener:

$$S(t) = 35e^{0.04t}$$

Ahora se nota que con este modelo, el sueldo al cabo de 40 años será de $173.000. Esto parece excesivo, pero tiene la seguridad de sus asesores financieros en que este tipo de aumento durante toda la vida no es nada raro. Recordemos, estamos incluyendo en nuestros pronósticos, el aumento del 4 % por año, esta proyección apenas cubre la tasa de inflación histórica. Sin embargo, hay otro motivo de preocupación. Si su salario al momento del retiro es tan grande, ¿qué tipo de ingresos debe planificar en sus años para la jubilación? Es evidente que $50.000 en el ejemplo previo es demasiado poco. Usted decide que $100.000 es una cifra más razonable. Esto significa que el tamaño de su cuenta de jubilación al momento del retiro tiene que ser el doble de la que se encuentra en el ejemplo anterior, usted decide ser cauto y aspirar a un fondo de retiro de $1.600.000.

Asumiremos una vez más que su cuenta de jubilación ganará una tasa de interés del 5 %. Sea P (t) denota el equilibrio en miles de dólares en su cuenta de jubilación en el momento t. La cuenta P (t) crece entre el tiempo t y t + $\Delta t$, a partir de dos momentos de tiempo, el interés sobre el saldo, que es 0.05P (t) $\Delta t$, y de su inversión, que es $\rho$S (t) $\Delta t$. Luego se tiene que:

$$\mathrm{P}(\mathrm{t}+\Delta t)-\mathrm{P}(\mathrm{t}) \approx 0.05P\,(t)\Delta t+\rho\,S(\,t\,)\Delta t$$

Por lo tanto:

$$P^{/}(\,t)=lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=0.05P(t)+\rho S(t)=0.05P(t)+35e^{0.04t}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial lineal, como antes, tenemos que el factor integrante $\mu(t)=e^{-0.05t}$, de esto tenemos que:

$$[e^{-0.05t}p(t)]^{/}=35\rho e^{-0.01t}$$

Integrando, se tiene:

$$e^{-0.05t}P(t)=35\rho\int e^{-0.01t}dt=-3500\rho e^{-0.01t}+C$$

O:

$$\mathrm{P}(\mathrm{t}) = -3500\,\rho e^{0.04t}+Ce^{0.05t}$$

Podemos asumir que la cuenta de jubilación empieza en cero pesos, por lo que esta condición inicial dice que:

$$0 = P\ (0) = -\ 3500\rho + C$$

Lo cual nos lleva a concluir que C = 3500$\rho$, y:

$$P\ (t) = 3500\ \rho(e^{0.05t} - e^{0.04t})$$

Ahora podemos calcular el valor de $\rho$, para esto se tiene que comparar con nuestro objetivo, que es que P (40) = 1600. Completando el cálculo, se encuentra que tiene que ahorrar un 18.77 % de su salario para poder lograr un retiro confortable.

## Ejemplo 10:

De acuerdo al ejemplo 9, se tiene que si el salario es bajo al principio de su carrera, el ahorro de esta gran parte de su salario será difícil. Tal vez, incluso mientras se es joven debe disfrutar más de los frutos de su trabajo. ¿Qué pasaría si tuviera que empezar a ahorrar a un ritmo más modesto y poco a poco aumentar su tasa de ahorro a través del tiempo?

Primero tiene que decidir qué porcentaje quiere ahorrar durante un año t, es decir, puede calcular:

$$\rho(t) = \frac{Rt}{40}$$

Con esta elección, R será la tasa de ahorro justo antes de retirarse después de 40 años de trabajo ¿Qué R tiene que ser con el fin de lograr su objetivo de jubilación?

## Solución:

El modelo en este caso es similar al del ejemplo 9, pero tiene que cambiar para adaptarse a la variabilidad de su tasa de ahorro, es decir:

$$P^{/}(t) = 0.05\mathrm{P}\ (\mathrm{t})$$

$$\rho S(t) = 0.05P(t) + \frac{Rt}{40}.35e^{0.04t} = 0.05P + 0.875Re^{0.04t}$$

De nuevo esta es una ecuación lineal, el factor integrante es $\mu(t) = e^{-0.05t}$, por lo tanto tenemos:

$$[e^{-0.05t}p(t)]^{/} = 0.875Rte^{-0.01t}$$

También:

$$e^{-0.05t}P\ (t) = 0.875R\int te^{-0.01t}dt = -87.5R(t+100)e^{-0.01t} + C$$

O:

$$P(t) = -87.5R(t+100)e^{0.04t} + Ce^{0.05t}$$

Usando el hecho de que P (0) = 0, se tiene que C = 8750R, reemplazando en la ecuación anterior, se tiene:

$$P(t) = 87.5R(100e^{0.05t} - (t+100)e^{0-04t})$$

Finalmente, usamos nuestro objetivo P (40) = 1600 para calcular R = 0.4021, Esto significa que con este plan, aunque su tasa de ahorro en su carrera temprana será pequeña, en el último año antes de su jubilación tendrá que ahorrar más del 40 % de su salario.

# 7.4 Ley de Newton del enfriamiento o calentamiento

Otro modelo muy importante nos lo da la ley de Newton del enfriamiento (o calentamiento) que nos dice:

«La tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea».
Esto es:
Si T (t) es la temperatura del cuerpo en el tiempo t, Tm es la temperatura del medio, k la constante de proporcionalidad, y $\frac{dP}{dt}$ la tasa de cambio de la temperatura, entonces de acuerdo a la ley de Newton, se tiene:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Es fácil ver que esta ecuación diferencial se puede resolver mediante el método de variables separables, de la siguiente forma:

$$\frac{dT}{(T - T_m)} = kdt$$

Tomando la integral a ambos lados, se tiene:

$$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int kdt$$

Integrando:

$$\text{Ln}(T\text{-}Tm) = kt + C1, \text{ o}$$

$$T - Tm = e^{kt} e^{C_1}$$

$$T\,(t) = Tm + Ce^{kt} \qquad (55)$$

## Ejemplo 11:

Un objeto con temperatura de 72 $^0$F, se coloca en el exterior de una casa donde la temperatura es de -20 $^0$F, a las 11:05 a. m. la temperatura del objeto es de 60 $^0$F y a las 11:07 a.m. su temperatura es de 50 $^0$F. ¿A qué hora se colocó el objeto en el exterior?

### Solución:

Sea T (t) la temperatura del objeto en el tiempo t. Escogemos por conveniencia el origen de la escala del tiempo $t_0$= 0 a las 11: 05, de manera que $T_0$= 60 $^0$F. Debemos determinar el tiempo t tal T (t) = 72 $^0$F. Al sustituir en nuestra ecuación (55), $T_0$= 60 $^0$F y Tm= -20 $^0$F, tenemos que:

$$T(t) = -20 + Ce^{kt}$$

Pero, observemos que T (0) = 60, por lo tanto, tendremos en nuestra ecuación anterior:

$$60 = -20 + C, \text{ es decir que } C = 80$$

Luego nuestra ecuación se convierte en:

$$T(t) = -20 + 80e^{kt}$$

Como la temperatura del objeto en t = 2 es T (2) = 50 0F, entonces tenemos que:

$$T(2) = 50 = -20 + 80e^{2k}$$

Despejando k:

$$e^{-2k} = \frac{70}{80} = \frac{7}{8}$$

Tomando logaritmos y despejando k se obtiene:

$$K = -\frac{1}{2} ln\left(\frac{7}{8}\right)$$

Luego nuestro modelo se convierte en:

$$T\ (t) = -20 + 80e^{\frac{1}{2}ln\left(\frac{7}{8}\right)t}$$

Como queremos encontrar t tal que T (t) = 72, entonces:

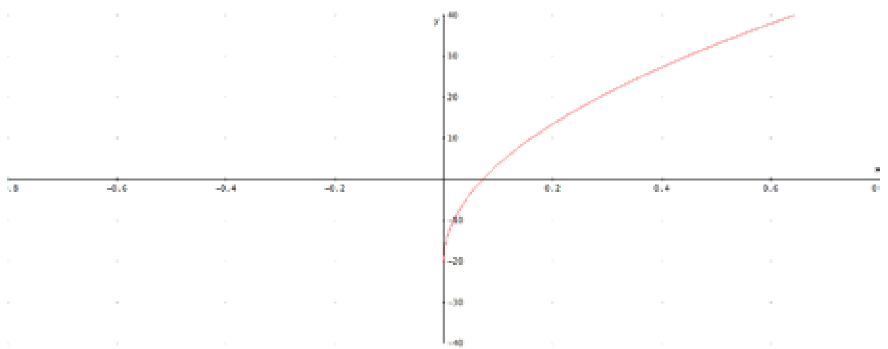
$$T\ (t) = 72 = -20 + 80e^{\frac{1}{2}ln\left(\frac{7}{8}\right)t}$$

Despejando t:

$$t = -\frac{2ln\left(\frac{23}{90}\right)}{ln\left(\frac{8}{7}\right)} \approx -2.05\ min$$

Por lo tanto, el objeto fue colocado afuera aproximadamente 2 minutos y 5 segundos antes de las 11:05 a. m. es decir, a las 11:02:55 a.m. Como se evidencia en la siguiente figura.

**Figura 6.** Gráfica de la función T (t) = -20 + 80 $e^{\frac{1}{2}ln\left(\frac{7}{8}\right)t}$.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 12:

Suponga que la temperatura ambiente en su oficina es 70 $^{0}$F. La experiencia indica que la temperatura de una taza de café que usted trajo a su oficina ha caído desde 120 $^{0}$F a 100 $^{0}$F en 10 minutos. ¿Cuál debe ser la temperatura de su taza de café cuando se pone dentro de la oficina si desea que cuando lleve 20 minutos la temperatura baje a 100 0F?

## Solución:

Sea T (t) la temperatura en grados Fahrenheit en el tiempo t, Tm= 70 $^0$F, también se tiene que T (10) = 100 $^0$F y tomamos T (0) = 120 $^0$F. Por la fórmula de Newton se tiene que:

$$T(t) = 70 + Ce^{-kt} \qquad (56)$$

Debemos calcular los valores de C, y k, Como T (0) = 120, se tiene que:

$$T(0) = 120 = 70 + C,$$

$$C = 120 - 70 = 50,$$

Luego:

$$T(t) = 70 + 50\, e^{-kt}$$

Ahora vamos a determinar k para el flujo de la energía térmica de nuestra taza de café. Como tenemos que T (10) = 100, reemplazando, se tiene:

$$T(10) = 100 = 70 + 50\, e^{-10k}$$

Despejando:

$$\frac{30}{50} = \frac{3}{5} = e^{-10k}$$

Tomando logaritmos, tenemos que:

$$ln\left(\frac{3}{5}\right) = -10k, k \approx -0.05$$

Entonces nuestro modelo será:

$$T(t) = 70 + 50\, e^{-0.05t}$$

Ahora sí podemos resolver el problema de determinar la temperatura inicial si T (20) = 100.

Observemos que no importa cuál sea la condición inicial, a medida que t crece mucho, T (t) se acerca a Tm, es decir que la temperatura de la superficie se aproxima a la temperatura del medio. La manera en la cual la temperatura ambiente es aproximada está descrita por (56). Usualmente se puede expresar la constante arbitraria C en términos de la condición inicial T (0) para la temperatura. Dejando T = 0 en (56) tenemos T (0) = 70 + C, es decir que C = T (0) – 70, entonces podemos escribir la ecuación (56) como:

$$T(t) = 70 + [T\ (0) - \ 70]e^{-kt}$$

Luego tenemos en nuestro caso que:

$$100 = T(20) = 70 + [T(0) - 70]e^{20ln\frac{3}{5}},$$

O:

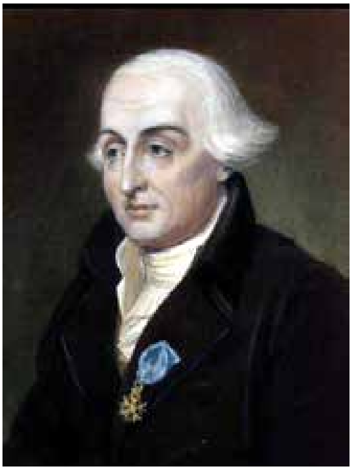
$$30 = \frac{9}{5}[T(0) - 70]$$

Resolviendo esta ecuación para la temperatura inicial T (0), obtenemos:

$$T(0) = 70 + \frac{30.25}{9} \approx 153.33\ ^{0}F$$

En este ejemplo, la temperatura de superficie de la taza de café se redujo desde 120 $^{0}$F hasta 100 $^{0}$F en 10 min y $153\frac{1}{3}$ $^{0}$F a 100 $^{0}$F en 20 min. Esto demuestra la imposibilidad de adivinar la respuesta sin necesidad de utilizar la ecuación diferencial y su solución.

**Figura 7.** Joseph-Louis Lagrange (1736-1810).



**Fuente.** Fuente. Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual de la Universidad EAN).

Bautizado como Giuseppe Lodovico Lagrangia, también llamado Giuseppe Luigi Lagrangia o Lagrange (o bien José Luis de Lagrange; nace en Turín el 25 de enero de 1736, y muere en París el 10 de abril de 1813. Fue un físico, matemático y astrónomo italiano naturalizado francés, que después de formarse en su Italia natal pasó la mayor parte de su vida en Prusia y Francia.

# 7.5 Circuitos eléctricos

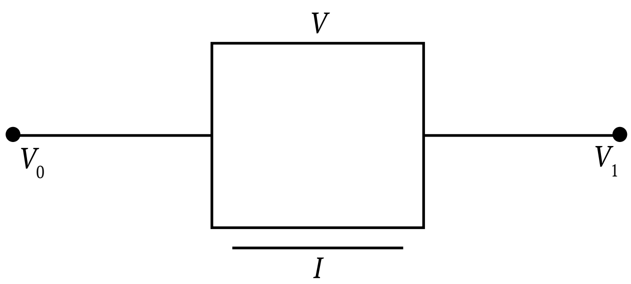
Una de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales que con frecuencia se repetirán a lo largo de este libro es la teoría de circuitos electrónicos. Hay varias razones para esto, entre ellas la importancia de esta teoría, así como la omnipresencia de las ecuaciones diferenciales en la teoría de circuitos. Además, los circuitos son un ejemplo de lo que podría llamarse modelos de red, los cuales se utilizan ampliamente, por ejemplo, en la fabricación y otros sistemas económicos.

Los circuitos serán cubiertos de nuevo en mayor detalle más adelante. En esta sección vamos a presentar el circuito básico, vamos a utilizar y dar algunos ejemplos sencillos de circuitos que se describen por primera vez, mediante ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Vamos a tener en cuenta solo circuitos agrupados por parámetros. En la teoría de circuitos, la palabra circuito significa que cantidades tales como la corriente están determinadas únicamente por la posición a lo largo del camino. Un alambre tiene un espesor finito, y un interesante comportamiento eléctrico se produce a través del cable. No hacemos caso de este tipo de efectos por parámetros concentrados, significa que el efecto de varios de los componentes del circuito se pueden considerar concentrados en un solo punto. Lo contrario de uno de los parámetros agrupados es un circuito de parámetros distribuidos. El análisis de los circuitos de parámetros distribuidos a menudo implica ecuaciones diferenciales parciales que no se discutirán en este libro. Las antenas son un ejemplo de circuitos de parámetros distribuidos.

En cada punto del circuito hay dos cantidades de interés: voltaje (o potencial) y la corriente (o flujo de carga). La corriente es, por convención, el flujo neto de carga positiva. Una rama es parte de un circuito con dos terminales a los que se pueden hacer conexiones, un nodo es un punto en el que dos o más ramas se unen (un nodo se denota en nuestros bocetos como un punto grande), y un bucle es un camino cerrado formado mediante la conexión de las ramas (figura 8). Nuestras leyes básicas de modelado son las leyes de circuitos de Kirchhoff y las leyes de circuito y voltaje.

**Figura 8.** Gráfica de un circuito eléctrico Básico.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

- **Ley de corriente:** la suma algebraica de las corrientes que entran en un nodo en cualquier instante es igual a cero.
- **Ley de voltaje:** la suma algebraica de las caídas de voltaje alrededor de un bucle en cualquier instante es igual a cero. La ley de voltaje es equivalente a decir que la caída de tensión de un punto a otro es la misma en cualquier dirección a lo largo del circuito. Vamos a discutir estas leyes brevemente.

Para configurar las ecuaciones del circuito, una variable se asigna a cada rama. Se puede hablar de cualquiera de los potenciales factores (tensiones) en los nodos o las caídas de potencial a través de cualquiera de las ramas. A continuación la ley de corriente de Kirchhoff se puede aplicar a cada nodo, y la ley de voltaje para cada bucle. Este procedimiento presenta un cierto grado de arbitrariedad. Generalmente hay algo de redundancia entre las ecuaciones, y la determinación de un número mínimo de ecuaciones es generalmente computacionalmente no trivial.

En esta sección vamos a discutir circuitos con solo uno o dos bucles. Consideremos la rama que contiene dos dispositivos terminales, como se muestra en la figura 8. La corriente se denota por i. Los voltajes en los dos nodos se denotan por $v_0$ y $v_1$. La caída del voltaje se define como la diferencia, $v = v_0 - v_1$. Para nuestros propósitos, el comportamiento del dispositivo está completamente determinada si conocemos $v_0$ e i en cualquier tiempo t. La relación entre V e i es denotada por V - i característica del dispositivo particular. Vamos a considerar solo los siguientes cinco tipos básicos de dispositivos.

**Resistor:** si la caída de tensión v (medido en voltios) se determina de forma única por la corriente i (medida en amperios) y el tiempo:

$$v = f(i, t)$$

El dispositivo se llama una **corriente-resistencia controlada**, si el voltaje es proporcional a la corriente (también conocida como ley de Ohm).

$$E_R = iR$$

R depende solamente de t, entonces el dispositivo es una **resistencia lineal** y R se llama la resistencia (generalmente medida en ohmios; un ohmio es la resistencia que daría a una caída de tensión de 1 volt si la corriente es de 1 amperio). En muchas aplicaciones R se puede aproximar por una constante. La resistencia se denota por el símbolo . El coeficiente R mide la resistencia del dispositivo para el flujo de electricidad. Para un voltaje dado v, i = V / R. Los grandes valores de R corresponden a las corrientes pequeñas, ya que el dispositivo se resiste al flujo de electricidad.

**Capacitor:** un condensador almacena energía en forma de una carga q (medida en culombios). La carga q y el voltaje v a través del condensador son proporcionales:

$$q = C\,v, \text{ o} \qquad (57)$$

$$v = \frac{1}{C} q$$

$$E_C = \frac{1}{C} q$$

Donde C es la capacitancia (medida en fardáis). Un faradio es la capacitancia cuando 1 culombio de electricidad aumenta el potencial de 1 voltio. La carga se acumula en un condensador. La corriente se debe al flujo de electrones. Si la carga sobre un capacitor es constante en el tiempo, no existe un flujo de electrones. La razón de cambio de la carga es el flujo de electrones o la corriente:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (58)$$

Si la capacitancia C es constante, podemos derivar (57) para obtener:

$$\frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$$

Y por (58), se tiene:

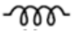
$$I = C\frac{dv}{dt}$$

El símbolo para un capacitor es $\dashv\vdash$. Solo hablaremos de capacitores lineales en este libro.

## Inductor

Un inductor almacena energía en campo magnético. La tensión-corriente actual de un inductor lineal (llamada ley de Faraday y Lenz) es:

$$E_L = L\frac{di}{dt}$$

Donde L es llamada la inductancia (y su medida es en Henry). Un Henry es la inductancia con la cual un voltio es inducido por una corriente, variando a la razón de un amperio por segundo. El símbolo para un inductor es .

Para muchos dispositivos, tales como transistores, se diseñan modelos por considerar que son compuestos de condensadores lineales, inductores y resistores con corrientes controladas. Las resistencias lineales no serán suficientes para modelar completamente un transistor.

No hay ningún dispositivo, por supuesto, que solo tenga un resistor o un inductor. Sin embargo, podemos analizar muchos circuitos considerándolos que son formados por resistencias, inductores y condensadores. Además, no hay ningún dispositivo que sea realmente lineal. Sin embargo, si se ponen el voltaje y la corriente permitida y algunas restricciones, a menudo podemos hacer la hipótesis de que el dispositivo es lineal. Al igual que con los problemas físicos, algunos supuestos son necesarios para aproximar una situación física mediante un modelo matemático.

Muchos estudiantes conocen las relaciones fundamentales para capacitancia, inductor y resistencias. Para otros, que no la conozcan, es importante tener la siguiente tabla en la solución de problemas.

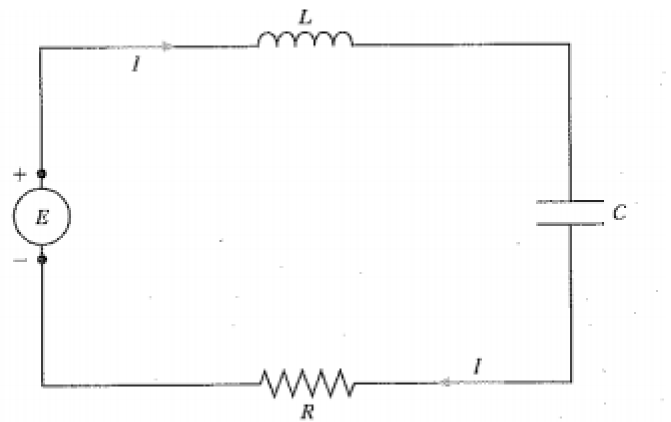
**Tabla 2.** Unidades y símbolos utilizados en los circuitos eléctricos.

| Cantidad | Representación literal | Unidades | Representación simbólica |
|---|---|---|---|
| Fuente de voltaje | $E$ | voltio (V) | Generador<br>Batería |
| Resistencia | $R$ | ohm (Ω) | |
| Inductancia | $L$ | henrio (H) | |
| Capacitancia | $C$ | faradio (F) | |
| Carga | $q$ | coulomb (C) | |
| Corriente | $I$ | amperio (A) | |

**Fuente.** Elaborada por el autor.

Para derivar la ecuación diferencial que gobierna el circuito de la figura 9, empezamos con la ley de Kirchhoff del voltaje, la cual nos dice que la suma de las caídas de tensión en la resistencia, la inductancia, el condensador y la fuente de tensión es cero:

**Figura 9.** Representación de la ley de Kirchhoff para el voltaje.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

$$E_L + E_c + E_R - E = 0$$

En la ecuación anterior, hemos iniciado y finalizado en el terminal positivo de la fuente de tensión. La caída de tensión es positiva en la dirección de la corriente y negativo en la dirección opuesta. Observe que las señales en la fuente de tensión en esta ecuación para leer:

$$E_L + E_c + E_R = E$$

Usando las leyes vistas anteriormente tenemos que:

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q + RI = E \qquad (59)$$

La corriente I representa movimiento de carga. De donde:

$$\mathrm{I} = \frac{dq}{dt} \qquad (60)$$

Derivando la ecuación (59) y usando (60) para eliminar, se tiene:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + R\frac{dI}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

O:

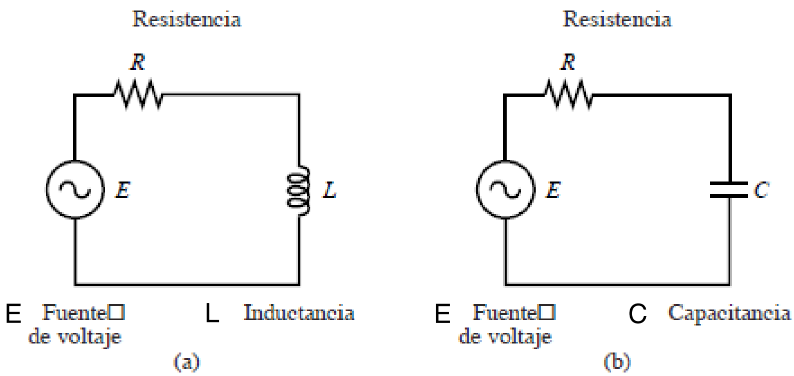
$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}$$

Las condiciones iniciales son usualmente impuestas sobre la condición inicial de la carga sobre el capacitador q (0) y la corriente inicial I (0). Para resolver la ecuación de segundo orden anterior, se conocen ambos I (0) y i/ (0). La derivada I/ (0), se puede encontrar reemplazando I (0) y q (0) en (59) y resolviendo I/ (0) para obtener:

$$I^{/}(0) = \frac{1}{L}\left(E(0) - R(0) - \frac{1}{C}q(0)\right)$$

Los sistemas de ecuaciones y las ecuaciones de segundo orden las vamos a ver más adelante. Sin embargo, hay algunos casos especiales que se pueden resolver usando lo visto hasta ahora para ecuaciones diferenciales lineales, estos son los casos RL y RC que se muestran en la figura 10.

**Figura 10.** Gráficas de circuitos RL  y RC.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

Por ejemplo si no existe capacitor en el circuito, entonces la ecuación (69) toma la forma:

$$RI + L\frac{dI}{dt} = E \qquad (61)$$

Que es una ecuación lineal de primer grado para la corriente I.

## Ejemplo 13:

Suponga que un circuito eléctrico tiene una resistencia de R = ½ $ohm$ (Ω), y un inductor de L = 1 Henry (H). Asuma que el voltaje de la corriente es constante E = 1 volt (V). Si la corriente inicial es 0 ampere(A), encuentre la corriente resultante.

### Solución:

Por la ecuación (61), tenemos que:

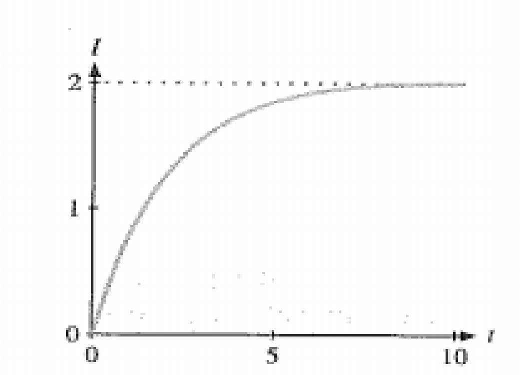
$$\frac{1}{2}I + 1.\frac{dI}{dt} = 1, \qquad I\,(0) = 0$$

Esta ecuación es tanto lineal como separable. Resolviendo esta ecuación por cualquiera de estos métodos tenemos que:

$$I\,(t) = 2\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)$$

La solución gráfica de esta ecuación es:

**Figura 11.** Gráfica de la curva solución.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ahora si suponemos que el circuito no tiene inductor, entonces la ecuación (62), nos queda:

$$\frac{1}{C}q + RI = E$$

Usando el hecho de que I = dq /dt, se sigue que:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E \qquad (62)$$

## Ejemplo 14:

Suponga que un circuito eléctrico tiene una resistencia de R = 2 Ω y un capacitor de C = 1/5 F. Asuma que el voltaje de carga es E = cos t V. Si la corriente inicial es 0 A. Encuentre la corriente resultante.

### Solución:

Con los datos dados de la ecuación (62), se tiene:

$$2\frac{dq}{dt} + 5q = \cos t$$

Esta es una ecuación lineal para q. Resolviendo dicha ecuación, encontramos que el factor integrante es $\mu(t) = e^{\frac{5t}{2}}$. Multiplicando la ecuación anterior por este factor se tiene que:

$$\left(e^{\frac{5t}{2}}q\right)' = e^{\frac{5t}{2}}\left(\frac{dq}{dt} + \frac{5}{2}q\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{5t}{2}}\cos t$$

Integrando, se tiene:

$$e^{\frac{5t}{2}}q(t) = \frac{1}{2}\int e^{\frac{5t}{2}} costdt = \frac{1}{29}e^{\frac{5t}{2}}(2sen\, t + 5\, cost) + C)$$

Resolviendo para q, tenemos:

$$Q(t)=\frac{1}{29}(2\ \ sen\ \ t+5\ \ cost)+Ce^{-\frac{5t}{2}}$$

Si derivamos esta ecuación encontramos la fórmula para la corriente:

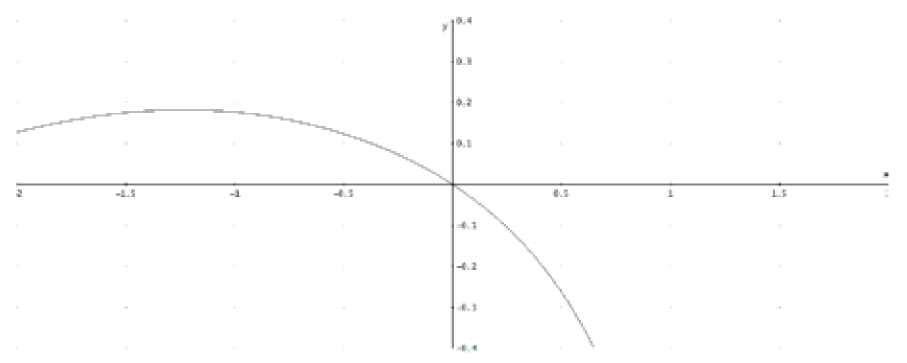
$$\mathrm{I}\,(\mathrm{q}) = \frac{1}{29}(2\cos t - 5\, sen\, t) - \frac{5}{2}Ce^{-\frac{5t}{2}}$$

Evaluando la constante C usando la condición inicial I (0) = 0, y la última ecuación tenemos la respuesta final:

$$\mathrm{I}\ (\mathrm{t}) = \frac{1}{29}\left(2\cos t - 5\, sen\, t - 2\, e^{-\frac{5}{2}t}\right)$$

La figura 12 muestra el comportamiento de la corriente.

**Figura 12.** Gráfica del comportamiento de la corriente.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 15:

Consideremos el circuito dado por la figura 13 con un resistor de 3 ohms y un inductor con 1 H. Determine la corriente como una función del tiempo en este circuito, dado que el valor inicial es 6 A (definido en el sentido contrario del reloj).

**Figura 13.** Gráfica de un circuito RL.


**Fuente.** Elaborada por el autor.

### Solución:

La corriente i es la misma en cada rama. En este caso, por la ley del voltaje, directamente obtenemos la ecuación diferencial para la corriente:

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0, \quad o, \frac{di}{dt} + 3i = 0$$

Esta es una ecuación diferencial lineal homogénea (no hay entrada), luego una solución particular será ip= 0. Una solución de la ecuación homogénea es i1= $e^{kt}$ = $e^{-3t}$ por lo tanto, la solución general es:

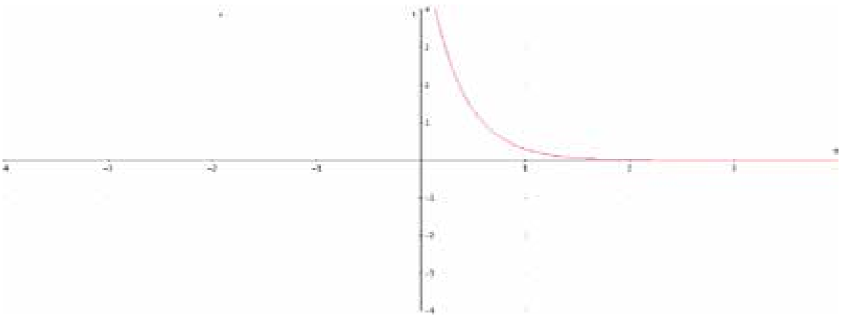
$$I(t) = C e^{-3t}$$

Como la corriente está dada inicialmente por 6 A, se tiene que i (0) = 6, es decir C = 6. La solución del problema con valor inicial es:

$$I(t) = 6 e^{-3t}$$

La curva solución es la siguiente:

**Figura 14.** Gráfica de la curva solución.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Otra aplicación muy importante de las ecuaciones diferenciales lineales se refiere a los problemas de mezclas.

# 7.6 Mezclas

Vamos a ver otros ejemplos sobre este tema de mezclas, conviene recordar el ejemplo 13 del capítulo 2. Profundizaremos más sobre este tópico por considerarlo de mucha aplicación.

Una cantidad Q (t), tal como la cantidad de algunos contaminantes en un tanque de agua, varía con el tiempo. Se añaden cantidades adicionales. La adición se llamará **flujo de entrada.** Al mismo tiempo, parte de esta cantidad se está perdiendo. La cantidad perdida será llamada el **flujo de salida.** En el caso de un tanque de agua, la pérdida se debe a la evaporación, desbordamiento, una válvula abierta, o las tres. En todos los casos se asume que el tanque está muy bien mezclado (a través de rápida agitación si es necesario), para que la concentración del contaminante sea asumido, ya que será el mismo en todas las porciones del tanque. La idea inicial para el análisis de estos problemas es el principio físico fundamental de la conservación de la cantidad Q:

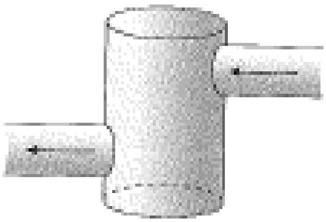
$$[Razón\ de\ cambiode\ Q] = \frac{dQ}{dt} = [Flujo\ de\ entrada\ de\ Q] - [Flujo\ de\ salida\ de\ Q] \quad (63)$$

Donde se ha notado $\frac{dQ}{dt}$, como la derivada respecto al tiempo de Q, que es la razón de cambio de Q con respecto al tiempo t.

## Procedimiento para problemas de flujo

1. Para iniciar  la sesión, es útil dibujar un boceto de un tanque que ilustre la entrada y salida con sus tuberías (figura 15).

**Figura 15.** Tanque Mezclador.



**Fuente.** Elaborada por el autor.

2. Rotular los datos y cantidades dados en la figura.
3. Expresar la razón de cambio del flujo de entrada y de salida en términos de las variables y sustituirlos (63).
4. Resolver la ecuación diferencial resultante.
5. Responder todas las preguntas tales como «cuánto tiempo».

Se pueden discutir dos tipos de problemas. En uno, el volumen de agua en el tanque es fijo, y el resultado en este caso resulta una ecuación diferencial que es fácil de resolver. En el otro caso, el volumen de agua está cambiando en el tiempo, y el resultado es una ecuación diferencial que puede ser más difícil de resolver. En algunos de los ejercicios se hará hincapié en el proceso de configuración de la ecuación diferencial, y no se le pedirá resolver las ecuaciones diferenciales.

## Ejemplo 16:

Consideremos un tanque de 100 $m^3$, lleno de agua. El agua contiene un contaminante a una concentración de 0.6 $g/m^3$. Agua limpia con una concentración de 0,15 g / m de contaminante, se bombea en el tanque bien mezclado a una velocidad de 5 $m^3$ / s. El agua que se bombea fuera del tanque fluye a través de una válvula a la misma velocidad con la que entra.

Determinar la cantidad y la concentración del contaminante en el tanque como una función del tiempo. Graficar el resultado.

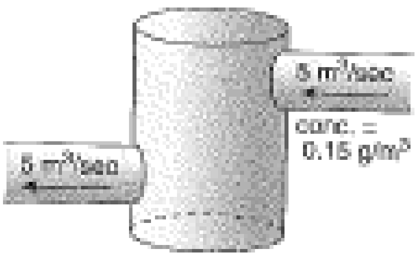
¿A qué hora se tendrá la concentración de 0,3 g / m$^3$?

## Solución:

Con el fin de ilustrar los principios generales, y dado que este es nuestro primer problema de la mezcla, vamos a incluir algunos pasos más que son necesarios para resolver este problema en particular.

En problemas de mezclas, lo mejor es primero dibujar un diagrama aproximado de un tanque que indica la entrada y la salida (figura 16). El agua fluye a una razón de 5 m$^3$ / s con una concentración de 0,15 g/m$^3$, y la mezcla fluye hacia afuera a una razón de 5 m$^3$/s. Entonces el volumen en el tanque, en cada instante de tiempo es el mismo: 100 m$^3$. Por lo general, es más fácil de formular la ecuación diferencial de acuerdo con la cantidad de contaminante. Digamos que Q (t) es la cantidad de contaminante en gramos que hay en el tanque en el tiempo t. Q depende del tiempo t, el cual medimos en segundos. La cantidad de contaminantes que van quedando en el tanque en el tiempo t, es el resultado de la diferencia de la entrada y la salida, de modo que la velocidad de cambio de la cantidad de contaminantes satisface la ecuación (63), es decir:

**Figura 16.** Tanque Mezclador.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

$$\frac{dQ}{dt} = [Razón\ de\ entrada\ del\ contaminante] - [Razón\ de\ salida\ del\ contaminante]$$

Está dado que 5 m³ de agua fluye por segundo, con una concentración de contaminante al 0.15g/m³. Entonces 5. (0.15) g de contaminante por segundo fluye hacia el tanque, por lo tanto:

*[Razón de entrada del contaminante]*

*=[Flujo del volumen de agua ].[Concentración del contaminante que fluye hacia adentro]*

Ahora se calcula el flujo de salida del contaminante. Una vez más 5 m³ por segundo fluye hacia afuera:

*[Razón de salida del contaminante]*
*=[Flujo del volumen de agua que entra]-[Concentración de contaminante que sale]*

*=5[Concentración de contaminante que sale]*

Pero no se nos da la concentración del contaminante que fluye hacia afuera. Debemos calcular esta concentración. El agua en el tanque se supone que es bien mezclado, por lo que la concentración que fluya hacia afuera se supone que es la misma que la concentración total del contaminante en el tanque. Para calcular la concentración de contaminante en un tanque, simplemente dividimos la cantidad total de contaminante por el volumen total:

$$[Concentración\ de\ contaminante\ en\ el\ tanque] = \frac{Cantidad\ del\ contaminante}{volumen} = \frac{Q(t)}{100}$$

En este caso el volumen de agua es fijo en 100 m³. La cantidad de contaminantes en el tanque es desconocida, pero nosotros lo llamamos Q (t). La ecuación diferencial para la cantidad de contaminante se sigue de (63):

$$\frac{dQ}{dt} = 5.0.15 - 5.\frac{Q}{100} = 0.75 - \frac{1}{20}Q$$

Esta ecuación diferencial es lineal, la podemos escribir como:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{20}Q = 0.75 \qquad (64)$$

Como esta es una ecuación diferencial con coeficientes constantes y la entrada 0.75 es una constante, podemos resolverla de la siguiente forma: suponer que una solución particular es de la forma Qp(t) = A (A constante) y reemplazando en la ecuación (64), tenemos que:

$$\frac{1}{20}A = 0.75, es\ decir\ que\ A = 15$$

Y una solución asociada con la ecuación homogénea $\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{20}Q = 0$, luego se tiene por separación de variable:

$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{20}dt,$ Integrando tenemos la solución particular:

$$Q_h(t) = CE^{-\frac{1}{20}t}$$

Por lo tanto, la solución general será:

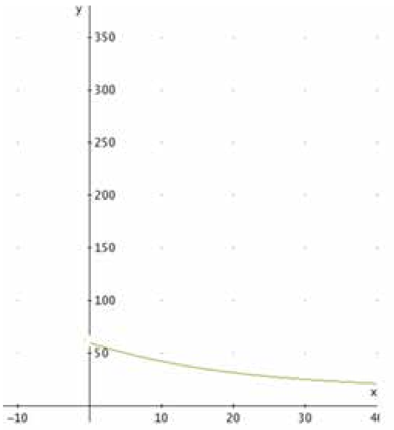
$$Q\ (t) = Q\ h\ (t) + Q\ p\ (t) = 15 + Ce^{-\frac{t}{20}} \qquad (65)$$

La constante arbitraria C está determinada por las condiciones iniciales. El problemas establece que el tanque contiene 100 $m^3$ inicialmente y el contaminante es de una concentración de 0,6 g / m. Por lo tanto, inicialmente la cantidad de contaminante es Q (0) = 0,6 (100) = 60 g. Sustituyendo esta condición inicial en (65) tenemos 60 = 15 + C, es decir que C = 45, luego nuestra ecuación es:

$$Q\ (t) = 15 + 45e^{-\frac{t}{20}}$$

Cuya gráfica se ve en la siguiente figura.

**Figura 17.** Gráfica de la curva solución.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

La cantidad de contaminante al inicio es de 60 g, pero decae exponencialmente hacia 15 g con el incremento del tiempo. Cuando t→ ∞, Q (t)→ ∞. Esto se evidencia en la gráfica, cuando el tiempo crece la gráfica de la función se va aproximando a 15 g, porque el agua que entra al tanque tiene una concentración de 0.15 g/m$^3$. Eventualmente la concentración de la contaminación en el tanque tiende a aproximarse al nivel de contaminación del flujo que entra al tanque. Como el tanque es de 100 m$^3$, el aumento de la contaminación en el tanque corresponde al flujo de entrada al tanque, es decir: 100.0.15 = m15 g de polución.

Ahora se puede calcular la concentración c (t), la cual es igual a:

$$c\ (t) = \frac{Q\ (t)}{Volumen} = \frac{15+45e^{-\frac{t}{20}}}{100} = 0.15 + 0.45e^{-\frac{t}{20}}$$

Esta ecuación también muestra que la concentración del contaminante se aproxima al del flujo que entra, es decir de 0.15, a medida que el tiempo crece. Mediante esta ecuación se puede también calcular, por ejemplo, el tiempo en que la concentración es de 0.3g, basta tomar c (t) = 0.3, y entonces tenemos:

$$0.3 = 0.15 + + 0.45e^{-\frac{t}{20}}$$

Resolviendo para t, se tiene que t = $-20\ln\left(\frac{1}{3}\right) \approx 21.97s$.

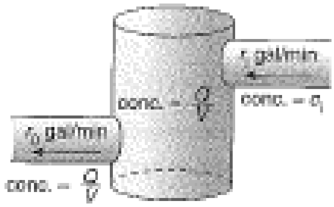
Para este problema en particular, habría sido igual de fácil de usar la ecuación para la concentración en lugar de la cantidad de contaminante. Sin embargo, si el volumen varía, generalmente es más fácil de proceder, como veremos en el siguiente ejemplo.

## Problemas de mezcla con volumen V (t) variable

Vamos a reconsiderar de nuevo problemas de mezcla en un tanque. Pero ahora la tasa de entrada de agua en el tanque es diferente de la del agua que sale del tanque, esto quiere decir que el volumen de agua en el depósito no será constante como en el ejemplo anterior. Vamos a demostrar que la ecuación diferencial resultante para la cantidad de un contaminante seguirá todavía en muchos casos lineal, y que los coeficientes no necesariamente serán constantes. Antes de hacer un ejemplo, vamos a discutir un problema, algo general, de esta situación.

Supongamos que se nos da el aumento de sal disuelta inicialmente en un tanque de agua. El agua salada tiene una concentración de $c_i$ libras por galón que fluyen en el tanque a una velocidad de ri galones por minuto. Aquí el subíndice i representa el flujo en el tanque. El contenido del tanque está bien mezclado, y la mezcla de agua salada se bombea a razón de $r_0$ galones por minuto (el subíndice 0 para salir). Este problema se muestra esquemáticamente en la figura 18. El volumen V (t) de agua salada en el tanque debe variar. Como $V'$ (t) = $r_i - r_0$ tenemos:

**Figura 18.** Gráfica del tanque Mezclador.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

$$V(t) = V(0) + (r_i - r_0)t$$

En realidad, esta es la solución algo evidente del problema de valor inicial para la ecuación diferencial que representa la tasa de cambio del volumen de agua en el tanque $\frac{dV}{dt} = r_i - r_0$. Si la tasa de flujo de entrada de agua se diferencia de la tasa de flujo de salida de agua, entonces es claro que el volumen varía.

Sea Q (t) la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t. La tasa de flujo de entrada de sal es $r_i c_i$ (la tasa de flujo de entrada de agua $r_i$ veces la concentración dada de sal $c_i$ en el flujo de entrada). La tasa de flujo de salida de la sal, es la tasa de flujo de salida de agua veces $r_0$ la concentración de sal $c_0$ en el flujo de salida. Como antes, la concentración de sal en el flujo de salida es la misma que la concentración de sal c (t) en el tanque:

$$C_0 = c(t) = \frac{Q(t)}{Voilumen} = \frac{Q(t)}{V(0) + (r_i - r_0)t}$$

La razón de cambio de la cantidad de sal está dada por la relación:

$$\frac{dQ}{dt} = [Razón\ de\ entrada\ del\ flujo\ de\ sal] - [Razón\ de\ salida\ del\ flujo\ de\ sal]$$

De donde se tiene que:

$$\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}} = r_i c_i - r_0 c_0 = \frac{Q}{V(0) + (r_i - r_0)t}$$

Esta ecuación es una ecuación lineal diferencial para Q (t), el aumento de sal. Los coeficientes no son constantes y se pueden resolver por el método del factor integrante. Veamos un ejemplo de este caso.

## Ejemplo 17:

Un tanque de 100 galones está inicialmente lleno de agua pura hasta la mitad. Entonces agua contaminada con 0.1 lb/galón de sal es adicionada a una razón de 4 galones /min. El contenido bien mezclado del tanque fluye hacia afuera a través de un tubo, a una velocidad de 2 gal / min. Cuando el depósito está lleno, se desborda. Encuentre la cantidad y la concentración de sal.

### Solución:

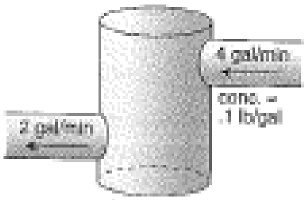
Este problema se gráfica con la figura 19. El volumen de agua con sal está creciendo y en tiempo t este volumen está dado por:

$$V(t) = 50 + 2t$$

Ya que $r_i - r_0 = 4 - 2 = 2$, y V (t) = 50. Luego el tanque de 100 galones se llenará en t = 25 minutos. En primer lugar, podemos resolver el problema antes de que el tanque se llene.

En los primeros 25 minutos: sea Q (t) el aumento de sal en el tanque en el tiempo t, luego la concentración de sal es c (t) = Q (t) / (50 + 2t). La razón de cambio del aumento de sal satisface:

**Figura 19.** Gráfica del Tanque Mezclacor.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

$$\frac{dQ}{dt} = (4).(0.1) - (2).\frac{Q}{50+2t}$$

Esto se puede escribir como:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{2Q}{50+2t} = 0.4 \qquad (66)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial por el método del factor integrante, se tiene que dicho factor es:

$$e^{\int \frac{2}{50+2t}dt} = e^{ln(50+2t)} = 50 + 2t$$

Multiplicando la ecuación (66) por el factor integrante se tiene:

$$\frac{d}{dt}[(50+2t).Q] = (50+2t)0.4$$

Integrando:

$$(50+2t).Q = 0.1(50+2t)^2 + C$$

Resolviendo para Q, tenemos la solución general:

$$Q(t) = 0.1(50+2t) + C(50+2t)^{-1}, \qquad t \leq 25$$

De esta forma la solución particular y una solución asociada a la ecuación homogénea son evidentes. La concentración puede ahora ser determinada fácilmente de (66) y de la ecuación anterior, como:

$$C\,(t) = \frac{Q(t)}{V(t)} = 0.1 + c(50+2t)^{-2}$$

Estas fórmulas son válidas hasta que el depósito se llena en $t < 25$. La constante c se puede determinar a partir de la condición inicial. Otra aplicación de problemas de mezcla tienen que ver con la contaminación. Veamos unos ejemplos.

## Ejemplo 18. Contaminación del aire:

Una discoteca con dimensiones de 12.5 metros por 10 metros y por 3,2 metros, se encuentra llena de clientes a las 10 p. m. de una animada noche de viernes. Desgraciadamente, como suele suceder, la mayoría de esos clientes son fumadores, de modo que el humo, que contiene un 1.2 gramos de monóxido de carbono por metro cúbico, se extiende por el local a una velocidad de 0.004 metros cúbicos por minuto. Supongamos que se no produce ningún cambio significativo en este ritmo durante la noche. Antes de las 10 horas no hay rastro de monóxido de carbono en la discoteca y, por suerte, esta provista de buenos ventiladores. El efecto de aire de los ventiladores hace que se forme una mezcla uniforme de aire y humo en el local, y que este sea expulsado al exterior a una velocidad de 0.04 metros cúbicos por minuto; es decir, a un ritmo 10 veces mayor que el de entrada de la contaminación. Lógicamente, se supone que entra aire no contaminado desde el exterior del local, al mismo ritmo que el de salida de la mezcla.

Supongamos que, aparte de bailar y relacionarnos, también queremos preservar nuestra salud. Según las normas del Departamento de Sanidad, una exposición prolongada a la concentración de monóxido de carbono mayor o igual que 0.004 $g/m^3$n puede ser peligrosa. Si sabemos que la discoteca cierra sus puertas a las 3 a. m., ¿nos permitiremos quedarnos hasta el final? (Para ser más exacto, lo que queremos saber es en qué instante la concentración de monóxido de carbono alcanza el punto crítico de 0.004 $g/m^3$).

## Solución:

La clave de este tipo de problemas de mezclas, es la relación que se ha visto en los problemas 15 y 16, esto es:

**Razón de cambio neto = Razón de entrada – razón de salida (67)**

Sea C (t) la concentración de monóxido de carbono en cualquier instante de tiempo t en la discoteca (los gramos de monóxido de carbono por metro cúbico de aire, cuya abreviatura es g/$m^3$) donde t = 0 representa a las 10 p. m. Entonces Q (t), la cantidad de contaminante en el local en el instante t, se describe mediante la ecuación:

Q (t) = (Volumen del espacio). C (t)

Como las dimensiones del local son: (12.5). (10). (3.2) = 400 $m^3$, la expresión para la cantidad de monóxido en este espacio en el instante t se convierte en Q (t) = 400 C (t).

La velocidad a la que el monóxido de carbono entra en el local viene dada por:

$$\left(0.004\frac{m^3}{mi9n}\right)\left(1.2\frac{g}{m^3}\right) = 0.0048\frac{g}{min}$$

De igual manera, la razón con la que el monóxido de carbono abandona el local (por medio de los ventiladores) es $\left(0.04\frac{m^3}{min}\right).C(t)$.

La ecuación (67) nos indica que la razón de cambio del monóxido de carbono en la discoteca es igual a la velocidad a la que los agentes contaminantes se introducen menos la velocidad a la que abandonan el local:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[400C(t)] = [razón\ de\ entrada - razón\ de\ salida]$$
$$= \left(0.004\frac{m^3}{min}\right)\left(1.2\frac{g}{m^3}\right) - \left(0.04\frac{m^3}{min}\right)C(t) = 0.0048 - 0.04C(t)g/min$$

Luego se obtiene la ecuación diferencial:

$$400\frac{d}{dt}C(t) = 0.0048 - 0.04\,C(t)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal que podemos escribir en la forma:

$$\frac{dC}{dt} + 0.0001C(t) = 12.10^{-6}$$

Un factor integrante es $\mu(t) = e^{\int 0.0001dt} = e^{0.0001t}$, luego la ecuación se nos convierte en:

$$\frac{d}{dt}[e^{0.0001t}C(t)] = (12.10^{-6})e^{0.0001t}$$

Integrando, obtenemos:

$$C(t) = (12.10^{-6})e^{-0.0001t}\int e^{0.0001t}dt = (12.10^{-6})e^{-0.0001t}\left(\frac{e^{0.0001t}}{0.0001} + K\right) = 0.12 + \beta e^{-0.0001t}$$

Donde $\beta = (12.10^{-6}).K$

Como se sabe que C (0) = 0, tenemos que:

$$0 = C(0) = 0.12 + \beta$$

Lo que nos da que $\beta = -0.12$. Por lo tanto, podemos escribir nuestra ecuación en la forma:

$$C(t) = 0.12(1 - e^{-0.0001t}).$$

Como se quiere saber en qué instante t la concentración es igual a 0.004 g/m$^3$, debemos resolver la ecuación C (t) = 0.004 para t. Luego:

$$0.004 = 0.12\,(1 - e^{-0.0001t})$$

$$1/30 = 1 - e^{-0.0001t}$$

$$e^{-0.0001t} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

$$-0.0001t = \ln(29/30)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{29}{30}\right)}{0.0001} \approx 339.015\, minutos \approx 5\, horas, 39\, minutos.$$

En consecuencia, la concentración crítica de monóxido de carbono se alcanzaría a las 3:39 a.m. si la discoteca sigue abierta.

## Ejemplo 19. Un medicamento en la sangre:

Un método para administrar un fármaco es suministrarlo continuamente en el flujo sanguíneo mediante un proceso llamado infusión intravenosa. Imaginemos que un paciente en un hospital recibe una medicación a través de un tubo intravenoso que deja caer la sustancia gota a gota en la sangre, a un ritmo constante de I miligramos por minuto. Supongamos también que la medicación se dispersa en el cuerpo y que es eliminada a una velocidad proporcional a la concentración del medicamento en ese momento. En este problema, la concentración se define como:

$$\frac{Cantidad\ de\ medicamento}{Volumen\ de\ sangre\ más\ la\ cantidad\ de\ medicación}$$

Donde suponemos que el volumen V de sangre más la del medicamento, permanece constante. El problema es calcular la concentración de medicación que hay en el cuerpo en cualquier instante de tiempo t. Para ello, podemos considerar la sangre como elemento de mezcla único y examinaremos la ecuación diferencial que modele el proceso.

### Solución:

Sea C (t) la concentración del medicamento en el instante t (en mg/cm3). De manera que las condiciones de este tipo de problema nos conducen a la relación:

$$\textbf{Razón de cambio neta} = \textbf{Razón de entrada} - \textbf{Razón de salida}.$$

O:

$$V\frac{dC}{dt} = I - KC(t) \qquad (68)$$

Donde K es una constante positiva de proporcionalidad que depende de la medición específica y de las características fisiológicas del paciente.

Observemos que el primer miembro de la ecuación diferencial está expresado en unidades de:

$$cm^3 \times \frac{\frac{mg}{cm^3}}{min} = \frac{mg}{min}$$

Y que el término I del segundo miembro lo está en mg/min. Debido a que C aparece en unidades de $mg/cm^3$, concluimos que las unidades para K, que representan la velocidad de eliminación, deben ser $cm^3/min$, lo que parece apropiado (es bueno entender este análisis dimensional).

La ecuación (68) es una ecuación lineal que se puede escribir en la forma general como:

$$\frac{dC}{dt} + \left(\frac{K}{V}C\right) = \frac{I}{V}$$

El factor integrante para esta ecuación diferencial es $\mu(t) = e^{\int \frac{K}{V}dt} = e^{\frac{Kt}{V}}$. Al multiplicar cada miembro de la ecuación diferencial por este factor integrante nos da como resultado:

$$e^{\frac{Kt}{V}}\frac{dC}{dt} + \frac{K}{V}e^{\frac{Kt}{V}}C = \left(\frac{I}{V}\right)e^{\frac{Kt}{V}}$$

O:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{Kt}{V}}C\right) = \left(\frac{I}{V}\right)e^{\frac{Kt}{V}}$$

De donde, integrando se obtiene:

$$C(t)e^{\frac{Kt}{V}} = \int \left(\frac{I}{V}\right)e^{\frac{Kt}{V}}dt$$

Es decir que:

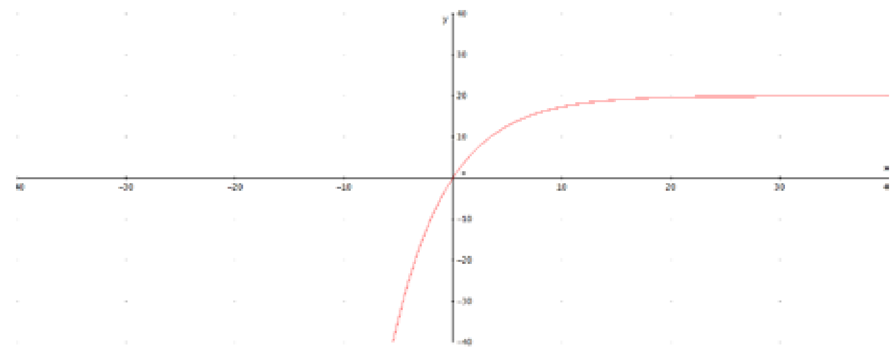
$$C(t) = e^{-\frac{Kt}{V}} \int \left(\frac{I}{V}\right) e^{\frac{Kt}{V}} dt = e^{-\frac{Kt}{V}} \left[\frac{V}{K}\left(\frac{I}{V}\right) e^{\frac{Kt}{V}} + \beta\right] = \frac{I}{V} + \beta e^{-\frac{Kt}{V}}$$

Como sabemos que C (0) = 0, entonces se tiene que: $\beta = -\frac{I}{K}$, y por lo tanto, se puede escribir la ecuación en la forma:

$$C(t) = \frac{I}{K} - \frac{I}{K} e^{-\frac{Kt}{V}} = \frac{I}{K}\left(1 - e^{-\frac{Kt}{V}}\right)$$

Es bueno observar qué ocurre a medida que pasa el tiempo. Analíticamente $lim_{t\to\infty} C(t) = \frac{I}{K}$, lo que indica que la concentración del medicamento en el cuerpo del paciente alcanza un umbral o nivel de saturación de I/K. La figura 20 nos muestra la gráfica de la concentración del medicamento en la sangre, cuando I = 4, V = 1 y K = 0.2 y nos muestra en nivel de saturación de 20 $mg/cm^3$.

**Figura 20.** Gráfica de la concentración del medicamento en la sangre para I = 4, V = 1, y K = 0,2.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

$$C\ (t) = 20(1 - e^{-0-2t}), 0 \leq t \leq 30, 0 \leq C \leq 20$$

La gráfica solo se debe considerar para t ≥ 0

# 7.7 Mecánica elemental

## A. Movimiento elemental de una partícula con gravedad únicamente

Movimientos elementales de una partícula son frecuentemente descritos por ecuaciones diferenciales. La integración sencilla a veces puede ser utilizada para analizar estos movimientos elementales. Para el movimiento vertical unidimensional de una partícula, recordamos que a partir del cálculo (ver capítulo 1) se tiene que:

$$\text{Posición} = y\ (t)$$

$$\text{Velocidad}= v\ (t) = \frac{dy}{dt},$$

$$\text{Aceleración} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

### La ley del movimiento de Newton (F = m a) dará lugar a una ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{m}\frac{d^2y}{dt^2} = F\left(y, \frac{dy}{dt}, t\right)$$

Donde m es la masa y F es la suma de las fuerzas aplicadas, y hemos permitido que las fuerzas dependan de la posición, velocidad y tiempo. Esta última ecuación es de segundo orden, la cual se puede resolver más adelante en el texto.

No existen técnicas para la resolución de todos los casos. Sin embargo, la ecuación anterior puede ser resuelta por integración sencilla si la fuerza F no depende de y, y, dy /dt.

## Ejemplo 20:

Supongamos que la única fuerza F sobre una masa m es la gravedad. Construya un modelo para representar el espacio recorrido por el cuerpo.

### Solución:

A continuación, se sabe que F = -mg, donde g es la aceleración debida a la gravedad. El signo menos se introduce porque la gravedad actúa hacia abajo desde la superficie de la tierra. Aquí estamos tomando el sistema de coordenadas de modo que y aumenta hacia el cielo. La magnitud de la fuerza debida a la gravedad, mg, se llama el peso del cuerpo. Cerca de la superficie del planeta tierra g es aproximadamente g = 9,8 m / $seg^2$ en el sistema mks, utilizado por la mayoría del mundo (g = 32 pies / $seg^2$ cuando se utilizan los pies como la unidad de longitud en lugar de metros). Si suponemos que estamos interesados en una masa que se encuentra lo suficientemente cerca de la superficie de la tierra, entonces g se puede aproximar por la constante. Si la única fuerza es la gravedad, entonces nuestra ecuación se convierte en:

$$\boldsymbol{m}\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

O de forma equivalente:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad (69)$$

Ya que podemos cancelar la masa m. Integrando a ambos lados de esta última ecuación, se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1$$

Donde $C_1$ es una constante arbitraria de integración. Si asumimos que la velocidad en t = 0 es dada por $v_0$, esta es la velocidad inicial, como:

$$v(t) = -gt + C_1$$

Luego en t = 0, tenemos v (0) = $v_0$= $C_1$, y

$$v\ (t) = \frac{dy}{dt} = \ -gt + v_0$$

Y entonces la posición puede ser determinada integrando la velocidad, es decir integrando la ecuación de la velocidad respecto al tiempo, para obtener:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C_2$$

Donde $C_2$ es la segunda constante de integración. Podemos asumir que la posición $y_0$ en cuando t = 0, está dada inicialmente. Luego evaluando la ecuación anterior en t = 0 nos da que $C_2$ = $y_0$, por lo tanto, se tiene que:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

Y esta es la ecuación pedida.

## Ejemplo 21. Altura máxima:

Supongamos que se lanza una pelota hacia arriba desde el nivel del suelo con velocidad $v_0$ y la única fuerza que actúa sobre ella es la gravedad. ¿Qué tan alto la bola alcanza antes de caer hacia el suelo?

### Solución:

La ecuación diferencial que nos modela esta situación es como antes la dada por (69), es decir:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ -g$$

La condición inicial es que y = 0 y $\frac{dy}{dt} = \ v_0$ en t = 0. Integrando sucesivamente esta ecuación y reemplazando por estas condiciones dadas, tenemos que:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + \ v_0$$

Y por lo tanto:

$$Y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \quad (70)$$

Esta fórmula nos da la altura de la bola en cualquier instante en función del tiempo. Para determinar la altura máxima, debemos primero determinar el tiempo en el cual la pelota llega a esa altura. De nuestros cursos de cálculo sabemos que este máximo ocurre cuando la función y = y (t) toma un punto crítico, es decir donde dy/dyt = 0. A la máxima altura, la pelota ha dejado de crecer y no ha empezado a caer, por lo que la velocidad es cero. Así, el tiempo de la altura máxima se determina a partir de:

$$O = -gt + v_0, \text{ o equivalentemente, cuando } t = v_0/g$$

Si sustituimos este tiempo en la ecuación (70), obtenemos una fórmula para la altura máxima y, la cual es:

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{g}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{v_o^2}{2g}$$

## Ejemplo 22. El frenado de un auto:

Supongamos que un carro va a 76 m/seg cuando son aplicados los frenos por T = 2 seg. Suponga que la desaceleración no constante es conocida y esta es a x = - 12 $t^2$. Determine la distancia recorrida por el carro.

### Solución:

Sea y el recorrido a medir una vez que se aplican los frenos. La ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -12t^2$$

Integrando obtenemos:

$$\frac{dx}{dt} = -4t^3 + C_1 \quad (71)$$

Volviendo a integrar, tenemos:

$$x = -t^4 + C_1 t + C_2 \qquad (72)$$

Las condiciones iniciales son x = 0 y, $\frac{dx}{dt}$ = 76, cuando t = 2. La velocidad inicial aplicada en (71) nos da:

$$76 = -4(3)3 + C_1 = -32 + C_1$$

Luego $C_1$ = 108. La posición inicial aplicada a (72) nos da:

$$0 = -2^4 + C_1 t + C_2 = -16 + 216 + C_2$$

Y $C_2$ = - 200. Para determinar la distancia que el carro recorre, debemos notar que el carro para cuando la velocidad es cero. Esto es:

$$\frac{dx}{dt} = -4t^3 + 108 = 0$$

Esto es cuando $t^3$ = 27 o t = 3. Entonces la distancia recorrida en el tiempo t = 3 está dada sustituyendo t = 3 en (72), así:

$$X = -3^4 + 108(3) - 200 = 43 \text{ m.}$$

## Movimiento de una partícula con gravedad únicamente:

Es bueno revisar en el capítulo 1 los modelos de la mecánica que se dieron en esta sección. Vamos a considerar problemas de la mecánica elemental y, para ello se considera un objeto de masa m moviéndose a lo largo de una recta bajo una fuerza F. Sea y = y(t) el desplazamiento del objeto a partir de algún punto de referencia sobre la línea en el tiempo t, sea v = v (t) y, a = a(t) la velocidad y la aceleración del objeto en el tiempo t. Así tenemos que v (t) = dy/dt, y a(t) ) = dv/dt = $\frac{d^2y}{dt^2}$. Sabemos por la segunda ley de Newton del movimiento, que la fuerza F y la aceleración a están relacionadas por la ecuación:

$$F = m\, a$$

Como a (t) = $\frac{d^2y}{dt^2}$, entonces la segunda ley de Newton para el movimiento la podemos escribir como:

$$\mathrm{m}\frac{d^2y}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

la cual es una ecuación de segundo orden. Estas ecuaciones las vamos a considerar en el capítulo siguiente, sin embargo, como solo estamos considerando ecuaciones de primer orden, se puede reformular la ecuación anterior como una de primer orden . Esto es posible si F no depende de y, por lo que la ecuación anterior toma la forma:

$$\mathrm{m}\frac{d^2y}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, \frac{dy}{dt}\right)$$

y si hacemos v = $\frac{dy}{dt}$, entonces $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para v:

$$\mathrm{m}.\, v' = F\,(t, v)$$

Al resolver esta ecuación se obtiene v en función de t. Si conocemos la condición inicial y $(t_0)$ para algún tiempo $t_0$m podemos integrar v y obtener y como función de t.

## Ejemplo 22. Movimiento a través de un medio que ofrece resistencia:

Un objeto de masa m se mueve bajo la fuerza de gravedad constante a través de un medio que ejerce una resistencia con una magnitud proporcional a la rapidez del objeto (recuerde que la rapidez de un objeto es $|v|$, es el valor absoluto de su velocidad v). Calcule la velocidad del objeto en función de t, y encuentre la velocidad terminal. Suponga que la velocidad inicial es $v_0$.

## Solución:

La fuerza que actúa sobre el objeto es:

$$F = -\,mg + F_1 \qquad (69)$$

Donde –mg es la fuerza debida a la gravedad y F1es la fuerza de resistencia del medio, que tiene magnitud k$|v|$, donde k es una constante positiva. Si el objeto se mueve hacia abajo (v$\leq 0$), entonces la fuerza de resistencia es hacia arriba, por consiguiente:

$$F_1 = k|v| = k.(-v) = -kv$$

Por otra parte, si el objeto se mueve hacia arriba $(v \geq 0)$, y entonces:

$$F_1 = -k|v| = -k.v$$

Por lo tanto, (69) se puede escribir como:

$$F = -mg - kv \qquad (70)$$

Independiente del signo de la velocidad.

Entonces a partir de la segunda ley del movimiento de Newton, se tiene:

$$F = ma = mv'$$

Por lo tanto, de (70) resulta que:

$$m\,v' = -mg - kv$$

O:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g$$

Que es una ecuación diferencial lineal de primer grado, cuyo factor integrante es: $\mu(t) = e^{-\frac{kt}{m}}$. Multiplicando a ambos lados la ecuación anterior, tenemos:

$$(\mathrm{v}.\, e^{-\frac{kt}{m}})' = -\mathrm{g}e^{-\frac{kt}{m}}$$

Integrando:

$$\mathrm{v}.\, e^{-\frac{kt}{m}} = -g \int e^{-\frac{kt}{m}}.\mathrm{dt} \; + \mathrm{C}$$

$$\mathrm{v} = -\frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{C}e^{-\frac{kt}{m}} \qquad (71)$$

Como v (0) = $v_0$,

$$V_0 = -\frac{mg}{k} + C$$

Entonces:

$$\mathrm{C} = v_0 + \frac{mg}{k}$$

Reemplazando en 71, se tiene:

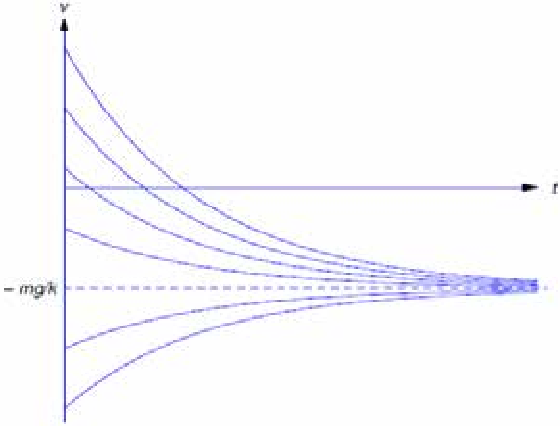
$$\mathrm{v} = -\frac{mg}{k} + \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-kt/m}$$

Si tomamos el límite cuando t → ∞, se ve que la velocidad final es:

$$\boldsymbol{lim}_{t\to\infty v(t)} = -\frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{k}}$$

Observe que este límite no depende de la velocidad inicial.

**Figura 21.** Gráfica de una familia de soluciones para (71).




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

**Soluciones de la ecuación, $mv^{/}= -mg - kv$**

## Ejemplo 24. Ejemplo práctico:

Un objeto de 640 lb se lanza con una velocidad inicial de 60 pies/seg, cerca de la superficie de la tierra. La atmósfera resiste el movimiento con una fuerza de 3lb por cada pies/seg de rapidez. Suponiendo que la otra fuerza que actúa sobre el objeto más la gravedad constante, encuentre su velocidad v como función de t, y encuentre su velocidad terminal.

### Solución:

Como mg = 640 y g = 32, se tiene entonces que m = 640/30 = 20. La resistencia de la atmósfera es -3.v lb, si v está expresada en pies por segundo. Luego:

$$20\, v^{/} = -640 - 3v$$

la cual podemos escribir como:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3}{20} v = -32 \qquad (72)$$

que es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, entonces una solución de la ecuación lineal homogénea asociada es:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3}{20}v = 0, o \ \frac{dv}{dt} = -\frac{3}{20}v$$

Por separación de variables se tiene:

$$\mathrm{V\,h} = Ce^{-\frac{3}{20}t}$$

Para hallar la solución particular, observemos simplemente que la ecuación diferencial (71) es lineal de primer grado con coeficientes constantes, por lo tanto podemos suponer que de vp= A, reemplazado en (71), se obtiene v p= - 640/3. En consecuencia la solución general será de la forma:

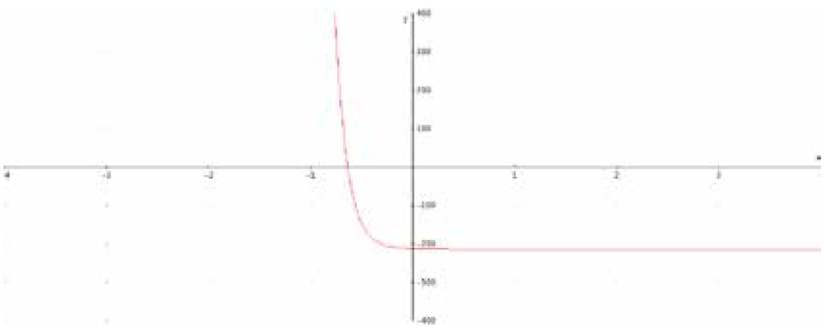
$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_h + \mathrm{v}_p = -\frac{640}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}t}$$

Como se da que la velocidad inicial es 60 pies/seg, en dirección hacia arriba (positiva), entonces $v_0$=60, es decir que v (0) = 60. Si reemplazamos t = 0 y v = 60 en la ecuación anterior. Tendremos que:

$$\mathrm{v} = -\frac{640}{3} + \frac{820}{3}e^{-\frac{3}{2}t}$$

Tomando el límite cuando t tiende al infinito, obtenemos la velocidad terminal v = - 64073 pies/seg.

**Figura 22.** Gráfica de la solución particular de la ecuación solución.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 25:

Una masa de 10 kg se lanza a una velocidad inicial $v_0 \leq 0$ cerca de la superficie de la tierra. Las únicas fuerzas que actúan sobre ella son la gravedad y la resistencia atmosféricas, que son proporcionales al cuadrado de la velocidad. Suponiendo que la resistencia del aire es de 8 N si la velocidad es de 2 m/seg, encuentre la velocidad del objeto en función de t, y encuentre la velocidad terminal.

### Solución:

Como el objeto está cayendo, la dirección de la resistencia del aire es hacia arriba (positiva). De donde:

$$m\, v' = -mg + kv^2 \qquad (73)$$

Donde k es una constante. Como la magnitud de la resistencia es de 8 N cuando v = 2 m/seg, se tiene que:

$K\,(2)^{2} = 8$. Es decir que $k = 2$ Nseg$^2$/m$^2$. Como $m = 10$, y, $g = 9.8$

Entonces nuestra ecuación (73) toma la forma:

$$20v' = -98 + 2\,v^2 = 2(v^2 - 49)$$

Si $v_0 = -7$ entonces $v \equiv -7$ para todo $t \geq 0$. Si $v_0 \neq -7$ separamos variables y obtenemos:

$$\frac{1}{v^2 - 49}v' = \frac{1}{5}$$

Lo que nos permite resolver esta ecuación diferencial por el método de fracciones parciales, ya que:

$\frac{1}{v^2-49} = \frac{1}{(v-7)(v+7)} = \frac{1}{14}\left[\frac{1}{v-7} - \frac{1}{v+7}\right]$, luego se tiene que:

$$\left[\frac{1}{v-7} - \frac{1}{v+7}\right]\frac{dv}{dt} = \frac{14}{5}$$

Integrando se tiene:

$$ln|v-7| - ln|v+7| = \frac{14}{5} + k$$

Luego:

$$\left|\frac{v-7}{v+7}\right| = e^{k}e^{14t/5}$$

Por el teorema de existencia y unicidad, se tiene que (v-7)/(v+7) no puede cambiar de signo, por lo tanto la ecuación anterior la podemos escribir como:

$$\frac{v-7}{v+7} = Ce^{14t/5}$$

Que es una solución implícita de la ecuación diferencial. Al despejar v obtenemos:

$$v = -7\frac{C + e^{-\frac{14y}{5}}}{C - e^{-\frac{14y}{5}}}$$

Como v (0) = $v_0$, se tiene que:

$$C = \frac{v_0 - 7}{v_0 + 7}$$

Al sustituir este valor en la ecuación anterior resulta:

$$v = -7\frac{v_0\left(1 + e^{-\frac{14y}{5}}\right) - 7\left(1 - e^{-\frac{14y}{5}}\right)}{v_0\left(1 - e^{-\frac{14y}{5}}\right) - 7\left(1 + e^{-\frac{14y}{5}}\right)}$$

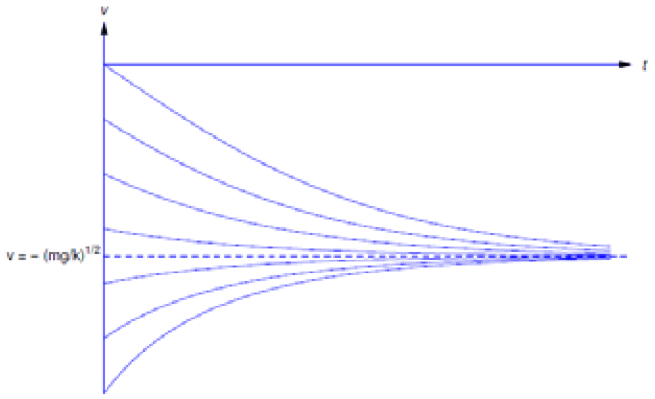
Observe que como $v_0 \leq 0$, v está definida y es negativa para todo t > 0. La velocidad terminal es:

$$lim_{t\to\infty}v(t) = -7\ m/seg$$

El cual es independiente de $v_0$. De forma más general, se puede demostrar que si v es cualquier solución de (73), tal que $v_0 \leq 0$, entonces:

$$lim_{t\to\infty} v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{k}}$$

**Figura 23.** Gráfica de la familia solución de la ecuación diferencial.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

### Algunas soluciones de $mv' = -mg + kv^2$, $v(0) = v_0 \leq 0$

### C. Velocidad de escape:

Debido a los trabajos de los astrónomos y las leyes empíricas de Tycho Brache (1546-1601) y de Johannes Kepler (1571-1630) relativos a las órbitas de la luna y los planetas, Newton centró su atención en una sola fuerza, tal como se vio en las secciones anteriores: la gravedad. Su ley de gravitación universal explica el efecto gravitacional de un cuerpo sobre otro.

La ley de gravitación universal. La fuerza F entre dos cuerpos de masas $m_1$ y $m_2$ separadas por una distancia r es de atracción, se ejerce a lo largo de la línea que une los cuerpos y tiene una magnitud de:

$$F = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m_1 m_2}}{\boldsymbol{r^2}}.$$

Donde G es una constante. Esta es la l**ey de la gravitación inversa cuadrada.**

G es una constante universal independiente de las masas $m_1$ y $m_2$; en unidades del sistema internacional:

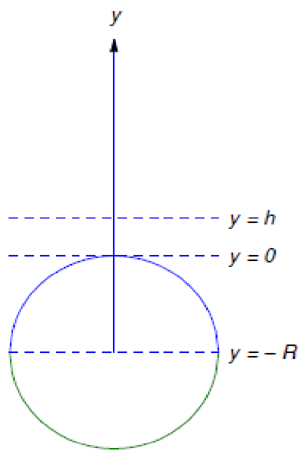
$$G = 6.67\times10^{-11}\ Nm^2/Kg^2$$

Newton demostró que los cuerpos ejercen influencia mutua, como si la masa de cada uno de ellos estuviese concentrada en su centro de masa, siempre que esta se halle distribuida de manera estérica y simétrica. En este caso r es la distancia entre los centros de masa.

## Ejemplo 65:

Supongamos que se lanza verticalmente hacia arriba un proyectil esférico de masa m desde la superficie de la tierra, ¿puede escapar hacia el espacio exterior?

**Figura 24.** Gráfica del lanzamiento de un proyectil.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

Supongamos que el proyectil se mueve a lo largo del eje y perpendicular a la superficie de la tierra con la dirección positiva hacia arriba (y = 0 en la superficie) (figura 24). Supongamos que la resistencia del aire es insignificante, de modo que la única fuerza importante que actúa sobre el cuerpo es la atracción gravitacional de la tierra, que actúa hacia abajo y, de acuerdo con la ley de Newton de la gravitación universal, se expresa como:

$$F = \frac{-GmM}{(h+R)^2}$$

Donde M es la masa de la tierra, R es el radio de la tierra y h la altura sobre la tierra. Para valores cercanos de h a cero, la fuerza gravitacional F se aproxima a la constante – $(GMm)/R^2$= -mg, donde g = $MG/R^2$. Esta aproximación para la fuerza gravitacional es muy precisa cerca del suelo, pero en este caso no es apropiada, porque queremos ver qué sucede cuando el proyectil está lejos de la superficie del planeta.

De acuerdo con la segunda ley de Newton y la información antes mencionada, el movimiento ascendente del proyectil se modela con el problema de valor inicial:

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{-GmM}{(y+h)^2},\quad y(0)=0,\; y'(0)=v_0>0 \qquad (73)$$

Si la velocidad inicial $v_0$ es lo suficientemente pequeña, por experiencia se sabe que el cuerpo subirá hasta un punto máximo y luego caerá de regreso a la tierra, la pregunta de acuerdo al enunciado del problema sería ahora la siguiente: ¿hay algún valor pequeño para $v_0$ tal que el cuerpo no regrese?

La ecuación diferencial con el valor inicial dado en (73), se ve que t no interviene en forma explícita, luego podemos usar la regla de la cadena y del hecho de que:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}=v.\frac{dv}{dy}$$

Sustituyendo en (73), tenemos:

$$v\,\frac{dv}{dt}=\frac{-GmM}{(y+h)^2},\quad v(0)=v_0,\; y=0 \qquad (74)$$

Separando variables y resolviendo:

$$v^2=\left(v_0^2-\frac{2MG}{R}\right)+\frac{2MG}{y+R}$$

O,

$$\frac{v^2}{2}=\frac{gR^2}{y+R}+\left(\frac{v_0^2}{2}-\frac{gR^2}{h+R}\right) \qquad (75)$$

Si:

$$v_0\geq\left(\frac{2gR^2}{h+R}\right)^{1/2}$$

Luego la expresión dentro del paréntesis de (75) no es negativo, por lo que v(y) > 0 para y > h. Esto prueba que hay una velocidad de escape $v_e$. Veamos que:

$$v_0 = \left(\frac{2gR^2}{h+R}\right)^{1/2}$$

Mostrando que el cuerpo cae de regreso a la tierra si:

$$v_0 < \left(\frac{2gR^2}{h+R}\right)^{1/2}$$

Si esta expresión se tiene entonces la expresión en el paréntesis de (75) es negativo y el cuerpo alcanzará una altura máxima y m > h que satisface la ecuación:

$$0 = \frac{gR^2}{y_m + R} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{gR^2}{h+R}\right)$$

Luego la velocidad será cero a la altura máxima, y el objeto caerá a la tierra influenciado por la gravedad.

**Figura 25.** Jean-Baptiste Joseph Fourier (1788-1830).

**Fuente.** Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual de la Universidad EAN).

Fourier nace en Auxerre, Francia, el 21 de marzo de 1768 y muere en París, el 16 de mayo de 1830. Fue un matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas Series de Fourier, método con el cual consiguió resolver la ecuación del calor. La transformada de Fourier recibe su nombre en su honor. Fue el primero en dar una explicación científica al efecto invernadero en un tratado.

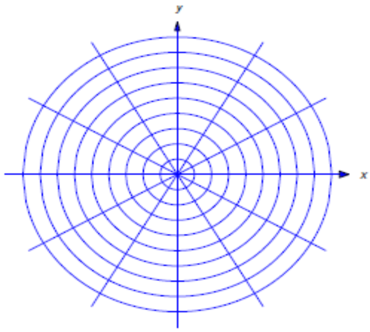
# 7.8 Trayectorias ortogonales

Muchos problemas de la física son descritos usando una función $\phi(t, x)$ llamada un **potencial** que representa una cantidad tal como una altura, temperatura o presión en un tiempo t. Las curvas $\phi(t, x) =$ c son llamadas **curvas equipotenciales o curvas de nivel**, porque el potencial es constante a lo largo de esas curvas. En el caso de alturas, los equipotenciales son una familia de curvas que conectan puntos que están a igual altura sobre un mapa topográfico. Para la temperatura, los equipotenciales son usualmente llamadas isotérmicas, y para la presión, ellas son llamadas isobáricas.

Un potencial a menudo causa una acción perpendicular a las superficies equipotenciales. Estas curvas perpendiculares a las superficies equipotenciales son generalmente llamadas **flujos** (o **flux**). Sobre un mapa topográfico, el mapa de las líneas de flujos muestra la dirección en la cual un objeto rodará cuesta abajo (al menos inicialmente). En el caso de las isotermas, las líneas de flujo indican la dirección del flujo de calor (figura 25).

Dadas las equipotenciales, a menudo podemos encontrar las líneas de flujo. Pues las líneas de flujo están por todas partes ortogonal (perpendicular) a las superficies equipotenciales, que a veces también se denomina **una familia de curvas ortogonales.**

**Figura 26.** Gráfica del flujo del calor en el plano.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Procedimiento para el cálculo de las trayectorias ortogonales

Primero escriba la familia de curvas (equipotenciales) en la forma:

$$\phi(t,x) = C$$

Donde C es una constante y x = x (t).

Derive con respecto a t para obtener:

$$\phi_t(t,x) + \phi_x(t,x)\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\left(\phi_t = \frac{d\phi}{dt}, y\ \phi_x = \frac{d\phi}{dx}\right)$$

Resuelva para $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\phi_t(t,x)}{\phi_x(t,x)}$$

Esta última ecuación da la pendiente de las equipotenciales en (t, x). Como las líneas de flujos son ortogonales a las equipotenciales, las pendientes de los flujos tienen que ser los negativos de los recíprocos de las pendientes de las equipotenciales. Entonces las líneas de flujo satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{-\frac{\phi_t(t,x)}{\phi_x(t,x)}} = \frac{\phi_x(t,x)}{\phi_t(t,x)}$$

Resolver esta última ecuación.

## Ejemplo 27:

La expresión $t^2 = c - 2x^2$ define una familia de curvas (equipotenciales) las cuales son elipses. Encuentre la familia ortogonal (líneas de flujo).

### Solución:

De acuerdo al paso 1, primero escribimos la familia de curvas en la forma $t^2 + 2x^2 = c$. Luego calculamos la derivada con respecto a t:

$$2t + 4x\frac{dx}{dt} = 0$$

Resolviendo para $\frac{dx}{dt}$ se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{2x}$$

La pendiente de la familia ortogonal en (t, x) está dada por:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{-\frac{t}{x}} = \frac{2x}{t}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial por variables separables, se tiene:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{2}{t}dt$$

Integrando:

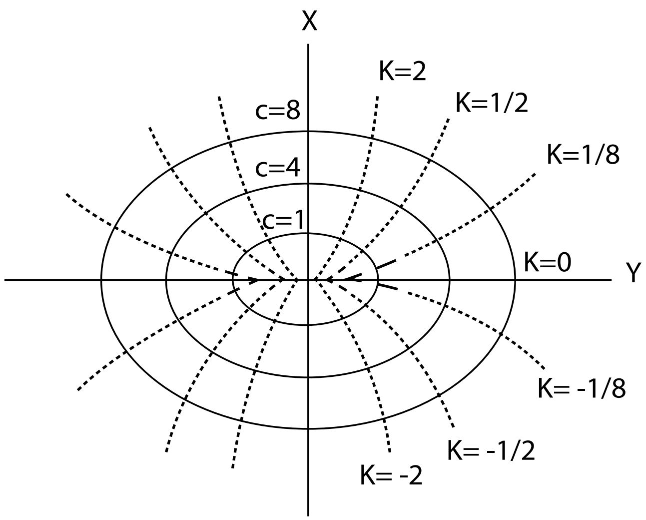
$$ln|x| = 2ln|t| + C_1$$

Tomando exponencial a ambos lados, podemos llegar a la familia de las curvas ortogonales:

$$x=kt^2, \quad k=\pm e^{C_1}$$

Observemos que k = 0 también da una solución, la cual es x = 0. Ver la figura (26), en donde se muestra ambas familias de curvas.

**Figura 27.** Familia de curvas ortogonales a $t^2 = c - 2x^2$.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

A veces, la fórmula original no es de la forma $\phi\,(t,x)=c$, pero sí de la forma F $(t,x,c)=0$. Es decir, el parámetro c no está en función de t y x. Tenemos que volver a reescribir la familia como $\phi\,(t,x)=c$ c. Sin embargo, si $\phi$ es complicado de diferenciar, podemos derivar a F $(t,x,c)=0$ con respecto a t para tener:

$$F_t(t,x,c)+F_x(t,x,c)\,\frac{dx}{dt}=0$$

y luego sustituir $\phi$ por c. En otras palabras, la ecuación diferencial para la familia de curvas ortogonales no debe contener el parámetro c, si lo hiciese, resuelva para c en la ecuación original y utilice ese valor para reemplazarlo en la ecuación de la familia ortogonal.

## Ejemplo 28. Familia ortogonal para F (t, x, c) = 0:

Encuentre la ecuación diferencial para la familia ortogonal $t^3 + 3x^2 = t^2c$.

### Solución:

Al derivar con respecto a t, se obtiene:

$$3t^2 + 6x\frac{dx}{dt} = 2tc$$

Despejando c de la ecuación diferencial dada, obtenemos:

$$c = \frac{t^3 + 3x^2}{t^2}$$

Luego:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{6x}(2tc - 3t^2) = \frac{6x^2 - t^3}{6tx}$$

Y la familia ortogonal satisface:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{6tx}{6x^2 - t^3}$$

## Ejemplo 29:

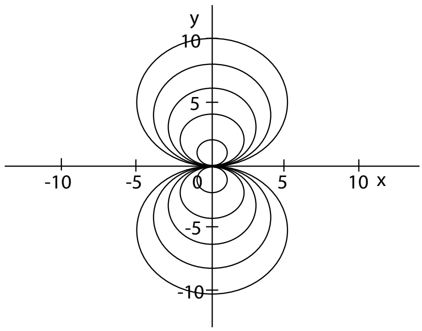
Hallar las trayectorias ortogonales en la familia de curvas dadas por:

$$t^2 + x^2 = 2cx$$

### Solución:

Esta familia de curvas son círculos con centros fuera del origen, véase la figura 28, se puede ver que esta familia de figuras son simétricas al eje x y, al origen (basta ver que la familia dada se puede escribir como $t^2 + (x - c)^2 = c^2$). Vamos a ver que las trayectorias ortogonales van a tener la misma simetría. Derivamos la ecuación diferencial dada, de manera implícita para obtener:

**Figura 28.** Familia de curvas ortogonales a la familia $t^2+x^2=2cx$.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

$$2t + 2x\frac{dx}{dt} = 2c\frac{dx}{dt}$$

Despejando c de la ecuación original, se tiene:

$$c = \frac{t^2 + x^2}{2x}$$

Reemplazando en la ecuación anterior, tenemos:

$$2x + 2x\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + t^2}{x}\frac{dx}{dt}$$

Despejando $\frac{dx}{dt}$, se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t^2}{2xt} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{t} - \frac{t}{x}\right)$$

Esta es una ecuación con coeficientes homogéneos, de modo que podemos hacer el cambio de variable habitual x = zt, y esta ecuación se transforma en:

$$z + t\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

Que es una ecuación de variables separables y se puede transformar en:

$$\frac{2z}{z^2+1}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{t}$$

Integrando respecto a t, se tiene:

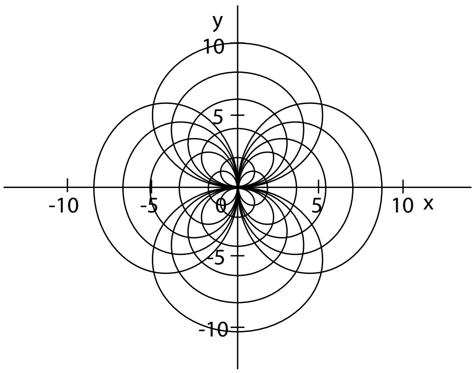
$$ln(z^2+1) = -ln|t| + C_1,$$

O bien:

$$t(z^2+1) = 2C, de\ donde\ C = \pm\frac{1}{2}e^{C_1}$$

Regresando a nuestras variables originales y completando el cuadrado perfecto se obtiene la familia ortogonal $t^2 + x^2 = 2ct, o\ (t-c)^2 + x^2 = c^2$, que es la familia ortogonal a la dada (figura 29).

**Figura 29.** Familia de curvas ortogonales a la familia.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

# 7.9 Ejercicios

## 7.9.1 Problemas de crecimiento y decrecimiento

En todos los siguientes problemas, asumir que el crecimiento exponencial es compuesto continuamente.

1. Un estimativo del crecimiento exponencial en Colombia es de 1.02 % por año. ¿Cuántos años deben transcurrir para que su población se duplique?

---

2. Un cristal crece a una taza de 5 % en un día. ¿Cuánto tiempo se debe esperar para que el cristal sea el doble de su tamaño original?

---

3. Para una cierta población bacteriana se observa que se duplica en 8h. ¿Cuál es su tasa de crecimiento?

---

4. Se espera que la población del mundo se duplique en los próximos 30 años. ¿Cuál es su tasa de crecimiento?

---

5. La tasa de crecimiento de una cepa de bacterias es desconocida, pero supone que es constante. Cuando un experimento comenzó, se estimó que había alrededor de 1.500 bacterias, y una hora más tarde había 20.000. ¿Cuántas bacterias se podría predecir que hay después de 4h de comenzar el experimento?

---

6. Una población de bacterias se administra inicialmente y crece a un ritmo constante $k_1$. Supongamos que $t_1$ horas

más tarde, las bacterias se ponen en un medio, de tal manera que ahora la población crece a un ritmo constante $k_2$. Determinar la población de bacterias para todo este tiempo.

7. El tiempo de duplicación para un determinado virus es de 3 años. ¿Cuánto tiempo tomará para que el virus se incremente a 10 veces su nivel actual?

8. Inicialmente usted tiene 0,1 g de una bacteria en un recipiente grande; 2 horas más tarde usted tiene 0,15 g. ¿Cuál es el tiempo de duplicación de estas bacterias?

9. Un organismo que vive en un estanque se reproduce a una velocidad proporcional al tamaño de la población. También los organismos mueren a una tasa proporcional al tamaño de la población. Además, se le agregan organismos continuamente a una velocidad de 4Kg/año año. Dar la ecuación diferencial que modela esta situación.

10. Una población de bacterias se reproduce en una gran probeta de nutrientes, de acuerdo a una ley de crecimiento exponencial que haría que la población se duplique en 0,5 horas. Sin embargo, las bacterias son desviadas continuamente a una velocidad de 5 g / hora. Inicialmente hay 10 g de bacterias. ¿Cuántas bacterias están allí después de 2 horas?

11. La tasa de interés en un banco es del 3 % por año, mientras que el rendimiento en otro banco es del 2 % por año. Ambos compuestos continuamente. Encuentre los dos tiempos de duplicación.

12. El costo de una botella de litro de agua fue de 85 centavos de hace dos años, pero ahora cuesta 95 centavos. Si esta tasa de crecimiento es continua, ¿aproximadamente cuándo costará la botella $1.50?

13. El PIB Producto Interno Bruto de un determinado país se incrementó en un 6,4 % durante el año pasado. ¿Si sigue creciendo a ese ritmo, aproximadamente cuántos años harían falta para que el PIB se duplique?

14. Durante un año, el precio de los alimentos se incrementa en un 15 %. A ese ritmo, ¿en cuántos años se triplicará el precio de los alimentos?

15. El costo de vida es la cantidad necesaria para comprar una lista fija determinada de bienes y servicios en un solo año. Suponemos que está sujeta a un crecimiento exponencial. La tasa de crecimiento se conoce como la tasa de inflación. Si el costo de vida aumentó de $10.000 a $11.000 en un año (un aumento neto del 10 %). ¿Cuál es la tasa instantánea de aumento en el costo de vida de ese año? De forma equivalente, ¿cuál es la tasa de la inflación?

16. Durante un periodo de 3 años, los precios de la vivienda aumentaron un 15 %. ¿A qué razón, y cuántos años harían falta para que los precios de la vivienda aumenten un 50 %?

17. Un isótopo radioactivo tiene una vida media de 16 días. Usted desea tener 30 g al final de los 30 días. ¿Con qué cantidad de radioisótopo se debe empezar?

18. Un isótopo radioactivo está siendo usado en un experimento. Al final de 10 días, solo debe quedar el 5%. ¿Cuál es la vida madia de dicho isótopo?

19. Un isótopo radioactivo se encuentra sin utilizar en su laboratorio durante 10 años, en el momento en que se encontró contenía solamente 80 % del material original.

a. ¿Cuál es la vida media de dicho isótopo?
b. ¿Cuántos años adicionales se tarda hasta que no quede solo el 15 % de la cantidad original?

20. En el momento en que se produjo un elemento, 0.01 del carbono que contenía era de carbono - 14, un radioisótopo con una vida media de cerca de 5745 años.

a. Se examina el artículo y descubre que solo 0,0001 de carbono es el carbono - 14. ¿Qué edad tiene el objeto? (este proceso de determinación de la edad de un objeto a partir de la cantidad de carbono 14 que contiene es conocido como fechado mediante carbono - 14).
b. Derivar una fórmula que da la edad A del objeto, en términos de la fracción de carbono que es el carbono - 14 en el tiempo presente T.

## 7.9.2 Problemas de la ecuación logística

21. El crecimiento de una población obedece a la ecuación logística. Empezando con 1.000 bacterias, entonces ella se dobla en 10 horas. La población es observada eventualmente para estabilizarla en 20.000 bacterias. Encuentre el número de bacterias presentes después de 25 horas y el tiempo que toma la población para llegar a la mitad de su capacidad de carga.

22. Se observa que el crecimiento de una población obedece a la ecuación logística con una  la población eventual 20.000. La población inicial es de 1.000, y 8 horas más tarde, la población observada es 1.200. Encuentre la tasa de reproducción y el tiempo requerido para que la población alcance el 75 % de la capacidad de transporte.

23. A las 6 a. m. dos ejecutivos contables en una empresa corredora escuchan el rumor de que una nueva acción que se ofrece se presentará a mediodía. El rumor se propaga a través de 26 ejecutivos de la empresa a la tasa de:

$$\frac{DN}{dt}=0.025N(26-N)$$

Donde N (t) es el número de ejecutivos que oyeron el rumor t horas después de las 6 a. m.

a. Determine N (t).

b. ¿Cuántos ejecutivos junior no han oído el rumor a mediodía?

24. El número de personas implicadas en un gran escándalo del gobierno, aumenta a una razón proporcional con el número de personas G (t) ya implicadas y el número involucrados por descubrir, por lo que:

$$\frac{dG}{dt}=kG(MK-G)$$

Donde M es el número total de personas implicadas en el escándalo. Suponga que 7 personas están implicadas cuando un periódico publica el escándalo, 9 más son implicadas a lo largo de los siguientes tres meses y un total de 28 personas fueron implicadas al final de 6 meses.

a. Encuentre G (t).

b. ¿Aproximadamente cuántas personas están implicadas en el escándalo?

25. La población de una ciudad sigue un modelo de crecimiento logístico y está limitada a 10.000. Si la población en 1995 era de 50.000 y en el 2000 de 60.000, ¿cuál será la población en el año 2005?

26. Si el crecimiento de un cierto producto de una empresa es un crecimiento logístico y en la actualidad se producen 2.000 unidades diarias, y esta cantidad crecerá a 300 por día en un año y si la producción está limitada a 500 unidades por día, ¿cuál es la producción diaria prevista para dentro de dos años?

27. En cierta universidad de 4.000 estudiantes, la administración sostiene reuniones para analizar la idea de traer una importante banda de rock para el inicio de clases. Antes de anunciar oficialmente los planes, el concejo administrativo difunde la información acerca del evento como un rumor. Al final de una semana, 100 personas conocen el rumor. Suponga que el crecimiento sigue el modelo logístico, ¿cuánta gente conocerá el rumor después de dos semanas?

28. En una ciudad de 100.000 habitantes ocurre un brote de gripe. Cuando el departamento de salud comienza a registrar casos, hay solo 500 personas infectadas. Una semana después hay 1.000 infectadas. Suponga un crecimiento logístico. Estime el número de personas infectadas dos semanas después de que comenzó el registro.

29. Un caso muy especial de la función logística:

$$N(t) = \frac{M}{1 + be^{-ct}}$$

es la función sigmoide, que se obtiene al tomar M = b = c = 1 de manera que en la ecuación anterior se tiene:

$$N(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

a. Muestre de manera directa que la función sigmoide es la solución de la ecuación diferencial:

$\frac{DN}{dt} = N(1 - N)$ Y la condición inicial N (0) = ½.

b. Muestre que (0, ½) es un punto de inflexión de la gráfica de la función sigmoide.

c. Muestre que la función:

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} - \frac{1}{2}$$

es simétrica respecto al origen.

d. Explique cómo en el enciso c., la función sigmoide es simétrica al punto (0, ½) y al mismo tiempo explique lo que esto significa.

e. Haga un bosquejo de la gráfica de la función sigmoide.

## 7.9.3 Problemas de finanzas personales

30. Usted tiene \$10.000 y desea invertir durante 5 años en un banco que ofrece la composición continua. Si usted quiere tener \$15.000 en su cuenta al final de estos 5 años, ¿a qué interés anual debe tener este dinero para poder conseguir la meta?

31. Usted invierte \$2.000 en una cuenta que paga 6 % anual, compuesto diariamente, de tal forma que la cantidad del interés exceda a \$500.

a. Expresar esto como una ecuación diferencial asumiendo la composición continua.
b. Resolver la ecuación diferencial y determinar la cantidad en la cuenta después de 10 años.
c. ¿Cuánto más podría tener la cuenta después de 10 años de la cantidad total, generados en intereses?

32. Una cantidad de \$10.000 se deposita en un banco que paga el 9 % de interés anual compuesto diariamente.

a. Si usted retira \$10 al día, ¿cuánto dinero tiene después de las 3 años?
b. ¿Cuánto se puede retirar cada día si la cuenta debe ser cancelada en exactamente 10 años?

33. Una cantidad de \$1.000 está depositado en un banco que paga \$8 de interés anual compuesto diariamente. Un depósito de B dólares se hace diariamente.

a. ¿Cuál debería ser B con el fin de tener \$10.000 después de 5 años?
b. Determinar la función B (t) que da el depósito diario necesario para tener \$10.000 después de t años (B (5) se calcula en la parte a).

34. Una cantidad de \$10.000 se invierte a un interés del 12 % anual compuesto diariamente. Una inversión adicional de \$B se realiza a diario, ¿cuál debería ser la cantidad B si se quiere que al final la cuenta de inversión pase a ser \$100.000 después del décimo año?

35. Una cantidad de \$100 se deposita en un banco extranjero que paga 20 % de interés anual compuesto diariamente. Cada día se realiza una transacción de f(t) cantidad de dólares. Parte del año se depositan [f (t)> 0] cantidad de dinero, y otra parte del año se hacen retiros [f (t) <0]. Si t es el número de años en que estas transacciones se realizan en el siguiente patrón cíclico anual:

$$f(t) = \frac{\$\frac{400}{365}cos(2\pi t)}{día} = \frac{\$400\cos(2\pi t)}{año}$$

a. Encuentre la cantidad de dinero en la cuenta como una función de t.
b. Grafique su respuesta durante 10 años (o realice un boceto si no hay un ordenador disponible).

## 7.9.4 Ley de Newton del enfriamiento o calentamiento

36. La temperatura de un motor en el momento en que se apaga es de 200 °C, el aire circundante es de 30 °C, después de que hayan transcurrido 10 minutos, la temperatura de la superficie del motor es de 180 °C.

a. ¿Cuánto tiempo se necesita para que la temperatura de la superficie del motor enfríe a 40 °C?
b. Para una temperatura dada T entre 200 °C y 30 °C, sea t (T) el tiempo que tarda en enfriar el motor de 200 °C a T (por ejemplo, t (200) = 0 y t (40) es la respuesta a la parte (a)). Encontrar la fórmula para T (t) en términos de T y representar gráficamente la función. (La temperatura ambiente es todavía 30 °C).

37. Experimentos anteriores han demostrado que un cierto componente se enfría en aire de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, con constante de proporcionalidad de 0.2. Al final de la primera etapa de procesamiento, la temperatura del componente es de 120 °C. El componente se mantiene durante 10 minutos en una habitación grande y luego, entra en la siguiente etapa de procesamiento. En ese momento se supone que la temperatura de la superficie es de 60 °C.

   a. ¿Cuál debe ser la temperatura ambiente para que el enfriamiento deseado se lleve a cabo?
   b. Supongamos que las temperaturas de entrada y salida todavía se fijan a 120 °C y 60 °C respectivamente, pero el tiempo de duración de la espera en la habitación es w, una constante. Encuentre la temperatura ambiente deseada en función de w y represéntela gráficamente.

38. Un objeto a 100 °C es colocado en una sala de 40 °C. ¿Cuál debe ser la constante de proporcionalidad en la ley de enfriamiento de Newton, con el propósito de que el objeto llegue a 60 °C después de 10 minutos?

39. El aire de una habitación se está enfriando. En el tiempo t (en horas), la temperatura del aire es $Q_0$ (t) = 70 + $20e^{-1/2t}$. Se coloca un objeto en la sala en el momento t = 0. El objeto está inicialmente a 50 °C y los cambios de temperatura están de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton con k = ½.

   a. Encuentre la temperatura, T (t) del objeto para $0 \leq t \leq 5$.
   b. Grafique ambas funciones $Q_0$ y T sobre el mismo sistema de coordenadas.

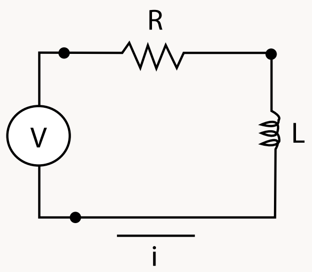
40. Un instrumento a temperatura inicial de 40 °C se coloca en una habitación cuya temperatura es 20 °C. Para las próximas 5 horas la temperatura ambiente $Q_0$ (t) se eleva gradualmente y está dada por $Q_0$ (t) = 20 + 10 t, t en horas.

a. Dé la forma a la ley de calentamiento de Newton para la temperatura del instrumento.
b. A partir de la experiencia previa se sabe que el instrumento se enfría de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton con k = 1, si t se mide en horas. Si T (t) es la temperatura de la superficie en el tiempo t, resuelva la ecuación en la parte (a) para T (t).
c. Grafique $Q_0$ (t) y T (t) en el mismo sistema de coordenadas.

## 7.9.5 Circuitos eléctricos

41. Los ejercicios hacen referencia a circuitos dados en la figura 30. El inductor es lineal con la inductancia; la fuente de voltaje es E (t).

**Figura 30.** Gráfica del circuito RL.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

42. La fuente de voltaje es constante e igual a E = 1, el resistor es lineal con características v – i, v = 2i, y L = 1. Establecer la ecuación diferencial para la corriente. Determinar la corriente como una función del tiempo para cualquier corriente inicial i (o). Encuentra las constantes del estado de equilibrio (soluciones).

43. La fuente de voltaje es constante, E = 4, el resistor es lineal con características v-i, v = 6i, y L = 2. Determine la ecuación diferencial para la corriente. Determine la corriente como una función del tiempo para cualquier corriente inicial i (0), encuentre las constantes del estado de equilibrio (soluciones).

44. La fuente de voltaje es constante, E (t) = sen t, el resistor es lineal con características v – i, v = i y L = 1. Determine

la corriente como una función del tiempo para cualquier corriente i (0).

45. La fuente de voltaje es una constante E, el resistor es lineal con características v – i, con v = i R, R>0, y la inductancia es L > 0.

   a. Muestre que $lim_{t\to\infty} i(t)$ existe y es el mismo para toda corriente inicial.
   b. Si E = 8.5, para qué valores de R y L su $lim_{t\to\infty} i(t) = 4.2$.

46. El resistor tiene características v – i, con v = i y L = 1. La fuente de voltaje es una batería de 9 V que está conectada solamente durante los nueve primeros segundos. Esto es:

$$\mathrm{E(t)} = \begin{cases} 9, & 0 \leq \mathrm{t} < 10 \\ 0 & \mathrm{t} \geq 10 \end{cases}$$

La corriente es inicialmente cero. Encuentre i (t) para $0 \leq t < 20$, grafique el resultado.

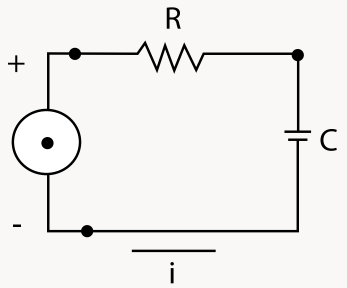
47. El resistor tiene las características v – i, con v= 2i y L = 1. La fuente de voltaje es una batería que dura desconectada por 10 segundos y luego se conecta a la fuente (mediante un interruptor), tal que:

$$E(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 10 \\ 1.5 & t \geq 10 \end{cases}$$

La corriente inicial es cero. Encuentre i(t) para $0 \leq t < 20$ y grafique el resultado.

48. Para la siguiente figura:

**Figura 31.** Gráfica de un circuito RC.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

- La capacitancia es 0.5, el resistor es lineal con la característica v – i, con v = 2i, y la carga del voltaje es sinusoidal con E (t) = 6 sen t. Encuentre la carga sobre el capacitor como una función de t dado que esta fue inicialmente 1.

## 7.9.6 Mezclas

49. Un gran tanque de mezclado contiene 300 galones de agua con una concentración de sal de 0,2 lb/gal. Una mezcla de agua que contiene sal a una concentración de 0,4 lb/gal entra a una velocidad de 2 gal/min. Una válvula abierta permite que la mezcla de agua con sal abandone el depósito a la misma velocidad.

    a. Determinar la cantidad y la concentración de sal en el tanque como funciones del tiempo.
    b. ¿Cuánto tiempo se necesita para que la concentración aumente a 0,3 lb/gal?

50. Una habitación tiene un volumen de 800 pies$^3$. El aire de la habitación contiene cloro en una concentración de 0,01 gramos/ft$^3$. El aire fresco entra a una velocidad de 8 pies$^3$/min. El aire de la habitación está bien mezclado y fluye fuera de una puerta a la misma velocidad que el aire fresco entra en la habitación.

a. Encuentre la concentración de cloro en la habitación como una función de t.
b. Supongamos que la velocidad de flujo de aire fresco es ajustable. Determine el caudal requerido para reducir la concentración de cloro a 0,001 g/ft$^3$ dentro de 20 minutos.

51. Un tanque contiene 100 L de agua con una concentración de sal de 0,1 kg/L bien mezclado. Agua que contiene sal a una concentración de 0,2 kg/L entra al tanque a una tasa de 0,5 L/h. Una válvula abierta permite que el agua salga a 4 L/h. El agua se evapora desde el depósito a 1 L/h.

a. Determinar la cantidad y la concentración de la sal como una función del tiempo.
b. ¿Es la concentración en el límite la misma que la de la entrada?

52. Un estanque circular contiene 1.000.000 L de agua, que contiene un contaminante en una concentración de 0,01 kg/L, agua pura de una corriente entra en el tanque a 100L/h, el agua se evapora del estanque (dejando el contaminante detrás) a 50 L/h. ¿Cuántos días tomará para que la concentración del contaminante llegue a caer a 0,001 kg/L?

53. Un tanque con capacidad de 1.000 galones está inicialmente medio lleno de agua y contiene 10 libras de yodo en solución. Agua pura entra en el tanque a una

velocidad de 6 litros/min. Una válvula abierta permite que el agua salga a una velocidad de 1 gal/min. Cuando se llena, se empieza a desbordar el tanque.

a. Encuentre la cantidad y la concentración de yodo para los primeros 100 minutos.
b. Encuentre la cantidad y la concentración de yodo para los siguientes 100 minutos.
c. Grafique tanto la cantidad como la concentración de yodo.

54. Un tanque de 100 galones está inicialmente lleno de agua que contiene 10 libras de sal en solución. El depósito se desbordará cuando se añada agua adicional. Un sensor conectado a una bomba de agua dulce la deja entrar en el tanque a una velocidad proporcional a la concentración de sal. La constante de la proporcionalidad es de 10 gal2/lb min. Encuentre la cantidad y la concentración de sal en el tanque como función de t.

55. Un lago con buena circulación contiene 1.000 kl de agua que está contaminada con una concentración de 2 kg/kl. El agua del efluente de una fábrica entra en el lago a una velocidad de 5 kl/h con una concentración de 7 kg/kl de contaminante. El agua fluye fuera del lago a través de una salida, a razón de 2 kl/h. Determinar la cantidad y la concentración del contaminante como una función del tiempo.

56. En los ejercicios, formular las ecuaciones diferenciales (antes de que el tanque esté vacío o desbordado) lo que se utiliza para resolver los problemas, pero no resuelve las ecuaciones diferenciales, ya que los ejercicios implican más de un tanque, lo que requiere una ecuación diferencial para cada tanque.

57. Un tanque de 600 galones contiene inicialmente 200 galones de salmuera (agua salada) con 25 libras de sal. Salmuera que contiene 2 libras de sal por galón entra en un segundo tanque a razón de 13 litros/seg. La salmuera mezclada en el tanque fluye a razón de 8 gal/seg. ¿Cuál es la cantidad de sal de cada tanque como una función de tiempo?

58. Considere dos tanques. Inicialmente el tanque 1 contiene 150 galones de salmuera (agua salada) con 8 libras de sal, y el tanque 2 contiene 250 galones de salmuera con 14 libras de sal. Salmuera que contiene 3 libras de sal por galón entra en el tanque 1, a razón de 13 litros/seg. Salmuera mezclada en el depósito 1 fluye hacia el depósito 2 a razón de 7 litros/seg. La mezcla en el tanque 2 fluye lejos, a razón de 28 litros/seg. Expresar la cantidad de sal que está en cada tanque como una función de tiempo.

59. Considere dos tanques. Inicialmente el tanque 1 contiene 100 galones de salmuera (agua salada) con 35 libras de sal, y el tanque 2 contiene 400 galones de salmuera con 5 libras de sal. Supongamos que la mezcla fluye fuera del tanque 1 al tanque 2 a la razón de 17 gal/min y la mezcla fluye fuera del depósito 2 en tanques de 1 a razón de 6 gal/min. ¿Cuál es la cantidad de sal que está en cada tanque como una función de tiempo?

60. Considere dos tanques. Inicialmente el tanque 1 contiene 320 galones de salmuera (agua salada) con 28 libras de sal, y el tanque 2 contiene 274 galones de salmuera con 7 libras de sal. Salmuera que contiene 5 libras de sal por galón entra en el tanque 1, a razón de 21 litros/seg.

Salmuera mezclada en el depósito 1 fluye a razón de 18 litros/seg, la mitad fluye en el tanque 2. La mezcla en el tanque 2 fluye a razón de 4 litros/seg. ¿Cuál es la cantidad de sal en cada tanque como una función de tiempo?

61. Considere tres tanques. Inicialmente el tanque 1 contiene 200 galones de salmuera (agua salada) con 55 libras de sal, y el tanque 2 contiene 500 galones de salmuera con 35 libras de sal y el tanque 3 está vacío. Supongamos que la mezcla fluye fuera del tanque 1 en el tanque 2, a razón de 8 gal/min y la mezcla fluye hacia fuera del depósito 2 en el tanque 3 a razón de 22 gal/min. ¿Cuál es la cantidad de sal en cada tanque como una función de tiempo?

62. Un tanque grande contiene 7 galones de agua pura. Agua contaminada que contiene 7 g de bacterias por galón entra a razón de 14 gal/h. Una cantidad bien mezclada se retira a la tasa del 4 gal/h. Sin embargo, también se sabe que las bacterias se multiplican dentro del tanque a una razón de crecimiento de 2 % por hora. Determine la cantidad de bacterias en el tanque como función del tiempo.

### 7.9.7 Mecánica elemental

63. En lugar de un accidente, el investigador de la policía trata de determinar a partir de las marcas de las llantas en la carretera, lo rápido que iba el auto. Supongamos que se sabe que este tipo de automóviles particulares frena con una desaceleración de 15 $m/s^2$. ¿A qué velocidad iba el coche en el momento en que aplica los frenos, si el auto recorrió 75 metros antes de detenerse?

64. Repita el ejercicio anterior con la observación de que el coche recorrió 75 metros antes de detenerse, pero asumiendo que la desaceleración del coche se dio a solo 10 m/s2.

65. Una distancia excesivamente prudente entre usted y el coche que va delante sería la distancia que le lleva a detenerse. ¿A una velocidad de 60 km/h, en qué distancia lo hace el recorrido del coche si se desacelera a 2.500 km/h$^2$? En referencia al ejercicio anterior, con la misma desaceleración, ¿hasta qué punto va el recorrido del coche a 120 km/h?

66. Haciendo referencia al ejercicio, con la misma aceleración, determine hasta qué punto un coche alcanza a recorrer antes de frenar como una función de su velocidad.

67. Supongamos que un coche va a 50 km/h cuando se aplican los frenos en t = 0. Determine la distancia que el coche recorre. Supongamos que la aceleración no constante es a = -6t.

68. Supongamos que un coche va a 50 km/h cuando se aplican los frenos en t = 2 h. Determine la distancia que el coche recorre. Supongamos que la aceleración no constante es a = -6t.
¿Cuánto tiempo tarda un libro en deslizarse con el fin de que se caiga de una tabla de 15m si el libro se desacelera de tal manera que a = - 5 m / s$^2$?

69. Supongamos que un quitanieves de w metros de anchura va hacia adelante a lo largo de un camino para que entre

con una velocidad constante por hora en un volumen de nieve Q $m^3/h$. Suponga que la nieve comenzó a caer a las 8 a. m. ($t = 0$) y cae a una velocidad constante de c m/h.

a. Muestre que $dx/dt = 1/(kt)$, donde $x(t)$ es la posición del quitanieves y $k = w\, c/Q$.
b. ¿Dónde estará el quitanieves al mediodía, si no comenzó a moverse sino hasta las 11 a. m.?

70. Un cohete de juguete se dispara hacia arriba desde el nivel del suelo en $t = 2$ s. Determine la altura máxima del cohete si la velocidad en $t = 2$ es de 76 m / s. Suponga que la aceleración no constante del cohete es conocido y su valor es $a = 12t^2$.

71. ¿A qué velocidad debe ser lanzada una pelota hacia arriba si se trata de alcanzar una altura máxima de 100 m?

72. ¿A qué velocidad debe ser una pelota lanzada hacia arriba si se trata de alcanzar su altura máxima en 10 s?

73. Supongamos que un ladrillo se deja caer desde una torre en construcción de una altura de 200 m. ¿Cuánto tiempo tarda el ladrillo en caer?

74. Una maza de 20 g se deja caer desde un avión que vuela horizontalmente. La resistencia del aire actúa de acuerdo con un medio que ofrece resistencia, con una constante de proporcionalidad de k g/s. Considerando solo el movimiento vertical:

a. Encuentre la velocidad como una función del tiempo.

b. Encuentre la velocidad después de 10 seg, asumiendo que el cuerpo no ha llegado al fondo.
c. Asumiendo que la fuerza gravitacional es constante, ¿cuál es el límite de la velocidad?

75. Una pesa de 64 libras es lanzada verticalmente hacia arriba sobre la superficie terrestre. En el instante en que sale del lanzador, tiene una velocidad de 192 pies/s.

a. Haciendo caso omiso de la resistencia del aire, determine el tiempo que tarda el objeto en alcanzar su máxima altura.
b. Si la resistencia del aire actúa de acuerdo con un medio que ofrece resistencia y con una constante de proporcionalidad de 128 lb/s, ¿cuánto tiempo se necesita para que el objeto alcance su máximo altura?

76. Una masa de 70 g es expulsada hacia abajo desde un helicóptero estacionario. La resistencia del aire actúa de acuerdo con un medio que ofrece resistencia, y con la constante de proporcionalidad de 7 g/s. ¿A qué velocidad debe ser expulsado si la masa debe tener una velocidad de 12.600 cm/s después de 5 s?

77. Supongamos que un objeto de masa m se expulsa hacia abajo con una velocidad $v_0$ sobre la superficie de un planeta cuya constante gravitacional es G. La atmósfera ejerce la resistencia en el cuerpo con un medio que ofrece resistencia constante, con una constante de proporcionalidad de r (todos los parámetros están en sistema mks).

a. Encuentre la fórmula para v (t).
b. Encuentre la fórmula para la velocidad límite.

Suponga que el objeto se compone de una carga útil y un paracaídas. La carga útil es 80 % de la masa total, y el paracaídas ocupa el equilibrio de la masa total. Supongamos también que el paracaídas representa esencialmente toda la fuerza de resistencia.

c. ¿Cuánto debería ser la carga útil que reduce a la mitad la velocidad límite?

78. Un cuerpo de 32 libras peso, está cayendo a través de un medio gaseoso cerca de la superficie de la tierra. La resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, con una constante de proporcionalidad 1. En el tiempo $t = 0$, la velocidad es de 1000 pies / s.

a. Encuentre la velocidad como una función del tiempo.
b. ¿Existe una velocidad límite? Si la hay, encontrarla.

## 7.9.8. Curvas ortogonales

Para cada una de la familia de curvas (equipotenciales) en los ejercicios 79 al 96 calcule la familia ortogonal. Haga un bosquejo para estas familias en los ejercicios 79 al 83.

| | |
|---|---|
| 79. $x = t + k$ | 80. $X = k\,t$ |
| 81. $x\,t = k$ | 82. $x^2 = k\,(t + x)$ |
| 83. $x = t\,K$ | 84. $X = (t + k)^3$ |
| 85. $x = t^2 + k$ | 86. $x^3\,(t + 1) = k$ |

87. $t = (x - k)^2$

88. X = e k t

89. x = tan (k + t)

90. $t^{1/5} + x^{1/5} = k$

91. x = k cos t

92. X = cos t + k

93. $x = k\ t^2$

94. $e^x - e^t = k$

95. $x\ 3 + t^2 = k$

96. Tan x + tan t = k.

# CAPÍTULO 8.

# SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN Y DE GRADO SUPERIOR

## Contenido



## Competencias

1. Identificar ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas.
2. Deducir cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes.
3. Aplicar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas a problemas de la vida cotidiana.

**Figura 1.** Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (escrito Weierstrass cuando no está disponible el carácter «ß») (1815-1897).

**Fuente.** Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual de la Universidad EAN).

Karl Theodor Nace en Ostenfelde, el 31 de octubre de 1815 y muere en Berlín, el 19 de febrero de 1897, fue un matemático alemán que se suele citar como el «padre del análisis moderno». Entre sus logros más destacados figuran la definición de la continuidad de una función, demostrando el teorema del valor medio; y el teorema de Bolzano-Weierstrass, usado posteriormente para estudiar las propiedades de funciones continuas en intervalos cerrados.

# Introducción

Introducimos un modelo central en física e ingeniería, el oscilador armónico, la ecuación diferencial lineal de segundo orden prototípico de estas situaciones. Se derivan problemas de valor inicial que describen las vibraciones mecánicas y el comportamiento de los circuitos eléctricos, amortiguados y no amortiguados, que ilustran trayectorias en el plano de fase.

# 8.1 Solución general de una ecuación lineal de segundo orden

En la sección 6.2, analizamos la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Y mostramos que la solución general de este tipo de ecuación es siempre de la forma:

$$\mathbf{y\,(x) = y_p(\,x) + c\,y_h\,(x)}$$

Donde $y_p$ es una solución particular de dicha ecuación, y $y_h$ es una solución diferente de cero asociada con la ecuación homogénea $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$, y c es una constante arbitraria.

Una propiedad similar satisface la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

Si en esta ecuación hacemos R(x) = 0, entonces la ecuación es llamada **homogénea.**

Por analogía de lo que sucede en las ecuaciones de primer orden, podemos decir que:

### Forma de la solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden

Dada la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \qquad (1)$$

La solución general es de la forma:

$$y(t) = y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \qquad (2)$$

Donde:

· $y_p(x)$ es una solución particular de dicha ecuación.

· $y_1$ y, $y_2$ son soluciones para la ecuación diferencial homogénea asociada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x) = 0 \qquad (3)$$

Las soluciones $y_1$ (x), $y_2$ (x) no pueden ser un múltiplo constante de la otra.

Esto se expresa diciendo algunas veces que $y_1$ (x) , y $y_2$ (x) son linealmente independientes. Un par de tales soluciones de la ecuación diferencial homogénea es llamado un **conjunto fundamental de soluciones.**

Las constante $c_1$ y $c_2$ son constantes arbitrarias. La expresión $c_1$ $y_1$ + $c_2$ $y_2$ es llamada una **combinación lineal** de $y_1$ y, $y_2$.

Para una ecuación diferencial de segundo orden, siempre hay dos soluciones para la ecuación diferencial homogénea asociada, es decir, siempre el conjunto fundamental tiene dos soluciones (para una ecuación diferencial lineal de primer orden, solo existe una solución asociada a la ecuación homogénea en la solución general). La solución general para una ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene dos constantes arbitrarias (la ecuación diferencial lineal de primer orden tiene solo una constante). Para una ecuación diferencial lineal de segundo orden, las dos constantes pueden ser determinadas a partir de dos condiciones iniciales (para las ecuaciones lineales de primer orden, la constante arbitraria está determinada de una condición inicial).

Observe que y (x) = 0 siempre satisface la ecuación diferencial lineal homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x) = 0 \qquad (4)$$

Entonces, si vamos a resolver la ecuación anterior, escogemos $y_p(x) = 0$. De esto se sigue que:

La solución general de una ecuación diferencial lineal homogéneas (1) es una combinación lineal de la forma:

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (5)$$

Donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.

El procedimiento para encontrar $y_1(x)$, $y_2(x)$ y $y_p(x)$ lo daremos más adelante en este capítulo. Después de hacer un ejemplo, vamos a tratar de entender por qué (2) es válido.

## Ejemplo 1:

- Verifique que senx, cos x son soluciones de $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.
- Verifique que $e^{-3x}$ es solución de $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 10e^{-3x}$.
- Dar la solución general de:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 10e^{-3x}$$

- Resuelva el problema con condición inicial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 10e^{-3t}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

## Solución:

a. La verificación de que cos x es una solución de la ecuación homogénea $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ es sencillo, pero ofrece una buena práctica. Y = cos x, su primera derivada es $y' = -\text{sen}x$, su segunda derivada es $y'' = -\cos x$, y $\frac{d^2y}{dx^2}+y=-\cos x+\cos x=0$. Similarmente, se puede mostrar que y = sen x es otra solución. También tenemos que $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ es una ecuación de segundo orden, entonces por (5) {sen x, cos x} es un conjunto fundamental de soluciones y entonces $y = c_1$ sen x + $c_2$ cos x da todas las soluciones de $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$.

b. Es fácil verificar que $y_p(x) = e^{-3x}$ satisface la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ Observe que $y_p' = -3e^{-3x}$ y, $y_p'' = 9e^{-3x}$, luego $y_p''+y_p=9e^{-3x}+e^{-3x}=10\,e^{-3x}$, como debe ser. Entonces la solución particular de la ecuación no homogénea es $y_p(x) = e^{-3x}$. Más tarde veremos métodos para encontrar la solución particular.

c. Luego por (2), se tiene que la solución general de: $\frac{d^2y}{dx^2}+y=10e^{-3x}$ Es:

$$y(x) = e^{-3x} + c_1 \,\text{sen}\, x + c_2 \cos x \qquad (6)$$

Para resolver el problema con condición inicial, evaluamos la ecuación (6) en x = 0, y tenemos:

$$0 = y(0) = 1 + c_2, \text{ luego } c_2 = -1$$

Derivando (6) se tiene:

$$y' = -3e^{-3x} + c_1 \cos x - c_2 \,\text{sen}\, x$$

Evaluando $y'$ en x = 0 o usando la condición inicial dada $y'(0) = 1$ se tiene:

$$1 = y'(0) = -3 + c_1$$

De donde $c_1 = 4$. Entonces la solución del problema con condición inicial es:

$$y(x) = e^{-3x} + 4 \operatorname{sen} x - \cos x$$

En resumen, se tiene que la solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x) \qquad (12)$$

Es de la forma:

$$y(x) = y_p + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Se demuestra, en primer lugar, que $y = y_p + y_h$, en donde $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ satisface la ecuación homogénea, por lo que $y_p + c_1y_1 +´c_2y_2$ resuelve la ecuación (12). En la siguiente sección discutiremos la pregunta más importante de mostrar: que toda solución siempre es de esta forma.

Consideremos de nuevo la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x) \qquad (13)$$

Primero mostraremos que:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

Donde $y_p(x)$ es una solución particular y $y_h$ es una solución de la ecuación homogénea asociada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

Supongamos que y, y $y_p$ son ambas soluciones de (13). Entonces:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \text{ y } y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p = f(x) \qquad (14)$$

Introduciendo $y_h = y - y_p$, la diferencia entre y y, $y_h$, se tiene que $y = y_p + y_h$. Para calcular la ecuación diferencial que satisface $y_h$, calculamos $y_h^{//} + P(x)y_h + Q(x)y$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
y_h^{//}+P(x)y_h+Q(x)y_h &= (y-y_p)^{//}+P(x)(y-y_p)^{/}+Q(x)(y-y_p)\\
&= y^{//}-y_p^{//}+P(x)y^{/}(x)-P(x)y_p^{/}+Q(x)y-Q(x)y_p\\
&= (y^{//}+P(x)y^{/}+Q(x)y)-(y_p^{//}+P(x)y_p^{/}+Q(x)y_p)=f(x)-f(x)=0
\end{aligned}
$$

Donde hemos utilizado (14). De este modo $y_h$ es una solución de la ecuación homogénea asociada $y_h^{//} + P(x)y_h + Q(x)y_h = 0$, como se proponía en (13).

Veamos ahora una combinación lineal:

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

Donde $y_1$, y $y_2$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea:

$$L(x) = \frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \qquad (15)$$

Es también una solución de la ecuación diferencial homogénea.

Veamos que esto es cierto. Supongamos que $y_1$, y $y_2$ son soluciones de la ecuación homogénea (15). Entonces:

$$y_1^{//} + P(x)y_1^{/} + Q(x)y_1 = 0, \text{ y } y_2^{//} + P(x)y_2^{/} + Q(x)y_2 = 0$$

Ahora, sustituyendo en la ecuación (15) a y por $c_1y_1 + c_2y_2$, donde $c_1$, y $c_2$ son constantes, se tiene:

$$
\begin{aligned}
&(c_1y_1+c_2y_2)^{//}+P(x)(c_1y_1+c_2y_2)^{/}+Q(x)(c_1y_1+c_2y_2)=c_1y_1^{//}+c_2y_2^{//}+P(x)c_1y_1^{/}+\\
&P(x)c_2y_2^{/}+Q(x)c_1y_1+Q(x)c_2y_2=C_1(y_1^{//}+P(x)y_1^{/}+Q(x)y_1)+c_2(y_2^{//}+P(x)y_2^{/}+Q(x)y_2)=c_10+c_20=0
\end{aligned}
$$

Luego $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ es también solución de la ecuación homogénea $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ como se quería demostrar.

# 8.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 8, verifique que el conjunto dado es un conjunto de soluciones asociados a la ecuación homogénea, y verifique que $y_p$ es una solución particular. Luego dar la solución general de la ecuación diferencial, y resolver el problema de valor inicial.

1. $y'' + y = 1.\, y(0) = 0, y'(0) = 0$, $\{\text{sen } x, \cos x\}$, $y_p = 1$

2. $y'' - y = e^{3t}.\, y(0) = 0, y'(0) = 1$, $\{e^x, e^{-x}\}$, $y_p = \frac{1}{8}e^{3t}$

3. $y'' - 3y' + 2y = 2x.\, y(0) = 1, y'(0) = 0$, $\{e^x, e^{2x}\}$, $y_p = x+3/2$

4. $y'' - 3y' + y = 4e^{2x}.\, y(0) = 0, y'(0) = 0$, $\{e^x, xe^x\}$, $y_p = 4e^{2x}$

5. $y'' + 2y' + 2y = 6.\, y(0) = 1, y'(0) = 1$, $\{e^x \cos x, e^{-x} \text{sen } x\}$, $y_p = 3$

6. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3.\, y(1) = 2, y'(1) = 3$, $\{x, x^2\}$, $x_p = x^3$. $x > 0$

7. $y'' + y' = 2\cos x.\, y(0) = 1, y'(0) = -1$, $\{\text{sen } x, \cos x\}$, $y_p = x \text{ sen } x$

8. $x^2y'' + 4xy' + 2x = 2\ln x + 3.\, y(1) = 2, y'(1) = 2$, $\{x^{-1}, x^{-2}\}$, $x_p = \ln x$. $x > 0$

   a. Verifique que ambas:

$$y_1(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2\cosh x$$

Y

$$y_2(x) = d_1e^x + d_2e^{2x} + e^{-x}$$

son soluciones generales de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}$$

Verifique que si las condiciones iniciales son $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$ son aplicadas a cada una de las ecuaciones diferenciales anteriores, entonces ambas dan la misma solución.

b. Verifique que ambas:

$$y_1(x) = c_1 + c_2x + x^2$$

Y:

$$y_2(x) = d_1(1 + x) + d_2(1 - x) + x^2 + 3x + 1$$

Son soluciones generales de la ecuación diferencial $y'' = 2$.

c. Verifique que, si las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, son aplicadas a las dos ecuaciones diferenciales, entonces ambas tienen las mismas soluciones.

# 8.3 Problemas de valor inicial (para ecuaciones homogéneas)

Vamos a continuar el estudio de la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x) \quad (16)$$

Hemos demostrado que:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

Donde $y_p$ es una solución particular de (16) y $y_h$ es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \qquad (16)$$

Hemos afirmado que:

$$Y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

Donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son un conjunto de soluciones de (16). Vamos ahora a introducir algunos conceptos importantes que van a hacer usados algunas veces en el estudio de las ecuaciones diferenciales.

Para todo par de números $u_0$, $v_0$, consideramos primero la pregunta práctica para resolver el **Problema con Valor Inicial (PVI).** En general necesitamos encontrar las constantes $c_1$ y, $c_2$ en su orden que satisfagan las dos condiciones iniciales:

$$y(x_0) = u_0$$

$$y'(x_0) = v_0$$

Asumamos que:

$$y\,(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y(x)$$

Las condiciones iniciales se satisfacen si:

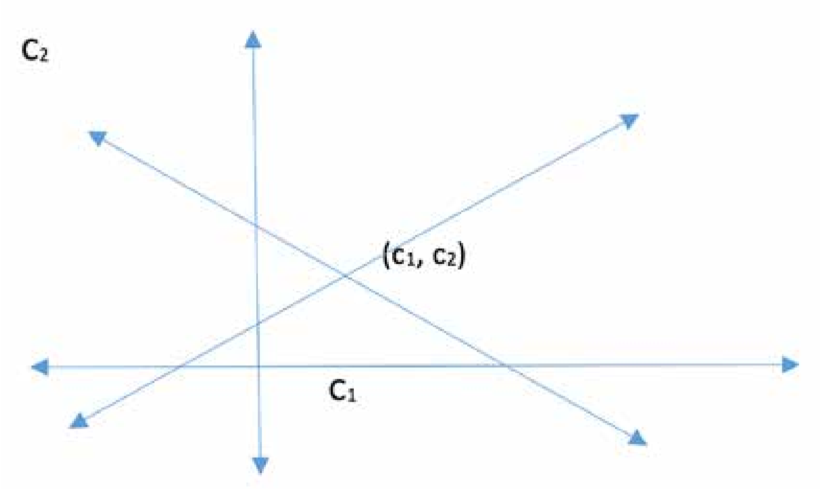
$$u_0 = c_1 y_1\,(x_0) + c_2\, y_2\,(x_0)$$

$$\text{Y:} \qquad\qquad\qquad\qquad (17)$$

$$v_0 = c_1\, y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_o)$$

El problema matemático de resolver para las constantes, consiste en resolver un sistema de dos ecuaciones lineales para las incógnitas $c_1$ y $c_2$. Los sistemas de ecuaciones lineales pueden tener una única solución, no tener solución o tener infinitas soluciones, dependiendo de los coeficientes de las ecuaciones lineales. Las ecuaciones lineales dadas anteriormente definen una recta en el plano ($c_{1,}$ $c_2$), estas tres condiciones deben corresponder a la intersección de dos líneas no paralelas, o líneas paralelas que no se cortan o líneas paralelas que coinciden. El resultado del análisis que sigue depende de que si dos soluciones de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas se escogen de tal forma que una no es múltiplo de la otra, entonces no es difícil resolver el sistema lineal y encontrar una única solución de este sistema de ecuaciones lineales y la única solución para $c_1$ y $c_2$ deben ocurrir. Este caso es dado en la siguiente figura.

**Figura 2.** Intersección de dos rectas en el plano.




**Fuente.** Elaborada por el autor.

Podemos resolver el sistema (17) para $c_1$ y $c_2$ de varias formas, de todas maneras todas ellas son equivalentes matemáticamente. Por ejemplo, podemos eliminar $c_2$ multiplicando la primera ecuación del sistema (17) por $y_2^{\prime}(x_o)$ y la segunda ecuación por $y_2(x_0)$, y luego sustraemos. Este cálculo nos da:

$$c_1\left[y_1(x_0)y_2^{\prime}(x_o)-y_2(x_0)y_1^{\prime}(x_0)\right]=y_2^{\prime}(x_o)u_0-y_2^{\prime}(x_o)v_0 \qquad (18)$$

Si $\left[y_1(x_0)y_2^{\prime}(x_o)-y_2(x_0)y_1^{\prime}(x_0)\right]=0$, entonces el coeficiente de multiplicación $c_1$ en (18) es cero y resulta que, o bien no habrá una solución para las constantes o la solución no será única. Si $\left[y_1(x_0)y_2^{\prime}(x_o)-y_2(x_0)y_1^{\prime}(x_0)\right]\neq 0$, podemos resolver para $c_1$ y tenemos:

$$c_1=\frac{y_2^{\prime}(x_o)u_0-y_2^{\prime}(x_o)v_0}{\left[y_1(x_0)y_2^{\prime}(x_o)-y_2(x_0)y_1^{\prime}(x_0)\right]}$$

Un cálculo similar se da para calcular $c_2$. En resumen, se tiene que:

Existe una única solución al problema con valor inicial dado en (17) solo cuando:

$$\left[y_1(x_0)y_2'(x_o) - y_2(x_0)y_1'(x_0)\right] \neq 0$$

Acabamos de descubrir el hecho de la teoría de las ecuaciones lineales que nos dice que hay una solución única del sistema dado en (17) para $C_1$ y $C_{2,}$ si y solo si el determinante de los coeficientes del sistema es distinto de cero en $x_0$, es decir:

$$det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0$$

### El Wronskiano

Definimos el **Wronskiano**[1] **W** de dos funciones $y_1$, $y_2$ como:

$$W[y_1, y_2] = \ det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

Aquí $y_1$, y $y_2$ son dos soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\ (x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad (19)$$

Veamos ahora que el Wronskiano de dos soluciones $y_1$, y $y_2$ de la ecuación (19), ellas mismas satisfacen la ecuación diferencial lineal de primer orden. A partir de que vamos a analizar el significado de ser el Wronskiano cero, comenzamos calculando la primera derivada con respecto a x del Wronskiano de dos soluciones $y_1$, $y_2$ de (19):

$$\frac{dW}{dx} = [y_1y_2' - y_2y_1']' = y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_2y_1'' - y_2'y_1'$$

$$= y_1y_2'' - y_2y_1'' = y_1(-Py_2' - Qy_2) - y_2(-Py_1' - Qy_1) = -P[y_1y_2' - y_2y_1'] = -PW$$

Luego, el Wronskiano satisface la ecuación diferencial lineal de primer orden:

1 Hóene Wronski (1778-1853) inició como soldado para convertirse, sucesivamente, en matemático, filósofo y loco.

$$\frac{dW}{dx} = -PW \qquad (20)$$

Donde P(x) es el mismo que aparece como coeficiente en la ecuación diferencial lineal de segundo orden (19).

La ecuación diferencial lineal de primer orden para el Wronskiano dada en (20) es una ecuación separable. Es decir que se puede resolver usando el factor integrante. De acuerdo con lo visto anteriormente se tiene que la solución es:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt} \qquad (21)$$

La exponencial en esta ecuación nunca es cero, $W(x_0)$ es una constante, el Wronskiano está evaluado en el valor inicial. Por lo tanto, el Wronskiano W (x) es o bien siempre cero (si $W(x_0) = 0$) o nunca cero (si $W(x_0) \neq 0$). En todos los problemas, las dos soluciones de la ecuación diferencial homogénea son escogidas de tal forma que $W(x_0) \neq 0$, y entonces $w(x) \neq 0$. El Wronskiano surge en muchos lugares en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales. Por lo tanto, la ecuación (21) va a ser muy útil.

## Solución fundamental

Hemos mostrado en la sección anterior que $c_1y_1$ +´$c_2y_2$ resuelve la ecuación diferencial lineal homogénea. Sin embargo, es posible que no se pueda resolver el problema con valor inicial para esta solución. Para poder resolver este problema con valor inicial, lo primero que se tiene que dar es que el Wronskiano de $y_1$, $y_2$ tiene que ser diferente de cero. Entonces dos soluciones $y_1$, $y_2$ de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden forman **el conjunto fundamental** y se puede mostrar que ellas son linealmente independientes, sí y solo sí $W(x_0) \neq 0$. Entonces el criterio para saber si un conjunto de soluciones es fundamental basta con ver que su

Wronskiano es diferente de cero. De lo anterior se sigue que todas las soluciones de una ecuación homogénea se pueden escribir como una **combinación lineal** del conjunto fundamental:

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Y que la solución general de la ecuación diferencial no homogénea (16) es de la forma:

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

## Ejemplo 2. Conjunto fundamental y problema con valor inicial:

a. Muestre que {sen x, cos x} forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea:

$$y'' + y = 0 \qquad (22)$$

b. Encuentre la solución general.

c. Encuentre la solución del problema con valor inicial y (0) = 6, $y'$ (0) = 3.

### Solución:

a. Primero debemos verificar que $y_1$ = sen x, y $y_2$ = cos x satisfacen la ecuación (22). Se omite este paso, ya que este hecho fue verificado en el ejemplo 1 para mostrar que {senx, cos x} es un conjunto fundamental de soluciones, debemos ver que W $[y_1, y_2] \neq 0$ en x = 0. Observe que $y_1' = \cos x, y\ y_2' = -sen\ x$.

Entonces:

$$W[y_1, y_2] = det\begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

Luego {sen x, cos x} forma un conjunto fundamental de soluciones.

b. Como la ecuación (22) es homogénea, su solución general es una combinación de {senx, cos x}:

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x. \qquad (23)$$

c. Para satisfacer la condición inicial, primero calculamos la derivada de la ecuación anterior (23):

$$y' = c_1 \cos x - c_2 \operatorname{sen} x$$

Si la condición inicial se cumple, entonces:

$$y(0) = 6 = c_2$$

$$y'(0) = 3 = c_1$$

Luego la solución particular para el problema con valor inicial es:

$$y(x) = 3 \operatorname{sen} x + 6 \cos x.$$

## 8.3.1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Veamos ahora la forma general de la solución para ecuaciones diferenciales lineales de orden n:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots .. + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (24)$$

la cual es muy similar a la ecuación de segundo grado dada en esta sección. Vimos que para ecuaciones diferenciales de primer orden, se tiene una constante arbitraria en la solución general, y para las ecuaciones de segundo orden se tienen dos. Entonces podemos esperar que hay n constantes para las ecuaciones diferenciales de orden n. La solución de (24) puede ser dividida en una solución particular y una solución homogénea, al igual que para las de segundo orden. Luego tenemos:

La solución general de (24) es siempre de la forma:

$$y(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

Donde:

1. $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación original 24.
$\{y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de n soluciones de la ecuación homogénea asociada a (24) con $g(x) = 0$. Es decir, existen n soluciones de la ecuación homogénea y ellas son linealmente independientes. Es necesaria una definición más técnica (que omitimos) de independiente, que la que hemos dado para el caso $n = 2$. También hay un Wronskiano que implica el determinante de una matriz n x n.
2. La solución general de una ecuación diferencial lineal es siempre de la forma:

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

Donde $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (24) con $g(x) = 0$.

# 8.4 Ejercicios

1. En los ejercicios 1 al 7, use el hecho de que $W \neq 0$ es equivalente a que las soluciones de una ecuación homogénea forman un conjunto fundamental de soluciones.

2. Verifique que sen x, cos x son soluciones de $y'' + y = 0$. Determinar si son un conjunto fundamental de soluciones.

3. Encuentre todas las soluciones de la forma $x^r$ para $x^2y'' - 6y = 0$ sobre el intervalo $(0,\infty)$ y determine si ellas forman un conjunto fundamental de soluciones.

4. Encuentre todas las soluciones de la forma $rx^r$ para $x^2y''- x\,y' + y = 0$ sobre $(0\,,\infty)$ y determine si ellas forman un conjunto fundamental de soluciones.

5. Encuentre todas las soluciones de la forma $r^{rx}$ para $y'' - 4y' + 4y = 0$ y determine si ellas forman un conjunto fundamental de soluciones.

   Si $y_1$ es una solución sobre $(0, \infty)$ de la ecuación diferencial:

$$x^2\,y'' + y' + x\,y = 0,\ y\,(1) = 1,\ y'\,(1) = 1$$

   y, $y_2$ la solución sobre $(0, \infty)$ de

$$x^2\,y'' + y' + x\,y = 0,\ y\,(1) = 0,\ y'\,(1) = -1$$

   a. Verifique que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para b $x^2\,y'' + y' + x\,y = 0$.
   b. Sea $y_3$ la solución de $x^2\,y'' + y' + x\,y = 0$, $y(1) = 2$, $y'\,(1) = 0$ Encuentre constantes $c_1$ y $c_2$ tales que:

$$Y_3 = c_1 y_1 + c_2\, y_2$$

6. Sea $y_1$ solución de:

$$y'' + x\,y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

y, $y_2$ la solución de:

$$y'' + x\,y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$

a. Verifique que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de:

$$y'' + x\,y' + y = 0$$

b. Sea $y_3$ una solución de:

$$y'' + x\,y' + y = 0,\ y\,(1) = 2,\ y'(1) = 0$$

Encuentre constantes $c_1$, $c_2$ tales que:

$$Y_3 = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$$

7. Sea $y_1$ una solución de:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0,\ y(x_0) = 1,\ y'(x_0) = 0$$

y, $y_2$ la solución de:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0,\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 1$$

Verifique que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones y que la solución $y_3$ de:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0,\ y(x_0) = \alpha,\ y'(x_0) = \beta$$

Es de la forma $y_3 = \alpha\, y_1 + \beta\, y_2$ (la importancia de este ejercicio es que demuestra que un conjunto fundamental siempre existe).

8. Más adelante vamos a derivar la **fórmula importante de Euler:**

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Donde i = $\sqrt{-1}$. En este ejercicio, esbozamos una derivación diferente de la formula anterior.

Consideremos la ecuación diferencial:

$$y'' + y = 0$$

a. Muestre que con x, y sen x son solución de esta ecuación.
b. Muestre que $e^{ix}$ es otra solución de dicha ecuación.
c. Determine la combinación lineal específica de cos x, y sen x que es igual a $e^{ix}$. (Ayuda: use la condición inicial que $e^{ix}$ satisface).

9. Muestre que el Wronskiano de dos soluciones de la ecuación diferencial de y $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$ es una constante.

10. Muestre que el Wronskiano de dos soluciones para $\frac{d^2y}{dx^2} + qxy = 0$, es una constante.

En los ejercicios 11 al 15, verifique que las dos funciones son soluciones de la ecuación dada, calcule el Wronskiano, y compare con el Wronskiano obtenido mediante (21).

11. Cos x y, sen x para $y'' + y = 0$

12. $e^{2x}$ y, $e^{-2x}$ para $y'' - 4y = 0$

13. $e^{x}$ y, $e^{2x}$ para $y'' - 3y' + 2y = 0$

14. x y, $x^2$ para $x^2y'' - 2x\,y' + 2y = 0$

15. $x^{-1}$ y $x^{-2}$ para $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$

16. Verifique que {sen 2x, cos 2x} forman un conjunto fundamental de soluciones para $y'' + 4y = 0$.

Verifique $y_3(x) = \operatorname{sen}(2x + \frac{\pi}{4})$ es otra solución de $y'' + 4y = 0$. Encuentre $c_1$ y $c_2$ tal que:

$$sen\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = c_1 sen2x + c_2 cos2x$$

# 8.5 Reducción del orden

En la sección anterior estudiamos la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = g(x) \qquad (25)$$

Mostramos que la solución general es de la forma:

$$y(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

Hasta este momento no se ha dado ningún método para encontrar las soluciones $y_1$, $y_2$ de la ecuación homogénea asociada, o la solución particular $y_p$. En efecto, no existe un método general para obtener $y_1$, $y_2$ y, $y_p$ para todas las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden (salvo métodos numéricos). Caso contrario al estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden, para las cuales hay una solución general que siempre se puede obtener mediante un factor integrante. Los factores integrantes no existen para el caso de las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

El **método de reducción del orden** muestra que si se tiene una solución $y_1$ de una ecuación diferencial lineal homogénea, entonces se puede obtener siempre la segunda solución $y_2$ de dicha ecuación homogénea (sin embargo, no existe un método general para obtener una solución de la ecuación homogénea en primer lugar). Vamos a discutir el método para encontrar la segunda solución, conocida la primera.

Supongamos que deseamos resolver la ecuación homogénea:

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0, \qquad (26)$$

Y que tenemos la suerte suficiente como para saber una solución $y_1$ de (26). Mostraremos cómo se hace para reducir (26) a una ecuación diferencial de primer orden. La clave es buscar soluciones de (26) de la forma:

$$y = uy_1$$

Donde u es una función desconocida en la variable x, y, $y_1$ es nuestra función solución de la ecuación homogénea (26) conocida. Sustituyendo $y = uy_1$ en (26) para y, obteniendo:

$$(uy_1)'' + P(x)\,(uy_1)' + Q(x)\,(uy_1) = 0$$

Usando la derivada de un producto y teniendo en cuenta que $(uy_1)''$ es la derivada de $(uy_1)'$, entonces:

$$(u''y_1 + 2y_1'u' + uy_1'') + P(x)\,(u'y_1 + uy_1') + Q(x)\,uy_1 = 0$$

Agrupando de acuerdo a las derivadas de u:

$$y_1u'' + (2y_2' + P(x)y_1)u' + \left(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\right)u = 0$$

Pero como $y_1$ es una solución de la ecuación, entonces $y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$. Por lo tanto, la ecuación anterior en términos de u queda:

$$y_1u'' + (2y_2' + P(x)y_1)u' = 0 \qquad (27)$$

Ahora como $y_1$ y $2y_2' + P(x)\,y_1$ son funciones conocidas de x, haciendo:

$$w = u' \qquad (28)$$

en la ecuación (27), se tiene la ecuación diferencial lineal homogénea en w:

$$y_1w' + (2y_1' + P(x)y_1)w = 0$$

Y esta es una ecuación diferencial lineal de primer grado en w, y se puede resolver mediante separación de variables o por factor integrante. Entonces de la sustitución dada en (28), podemos integrar w para obtener u. Luego $uy_1$ nos da la segunda solución para nuestro conjunto fundamental de soluciones. Esto es[2]:

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx$$

En lugar de continuar con el caso general, vamos ahora a ilustrar el método de reducción de orden mediante algunos ejemplos. Este método funciona si el coeficiente principal de la ecuación (25), es decir el que acompaña a la segunda derivada, es 1.

## Ejemplo 3. Reducción del orden:

Verifique que $y_1 = x$ es una solución de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 3y = 0, \qquad x > 0 \qquad (29)$$

Usando el método de reducción del orden encuentre la segunda solución y de la solución general.

### Solución:

Como $y_1 = x$, entonces se tiene que:

$$\frac{dy_1}{dx} = 1,\ \text{y},\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = 0$$

Luego:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 3y = 3x - 3x = 0$$

2 El método de reducción del orden para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden es atribuida al matemático Francés Jean Le Rond d'Alember (1717-1783).

Es decir, que $y_1 = x$ es una solución. Sea:

$$y = u.y_1 = u.\,x$$

Sustituyendo y en (29), se tiene que:

$$x^2(ux)^{//} + 3x(ux)^{/} - 3(ux) = 0$$

Derivando al usar la regla del producto, se tiene:

$$x^2\left(u^{//}x + 2u^{/}\right) + 3x\left(u^{/}x + u\right) - 3ux = 0$$

Reagrupando los términos, vemos que los términos se cancelan, y obtenemos:

$$x^3u^{//} + 5x^2u^{/} = 0$$

Haciendo $w = u^{/}$, y dividiendo por $x^3$ tenemos:

$$\frac{dw}{dx} + \frac{5}{x}w = 0$$

Esta es una ecuación lineal homogénea de primer grado. Ella se puede resolver por separación de variables o por el factor integrante. Si procedemos por separación de variables, se tiene:

$$\int \frac{dw}{dx} = -\int \frac{5}{x}dx$$

Al integrar (asumiendo que x> o) tenemos:

$$ln|w| = -5lnx + c_0$$

Resolviendo para w, se obtiene:

$$w = c_1x^{-5}$$

Pero como $w = u^{/}$, entonces:

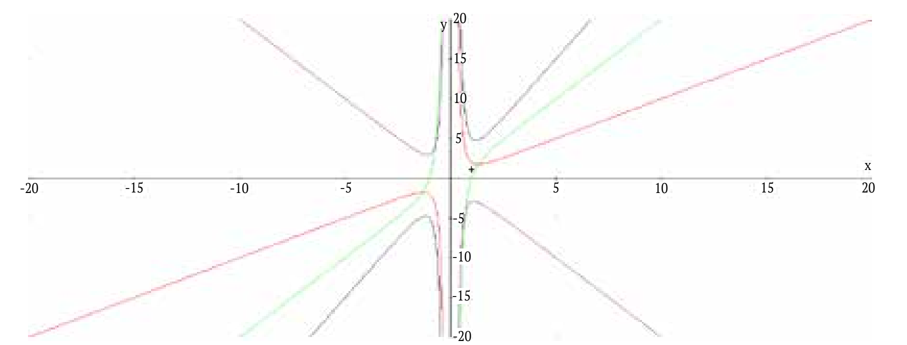
$$u^{/} = c_1x^{-5}$$

Integrando para encontrar u, tenemos:

$$u = \frac{c_1}{-4}x^{-4} + c_2 = ax^{-4} + c_2$$

Finalmente, como $x = wy_1 = u\ x = ax^{-3} + c_2\ x$. Esta es la solución general. La segunda solución previamente desconocida es $t^{-3}$. Cuando se aplica correctamente, la reducción de orden siempre nos dará la solución general, que es una combinación lineal de las dos soluciones. La figura 3 nos muestra algunas soluciones para diferentes valores de $C_1$ y $C_2$.

**Figura 3.** Gráfica de algunas soluciones para varios valores de las constantes.




**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 4. Solución con integral definida:

Verifique que $y_1 = x$ es una solución de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' - x\,y' + y = 0$$

Encuentre la segunda solución, y dé la solución general.

### Solución:

Como $y_1 = x$, entonces se tiene que:

$$\frac{dy_1}{dx} = 1,\ y,\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = 0$$

Luego se tiene: $-x + x = 0$.

Sea ahora $y = u.y_1 = u\,x$, sustituyendo en la ecuación dada, se tiene:

$$(uy_1)'' - x\,(uy_1) + uy_1 = 0$$

calculando la derivada, al usar la regla del producto.

$$(u''x + 2\,u') - x\,(u' + u) + u\,x = 0$$

De nuevo los términos en u se cancelan, como se puede demostrar que sucede en general, para dar:

$$x.\,u'' + (2 - x^2)\,u' = 0$$

Sea $w = u'$ y dividiendo por x para obtener la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dw}{dx} + \left(\frac{2}{x} - x\right)w = 0$$

La cual se puede resolver por separación de variables o por factor integrante. Usando el método del factor integrante, tenemos:

$$W = c_1 e^{-\int\left(\frac{2}{x}-x\right)dx} = c_1 e^{-2\ln x + \frac{1}{2}x^2} = c_1 x^{-2} e^{\frac{x^2}{2}}$$

Como $w = u'$, entonces:

$$u' = c_1 x^{-2} e^{\frac{x^2}{2}}$$

Para calcular la antiderivada se requiere de una integral indefinida para encontrar u:

$$u = c_1 \int_1^x x^{-2} e^{\frac{x^2}{2}} dx + c_2$$

Finalmente tenemos:

$$Y = u\,y_1 = u\,x = c_1 x \int_1^x x^{-2} e^{\frac{x^2}{2}} dx + c_2 x$$

Esta es la solución general. Es una combinación lineal de las dos soluciones de la ecuación diferencial homogénea dada. El método de reducción de orden se ha utilizado para obtener la segunda solución:

$$y_2 = x\int_1^x x^{-2} e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$$

## Ejemplo 5:

Encuentre una solución de $y'' - 2y' + y = 0$ de la forma $e^{rx}$

Use la solución de la parte a para encontrar un conjunto fundamental de soluciones para $y'' - 2y' + y = 0$, usando reducción del orden.

### Solución:

Sea $y = e^{rx}$ y sustituimos en:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Para obtener:

$$r^2e^{rx} - 2re^{rx} + e^{rx} = 0$$

O:

$$r^2 - 2r + 1$$

Luego:

$(r-1)^2=0$, es decir que $r = 1$, luego $e^x$ es una solución de la ecuación diferencial dada.

Tenemos una solución $y_1 = e^x$ de la ecuación dada. Usaremos el método de la reducción del orden para encontrar la segunda solución. Sea $y = uy_1 = u\,e^x$. Se tiene entonces que:

$$(ue^x)^{//} - 2(ue^x)^{/} + y = 0$$

Usando la derivada del producto, se tiene:

$$(u^{//}e^x + 2u^{/}e^x + ue^x) - 2(u^{/}e^x + ue^x) + u = 0$$

Los términos en u se cancelan, tal como se ha visto en los ejemplos anteriores. Pero además en este ejemplo (aunque no en todos los casos), los términos $u^7$ también se cancelan, luego se tiene que:

$u^{//}e^x = 0,$ luego $u^{//} = 0$

Calculando la antiderivada dos veces, tenemos:

$$u^{/} = c_1$$

$$u = c_1\, x + cc$$

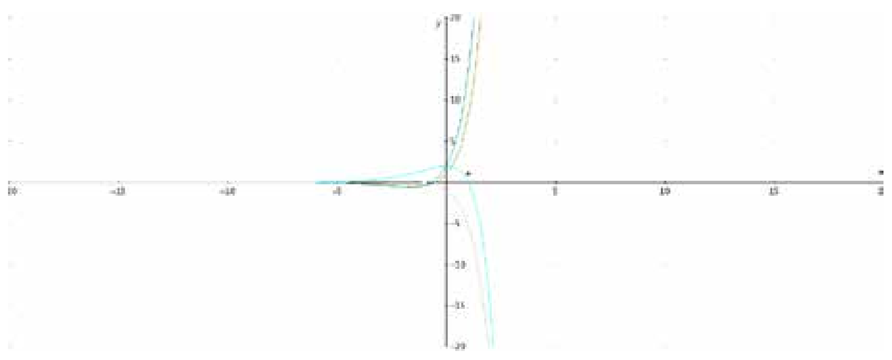
Entonces:

$$Y = u\ y_1 = (c_1 x + c_2)\ e^x = c_1 x e^x + c_2\ e^x$$

Esta es la solución general de la ecuación dada. Un conjunto fundamental de soluciones puede ser {$e^x$, x $e^x$}.

La figura 4 muestra algunas soluciones para algunos valores de $C_1$ y $C_2$

**Figura 4.** Gráfica de un conjunto de soluciones de la ecuación diferencial del ejercicio anterior.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Resumen del método de la reducción del orden

El método de la reducción del orden puede ser usado para encontrar un conjunto fundamental de dos soluciones de una ecuación homogénea $y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$, dada una solución de la ecuación $y_1$, de la siguiente forma:

1. Sea $y = u\, y_1$ y sustituimos en $y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$.
2. Esto conduce a una ecuación de segundo orden lineal en u con solo términos en $u''$ y $u'$. Se hace $w = u$ para obtener una ecuación diferencial lineal de primer orden en w.
3. Se encuentra una solución diferente de cero para w, mediante separación de variables o el método del factor integrante.
4. Sea u la antiderivada de w.
5. Sea $y_2 = u\, y_1$. Entonces $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para $y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$.

# 8.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 8, verifique que la función dada $y_1$ es una solución de la ecuación diferencial homogénea dada. Luego use el método de reducción del orden para encontrar el conjunto fundamental de soluciones y la solución general para la ecuación diferencial. Los ejercicios 7 y 8 requieren integrales definidas.

1. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $y_1 = x^{-1}$

2. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$, $y_1 = x^{-1}$

3. $y'' + 10y' + 25y = 0$, $y_1 = e^{-5x}$

4. $x\,y'' - (1 + x)\,y' + y = 0$, $y_1 = e^{x-}$

5. $x\,y'' + (x - 1)\,y' - y = 0$, $y_1 = x^{-x}$

6. $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y_1 = x^{-3x}$

7. $y'' + x\,y' - y = 0$, $y_1 = x$

8. $x^2y'' + x\,y' - 2(1+x)\,y = 0$, $y_1 = x^2$

En los ejercicios 9 al 12, encuentre una solución $y_1$ de la ecuación diferencial dada de la forma $x^r$ para alguna constante r. Luego encuentre una segunda solución por reducción de orden.

9. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

10. $x^2y'' + 5xy' + 4x = 0$

11. $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0$

12. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$

13. Encuentre una solución de $y'' + 4y = 0$ de la forma sen (r x) para alguna constante r. Luego encuentre la solución general de $y'' + 4y = 0$ por reducción del orden.

14. Encuentre una solución de $y'' + 16y = 0$ de la forma sen (r x) para alguna constante r. Luego encuentre la solución general de $y'' + 16y = 0$ por reducción del orden.

En los ejercicios 15 al 19, encuentre la solución $y_1$ de la ecuación diferencial dada en la forma $x^{rx}$ para alguna constante r. Luego encuentre una segunda solución y la solución general por reducción del orden.

15. $y'' - 4y' + 4y = 0$

16. $y'' - 6y' + 9y = 0$

17. $y'' + 2y' + y = 0$

18. $y'' - 5y' + 6y = 0$

19. $y'' - 4y = 0$

20. Verifique que $y_1(x) = x$ es una solución de **(Ecuación de Legendre de orden uno)** $(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + 2y = 0$ sobre el intervalo ( -1, 1). Encuentre la solución general sobre el intervalo (-1, 1). Nota: las integrales son un poco más difíciles, pero se pueden trabajar usando las técnicas vistas.

21. Usando el método de reducción del orden, encontrar la fórmula general para la solución de segundo orden $y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$, si $y_1$ es una solución conocida.

# 8.7 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas con coeficientes constantes

Las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes forman una clase de ecuaciones que aparecen tanto en modelos físicos como en aproximaciones de ecuaciones diferenciales más complicadas. Aplicaciones a circuitos eléctricos y sistemas mecánicos que usan este tipo de ecuaciones diferenciales, serán dadas en secciones más adelante.

En esta sección consideramos las ecuaciones lineales de segundo orden homogéneas, con **coeficientes constantes**, de la forma:

$$ay'' + by' + c\,y = 0$$

Donde los coeficientes a, b y c son números reales constantes y $a \neq 0$. De las secciones anteriores sabemos que la solución general de $ay'' + by' + c\,y = 0$, puede ser dada en la forma:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Donde $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para $ay'' + by' + c\,y = 0$.

Recordemos que la ecuación diferencial lineal de primer orden homogéneo con coeficientes constantes de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + ky = 0$$

Su solución por el método de variables separables está dada por $y = e^{rx}$.

Este hecho también se va a aplicar a las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden y de orden superior con coeficientes constantes.

La clave para encontrar dos soluciones de las ecuaciones homogéneas lineales $\{y_1, y_2\}$, es suponer que una de las soluciones es de la forma $y_1 = e^{rx}$, donde r es una constante. Sustituyendo $y = e^{rx}$ en la ecuación $ay'' + b\,y' + c\,y = 0$, nos da:

$$a\,(e^{rx})'' + b\,(e^{rx})' + c\,e^{ex} = 0$$

Y derivando, se tiene:

$$ar^2e^{rx} + b\,r\,e^{rx} + c\,r^{rx} = 0$$

Factorizando $e^{rx}$, y dividiendo por dicha expresión, que es diferente de cero, se obtiene:

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0$$

La ecuación $ar^2 + b\,r + c = 0$ es la **ecuación característica** de:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

El polinomio $ar^2 + b\,r + c = 0$ es llamado el **polinomio característico** de:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

Todos los pasos anteriores se pueden reversar, y por esto se tiene que:

Si r satisface la ecuación característica $ar^2 + b\,r + c = 0$, entonces $e^{rx}$ es una solución de $ay'' + b\,y' + c\,y = 0$.

Recordemos que todo polinomio de segundo orden tiene dos raíces. Para $ar^2 + b\,r + c = 0$, las raíces están dadas por $r = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Hay tres casos, dependiendo de si $b^2 - 4ac > 0, b^2 - 4a = 0,\ b^2 - 4ac < 0$.

## Caso 1. Ecuación característica con dos raíces reales y distintas ($b^2 — 4ac > 0$)

Supongamos que la ecuación característica $ar^2 + b\,r + c = 0$ tiene dos raíces reales distintas $r_1$, $r_2$. Entonces por la conclusión anterior se tiene que $e^{r1x}$y, $e^{r2x}$[3] son dos soluciones de $ay^{//} + b\,y^{/} + c\,y = 0$. Estas soluciones[3] forman un conjunto fundamental de soluciones, es decir w $(e^{r_1x}, e^{r_2x}) \neq 0$ Entonces:

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_1x}$$

Donde $c_1$ y $c_2$ son constantes arbitrarias determinan la solución general de $ay^{//} + b\,y^{/} + c\,y = 0$.

## Ejemplo 6. Raíces reales distintas:

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes:

$$y^{//} - y^{/} -20\,y = 0$$

## Solución:

Sustituyendo $y = e^{rx}$, en la ecuación diferencial, obtenemos la ecuación característica $r^2 – r – 20 = 0$. Factorizando esta expresión obtenemos:

$$r^2 – r – 20 = (r — 5)(r + 4) = 0$$

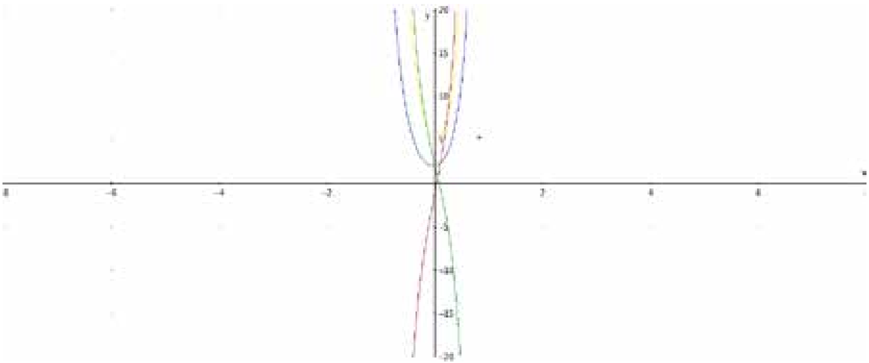
Luego existen dos raíces reales distintas $r_1 = 5$, $r_2 = -4$. Entonces $e^{5x}$, y $e^{-4x}$ son funciones solución y la solución general es:

3 Las soluciones exponenciales inicialmente las quiso resolver Leonhard Euler (1707-1783), uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, además de los más prolíferos a todas las ramas de la matemática.

$$y = c_1e^{5x} + c_2e^{-4x},$$

Donde $c_1$ y $c_2$ son constantes arbitrarias. La figura 5 nos muestra algunas curvas para diferentes valores de $C_1$ y $C_2$.

**Figura 5.** Gráfica de algunas curvas solución de las soluciones de la ecuación diferencial dada.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 7. Raíces reales distintas:

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes:

$$y^{//} + 4\,y^{/} = 0$$

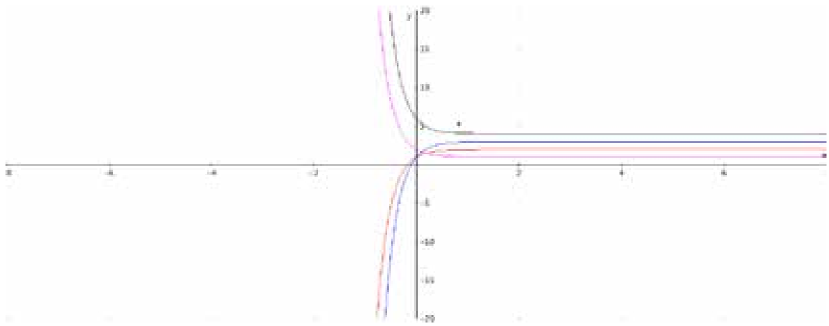
### Solución:

Por sustitución $y = e^{rx}$ encontramos que la ecuación característica es $r^2+4r = r(r + 4) = 0$. Luego hay dos soluciones reales distintas $r = 0$, $r = -4$. Un conjunto fundamental de soluciones de esta ecuación será $\{1, e^{-4x}\}$ ya que $e^{0.x} = 1$. La solución general es:

$$y = c_1.1 + c_2e^{-4xs} = c_1 + c_2e^{-4x}$$

Donde $c_1$ y $c_2$ son constantes arbitrarias.

**Figura 6.** Curvas solución para la ecuación diferencial dada.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Caso 2. Ecuación característica que tiene una sola raíz de multiplicidad dos ($b^2 - 4ac = 0$).

En este caso se tiene que la ecuación característica solo tiene una raíz repetida $r_1$. Luego solamente se tiene una sola solución de la ecuación diferencial $y_1 = e^{r1x}$. La segunda solución se puede encontrar por el método de reducción del orden, tal como se vio en la unidad anterior. Daremos un ejemplo para ilustrar este caso y motivar el caso general. Sin embargo, mostraremos que el método de reducción siempre produce el mismo tipo para la segunda solución, de modo que no será necesario llevar a cabo la reducción cada vez que se resuelve una ecuación diferencial.

## Ejemplo 8. Reducción del orden:

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes:

$$y'' - 6\,y' + 9y = 0$$

### Solución:

Sustituyendo $y = e^{rx}$ en $y'' - 6\,y' + 9y = 0$, encontramos que la ecuación característica es $r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$. Luego $r = 3$ es una raíz de multiplicidad 2. Por lo tanto, una solución es $e^{3t}$. Para encontrar la segunda solución, usamos el método de reducción del orden. Sea $y = ue^{3x}$ y sustituimos en la ecuación diferencial para obtener:

$$(ue^{3x})'' - 6(ue^{3x})' + 9(ue^{3x}) = 0$$

O, derivando, se tiene:

$$(u''e^{3x} + 6u'e^{3x} + 9ue^{3x}) - 6(u'e^{3x} + 3ue^{3x}) + 9ue^{3x} = 0$$

Observe que los términos en u se cancelan, tal como sucedió en la sección anterior de reducción del orden. Los términos en $u'$ también se cancelan, para obtener:

$$u''e^{3x} = 0 \text{ o, } u'' = 0$$

Calculando la antiderivada dos veces, tenemos:

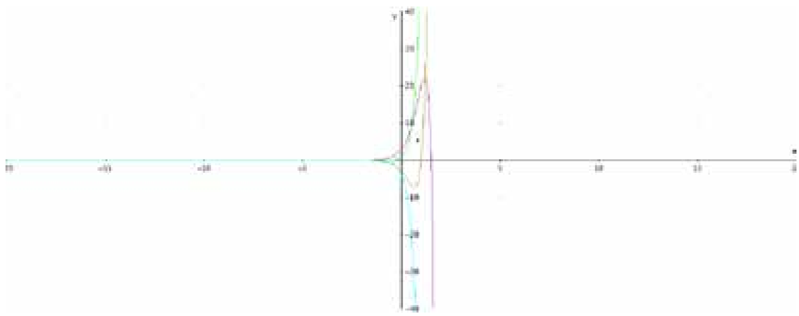
$$u = c_1 x + c_2$$

Luego la solución general es:

$$y = ue^{3x} = c_1 xe^{3x} + c_2 e^{3x}$$

La figura 7 nos muestra algunas curvas para valores arbitrarios de $C_1$ y $C_2$.

**Figura 7.** Gráficas de algunas curvas solución.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

Observe que $e^{3x}$ es una solución y que la segunda solución es $xe^{3x}$. De este resultado podemos generalizar, en la siguiente forma:

### Resumen de raíces repetidas

Cuando $y_1 = e^{r_1 x}$ es una solución de $ay'' + by' + c\,y = 0$, que corresponde a una raíz repetida, una segunda solución es siempre de la forma:

$$y_2 = x\,e^{r_1 x} \qquad (30)$$

En el siguiente ejemplo no se usará el método de reducción, sino que directamente aplicamos el resultado anterior.

## Ejemplo 9. Raíces repetidas:

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$.

### Solución:

Sustituyendo por $y = r^{rx}$, encontramos que la ecuación característica es: $r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$. Luego $r = -1$ es una raíz de multiplicidad dos. Una solución de la ecuación homogénea es entonces $y_1 = e^{-x}$. Como la raíz es repetida, la segunda solución de acuerdo al resultado anterior es $x\,e^{-x}$. Luego la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

Donde $c_1$ y $c_2$ son constantes arbitrarias.

## Ejemplo 10. Raíces repetidas para ecuaciones homogéneas de orden superior:

Encontrar la solución general de:

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y^{(2)} = 0$$

Donde $y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$

## Solución:

La ecuación característica es:

$$r^5 - 3r^4 + 3r^3 - r^2 = r^2(r^3 - 3r^2 + 3r - 1) = r^2(r-1)^3 = 0$$

Luego hay dos raíces reales distintas r = 0, 1, de multiplicidad 2 y 3 respectivamente. Usando nuestro resultado (30), la raíz 0 de multiplicidad 2, significa que:

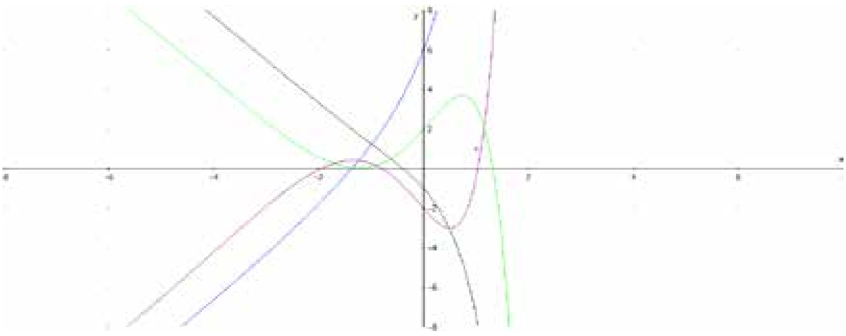
$$\{e^{0.x}, xe^{0.x}\} = \{1, x\}$$

Es el conjunto fundamental de soluciones. La raíz r = 1 de multiplicidad 3 significa que el conjunto $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ es el conjunto fundamental de soluciones. La solución general estará dada por:

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4\,x\,e^x + c_5\,x^2\,e^x$$

Donde $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, y $c_5$ son constantes arbitrarias. La figura 8 nos muestra algunas gráficas solución para valores arbitrarios de las constantes.

**Figura 8.** Gráfica de la ecuación de la solución de la ecuación diferencial.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Caso 3. Ecuación característica tiene dos raíces conjugadas ($b^2 — 4ac < 0$)

Como la ecuación diferencial:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \qquad (31)$$

tiene coeficientes constantes, las soluciones existen en la forma $e^{rx}$ si r satisface la ecuación característica:

$$ar^2 + b\,r + c = 0$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces las raíces son números complejos. Supongamos que:

$$r_1 = \alpha + i\beta \ (i^2 = -1)$$

Donde $\alpha$ y $\beta$ son números reales, es una raíz compleja de (31) y la ecuación es de orden dos, entonces la segunda raíz $r_2$ tiene que ser la conjugada de $r_1$. Es decir que:

$$r_2 = \alpha — i\beta$$

La solución general de (31) se puede representar por la combinación lineal de estas dos exponenciales complejas:

$$y = \bar{a}e^{r_1 x} + \bar{b}e^{r_2 x} \qquad (32)$$

Sin embargo esta no es una solución muy útil para algunos problemas de la física, ya que $e^{r_1 x}$, como $e^{r_2 x}$ involucran números complejos. Podemos reemplazar $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$ por un conjunto fundamental de soluciones diferentes. Las constantes en (32) son denotadas por $\bar{a}$ y $\bar{b}$ para distinguirlas de $c_1$ y $c_2$, usadas en las otras soluciones.

Las exponenciales complejas satisfacen las propiedades algebraicas usuales de las exponenciales. $e^{rx_1} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}$. Luego la solución general (32) se puede escribir:

$$y = \bar{a}e^{\alpha x}e^{i\beta x} + \bar{b}e^{\alpha x}e^{-i\beta x}$$

O:

$$y = e^{\alpha x}(\bar{a}e^{i\beta x} + \bar{b}e^{-i\beta x}) \qquad (33)$$

Esta solución sigue siendo no real. Sin embargo, por la fórmula de Euler:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\ sen\ \beta x$$

Se puede mostrar que una combinación lineal de $e^{\pm i\beta x}$ es equivalente a una combinación lineal arbitraria de $cos(\beta x)$ y $sen(\beta x)$. Luego (33) se puede escribir como $y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2 sen\ \beta x)$. En resumen:

> En el caso de raíces complejas, $\alpha \pm i\beta$ la solución general de a y// + b y/ + c y = 0, está dada por:
>
> $$y = = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2 sen\ \beta x) = = e^{\alpha x}c_1\cos\beta x + c_2\ e^{\alpha x} sen\ \beta x$$

Para entender este resultado se requiere un mejor trabajo sobre los números complejos.

## Formula de EULER

La relación entre la exponencial compleja y seno y coseno se sigue de la fórmula de Euler[4]:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta \qquad (34)$$

Una importante relación adicional se obtiene de reemplazar $\theta$ por - $\theta$ en la ecuación anterior y usando el hecho de que el coseno es una función par y el seno impar, se obtiene:

$$e^{-i\theta} = cos\theta - isen\theta \qquad (35)$$

4 Recordemos que la fórmula de Euler se derivó de los desarrollos de las series de Taylor de cada una de las funciones que intervienen.

Para explicar la fórmula de Euler, asumimos la serie de Taylor para la función exponencial real, es decir:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (36)$$

Es válida también para la función exponencial compleja. Es decir, podemos reemplazar a x por i$\theta$ en (36) para obtener:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

Asociando la parte real y la parte imaginaria, tenemos:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots ..\right)$$

La fórmula de Euler se sigue de las series de Taylor para cos $\theta$ y sen $\theta$:

$$\text{Cos}\,\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

$$\text{Sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots ..$$

Para la aplicación en las ecuaciones diferenciales $\theta = \beta x$

Tenemos de la ecuación (33) que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = e^{\alpha x}(\bar{a}e^{i\beta x} + \bar{b}e^{-i\beta x})$$

La combinación lineal de exponenciales complejas, que aparece en esta ecuación pueden ser relacionadas con cos $\beta x$ y, sen $\beta x$, usando las fórmulas de Euler, como sigue:

$$\bar{a}e^{i\beta x} + \bar{b}e^{-i\beta x} = \bar{a}(\cos\beta x + i sen\,\beta x) + \bar{b}(\cos\beta x - i sen\,\beta x)$$

Agrupando los términos en cos $\beta x$ y, sen $\beta x$, obtenemos:

$$\bar{a}e^{i\beta x} + \bar{b}e^{-i\beta x} = c_1 cos\beta + c_2 sen\beta x \qquad (37)$$

Donde:

$$c_1 = \bar{a} + \bar{b},\ y\ c_2 = i(\bar{a} - \bar{b})$$

La ecuación (37) muestra que:

Una combinación arbitraria de $e^{i\beta x}$ $y, e^{-i\beta x}$:

$$\bar{a}e^{i\beta x} + \bar{b}e^{-i\beta x}$$

es equivalente a una combinación arbitraria de la forma de $\cos\beta x$ $y, sen\ \beta x$:

$$c_1 cos\beta x + c_2 sen\beta x$$

Una forma alternativa de obtener esto mismo es usando las fórmulas (34) y (35) y la adición y sustracción de la siguiente manera:

$$\text{Cos}\ \theta = \frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{-i\theta}$$

$$(38)$$

$$\text{Sen}\ \theta = \frac{1}{2i}e^{i\theta} - \frac{1}{2i}e^{-i\theta}$$

Por ejemplo, cos $\theta$ está dado como una combinación lineal de $e^{i\theta}$ y $e^{-i\theta}$. Si hacemos $\theta = \beta x$, en (38) y multiplicamos por $e^{ax}$, obtenemos:

$$e^{\alpha x} cos\beta x = e^{\alpha x}\left(\frac{1}{2}e^{i\beta x} + \frac{1}{2}e^{-i\beta x}\right)$$

$$(39)$$

$$e^{\alpha x} sen\beta x = e^{\alpha x}\left(\frac{1}{2i}e^{i\beta x} - \frac{1}{2i}e^{-i\beta x}\right)$$

Como el lado derecho de las ecuaciones (39) son combinaciones lineales de las soluciones homogéneas, entonces $e^{\alpha x} cos\beta x$ y $e^{\alpha x} sen\beta x$, son también soluciones de a $y^{//}$ + b $y^{/}$ + c y = 0.

## Ejemplo 11. Raíces complejas:

Encuentre la solución general de:

$$y^{//} + y^{/} + y = 0$$

## Solución:

Sustituyendo y = $e^{rx}$, vemos que la ecuación característica es $r^2 + r + 1 = 0$. Por la fórmula cuadrática, las raíces son:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $e^{\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} = e^{-\frac{1}{2}x} e^{\pm i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}$, tenemos:

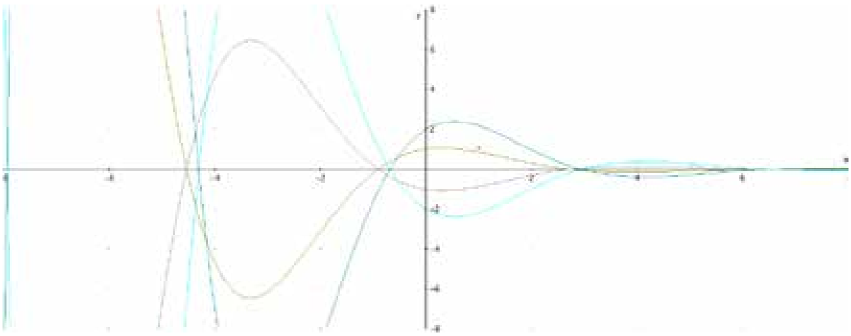
$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Es la solución general de $y^{//} + y^{/} + y = 0$.

Tenga en cuenta que la raíz $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ no da la solución $e^{-\frac{1}{2}x} cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. Más bien, el par de solución $e^{-\frac{1}{2}x} cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{-\frac{1}{2}x} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ proviene del par de raíces:

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Figura 9.** Gráfica de algunas soluciones de la ecuación diferencial.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 12. Raíces imaginarias puras:

Encontrar la solución general de $y'' + 4y = 0$.

### Solución:

Sustituyendo a $y = e^{rx}$, vemos que la ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$, luego las raíces son $r = \alpha \pm i\beta = \pm 2i$. Luego $\alpha = 0$, $\beta = 2$, y el conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{e^{0.x}cos2x = cos2x, e^{0.x}sen2x = sen2x\}$$

La solución general es:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x.$$

Para terminar, podemos resumir todo lo visto en esta sección de la siguiente forma:

**Solución de $ay'' + by' + cy = 0$ con a, b, c constantes reales**

Primero se encuentran las raíces $r_1$ y $r_2$ de la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$.

Se tienen tres casos:

1. Si $r_1$, $r_2$ son raíces distintas y reales, entonces la solución general es de la forma:

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

2. Si $r_1 = r_2$ es una raíz repetida o de multiplicidad dos, la solución general es:

$$y = c_1e^{r_1x} + c_{2x}e^{r_1x}$$

3. Si $r_1$, $r_2$ son raíces complejas, ellas son un par conjugado:

$$r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$$

La solución general es:

$$y = c_1e^{\alpha x}cos\beta x + c_2e^{\alpha x}sen\beta x$$

## Ejemplo 13. Obtener una ecuación diferencial a partir de una solución:

Encontrar una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes que tiene como solución general $c_1e^{-3x} + c_{2x}e^{-2x}$.

### Solución:

$c_1e^{-3x} + c_{2x}e^{-2x}$, es una solución general si r = -3 y, r = -2 son las raíces de la ecuación cuadrática. En este caso la ecuación característica tiene que ser de la forma:

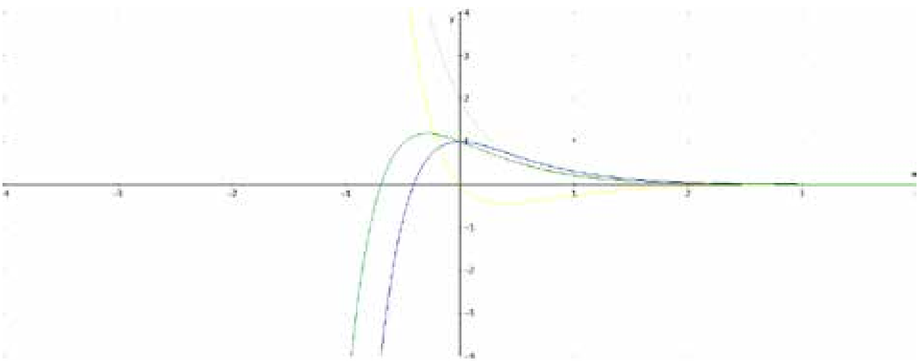
$$[r-(-3)][r-(-2)] = (r+3)(r+2) = r^2 + 5r + 6$$

Esta ecuación corresponde a la ecuación diferencial:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Observe que $2y'' + 10y' + 12y = 0$ puede ser otra respuesta correcta, ya que las raíces del polinomio característico difieren en una constante con el polinomio anterior.

**Figura 10.** Gráfica de algunas soluciones de la ecuación diferencial dada.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## 8.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 33, resuelva la ecuación diferencial. Determine la solución general si no se dan las condiciones iniciales.

1. $y'' + y' - 6y = 0$
2. $y'' - y = 0$
3. $y'' + y = 0$
4. $y'' + 4y' + 4y = 0$
5. $y'' + 4y' + 5y = 0$
6. $y'' - 2y' + y = 0$
7. $y'' - 3y' + y = 0$
8. $2y'' + 2y' + y = 0$
9. $y'' - y' = 0$
10. $4y'' + 8y' + 3y = 0$
11. $3y'' = 0$
12. $y'' - 2y' + 2y = 0$
13. $3y'' + 2y' - y = 0$
14. $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

15. $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

16. $2y'' + 12y' + 18y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

17. $2y'' + 4y = 0$

18. $3y'' - 24y' + 45y = 0$

19. $2y'' + 8y' + 25y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

20. $y'' - 16y = 0$

21. $y'' + 10y' + 25y = 0$

22. $2y'' + 3y' = 0$

23. $y'' - 14y' + 49y = 0$

24. $y'' + 4y' + 20y = 0$

25. $y'' - 6y' + 25y = 0$

26. $y'' + y' + y = 0$

27. $y'' - 12y = 0$

28. $y'' + 2y' + 8y = 0$

29. $y'' + 4y' + 8y = 0$

30. $y'' + 10y = 0$.

31. $y'' + 8y = 0$

32. $y'' + 6y' + 7y = 0$

33. Suponga que r es un número real. Verifique que $e^{rx}$, $xe^{rx}$ forman un conjunto fundamental de soluciones.

34. Suponga que $\alpha, \beta$ son números reales y $\beta \neq 0$. Verifique que $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} sen\beta x$, forman un conjunto fundamental de soluciones.

35. Suponga que $r_1 \neq r_2$. Verifique que $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$ forman un conjunto fundamental de soluciones.

36. Muestre que si $ar^2 + br + c = 0$, tiene la raíz repetida $r_1$, entonces $ar^2 + br + c = a(r - r_1)^2$.

37. Usando el método de reducción del orden y el ejercicio 37, muestre que si $r_1$ es una raíz repetida de $ar^2 + br + c = 0$ entonces $xe^{r_1 x}$, es una solución de $ay'' + by' + cy = 0$.

38. De las soluciones de los ejercicios 1 al 33, encuentre un ejemplo en el cual aparecen raíces repetidas y encuentre la segunda solución por el método de reducción del orden.

En los ejercicios 39 al 49, determine una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, que tenga como solución las expresiones dadas.

39. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$

40. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

41. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

42. $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{-4x}$

43. $y = c_1 + c_2 e^{-5x}$

44. $y = c_1 sen\ 4x + c_2 \cos 4x$

45. $y = c_1 e^{-x} sen\ 2x + c_2 e^{-x} \cos 2x$

46. $y = c_1 e^{2x} sen\ 3x + c_2 e^{2x} \cos 3x$

47. $y = c_1 e^{2x} sen\ 3x + c_2 e^{2x} \cos 3x.$

48. $y = c_1 + c_2 x$

49. $y = c_1 sen\ 2x + c_2 \cos 2x$

# 8.9 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes

Con unos pequeños cambios, podemos usar las ideas previas para resolver ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden n de la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (40)$$

Donde $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}$. El procedimiento para la solución de la ecuación (40) se resume en el siguiente algoritmo:

### Procedimiento para resolver la ecuación diferencial $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$, cuando $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son constantes

1. De la ecuación característica $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$ se determinan sus raíces y sus multiplicidades. La ecuación característica se puede encontrar por sustitución de $y = e^{rx}$.
2. Un conjunto fundamental de soluciones de (40) está determinado como sigue:

a. Si $r = r_1$ es una raíz de multiplicidad m, entonces las m funciones:

$$\{e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \ldots, x^{m-1} e^{r_1 x}\} \qquad (41)$$

son el conjunto fundamental de soluciones.

b. Si $r = \alpha \pm \beta i$, es un par de números complejos conjugados de raíces y cada uno de ellos tiene multiplicidad m, entonces se tienen 2m funciones:

$$\{e^{\alpha x}cos\beta x, e^{\alpha x}sen\beta x, xe^{\alpha x}cos\beta x, xe^{\alpha x}sen\beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x}cos\beta x, x^{m-1}e^{\alpha x}sen\beta x\}$$

En el conjunto fundamental de funciones. Si $\alpha + \beta i$ es una raíz de multiplicidad m.

Entonces $\alpha - \beta i$ tiene que ser una raíz de multiplicidad m, ya que $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ son constantes.

## Ejemplo 14. Raíces imaginarias repetidas:

Encontrar la solución general de $y^{(4)} + 2y^{//} + y = 0$.

### Solución:

La ecuación característica es $r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = 0$, que se puede encontrar por la sustitución $y = e^{rx}$. Luego $r = \pm i$ son raíces complejas conjugadas de multiplicidad 2. En la notación de la forma $\alpha + i\beta$ se tiene:

$$I=0+1.i, \text{ luego } \alpha = 0 \text{ y } \beta = 1$$

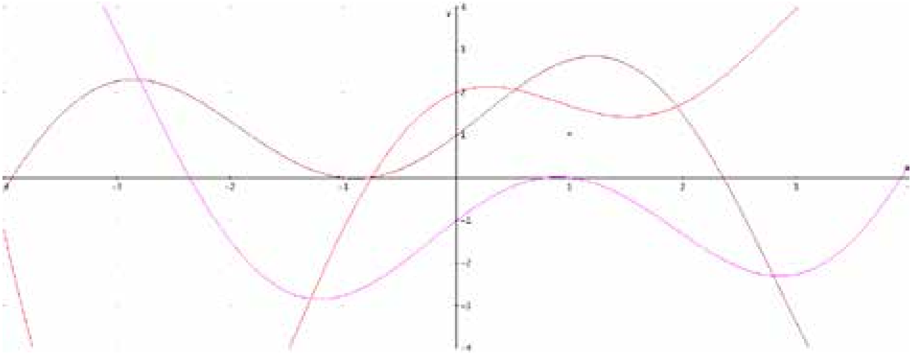
Dos soluciones son: cos x, sen x correspondientes a las raíces r = $\pm i$, como las raíces complejas tienen multiplicidad 2, dos soluciones linealmente independientes son x sen x, x cos x. Entonces un conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{\cos x, sen\ s, x\ sen\ x, x\cos x\}$$

Por lo tanto, la solución general:

$$y = c_1 \cos x + c_2 sen\ x + c_3 xsen\ x + c_4 x\cos x$$

**Figura 11.** Algunas gráficas solución de la ecuación diferencial dada.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 15. Raíces repetidas:

Encuentre la solución de la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes, si las raíces de la ecuación características son conocidas como $r = 7 \pm 3i$, de multiplicidad dos, $r = \pm 4i$, y $r = 5$.

### Solución:

Como se tienen 7 raíces, la solución general es una combinación lineal de 7 soluciones homogéneas usando siete constantes arbitrarias:

$$y = c_1 e^{7x} sen\,3x + c_2 e^{7x} cos\,3x + c_3 x e^{7x} sen\,3x + c_4 x e^{7x} cos\,3x + c_5 sen\,4x + c_6 cos\,4 + c_7 e^{5x}$$

# 8.10 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 23, encuentre la solución general. Aquí $y^{(n)}$ denota la derivada n – éssima de y.

1. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
2. $y''' + 5y'' - 4y = 0$
3. $y''' - 5y'' + 4y = 0$
4. $Y^{(IV)} + 8y'' + 16y = 0$
5. $y''' + y'' - 2y = 0$
6. $Y^{(4)} - 2y''' = 0$
7. $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$
8. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$
9. $y' - 3y = 0$
10. $y' + 4y = 0$
11. $y''' + y'' - 2y = 0$
12. $Y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$
13. $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$
14. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

15. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

16. $Y^{(6)} + 4y^{(4)} + 3y'' + y = 0$

17. $Y^{(6)} - 4y^{(4)} + 3y'' - y = 0$

18. $y^{(4)} - 16y = 0$

19. $y^{(4)} - y = 0$

20. $Y^{(4)} + 3y'' + 2y'' = 0$

21. $Y^{(4)} + 50y'' + 625y = 0$

22. $3y' + 4y = 0$

23. $y''' + 3y'' + y' - 5y = 0$

En los ejercicios 24 al 33, es dada la solución general de una ecuación diferencial. Escriba una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tiene esta solución general.

24. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^4$

25. $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3$.

26. $y = c_1e^x sen\, 2x + c_2e^x cos\, 2x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x}$

27. $y = c_1 sen\, 5x + c_2 cos\, 5x + c_3x\, sen\, 5x + c_4x\, cos\, 5x$

28. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-x}$

29. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3x^2e^{-2x}$

30. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + c_4xe^x$.

31. $y = c_1 e^x sen\, x + c_2 e^x cos\, x + c_3 x e^x sen\, x + c_4 x e^x \cos x$

32. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{4x}$.

33. $y = c_1 sen\, x + c_2 cos\, x + c_3 x\, sen\, x + c_4 x\, cos\, x$.

34. Encontrar todas las soluciones de $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ de la forma $e^{rx}$. Luego encuentre la solución general por el método de reducción del orden. Compare su respuesta con la obtenida usando (41).

En los ejercicios 25 al 32, se dan las raíces de la ecuación característica de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

35. 8 de multiplicidad 4, y $8 \pm 7i$ .

36. $3 \pm 8i$, de multiplicidad dos.

37. $4 \pm 5i$, $5i$, cada una de ellas de multiplicidad dos y o de multiplicidad tres.

38. $\pm 5i$ de multiplicidad dos, $\pm i$ y 0.

39. $2 \pm i$, de multiplicidad tres.

40. $7 \pm 3i$, 7 y $-7 \pm 3i$

41. $6 \pm 2i$, $-2 \pm 6i$ y $\pm 6i$ de multiplicidad dos.

42. $3 \pm 5i$, $-3 \pm 5i$ y 0 de multiplicidad cuatro.

# 8.11 Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden n con coeficientes constantes

Como se ha señalado en la sección 8.1, la solución general de la ecuación diferencial:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x)$$

Donde a, b y c son constantes con $a \neq 0$, puede ser escrita en la forma $y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, donde $y_1$ y $y_2$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a $y'' + b\,y' + c\,y = 0$ y $y_p$ es una solución particular de $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x)$. La ecuación homogénea ya fue resuelta en la sección 8.4. En esta sección vamos a dar dos métodos para encontrar la solución particular $y_p$. El método de los coeficientes indeterminados que se va a dar inmediatamente. El segundo método de variación de parámetros que será discutido en la sección siguiente.

## Método de coeficientes indeterminados

El método de los coeficientes indeterminados es usado para encontrar una solución particular para una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x) \qquad (42)$$

Donde a, b y c son los coeficientes constantes y f(x) es uno de los siguientes tipos de funciones:

1. F(x) = polinomio.
2. F(x) = exponencial = $e^{ax}$.
3. F(x) = sinusoidal = sen $\beta x$, o cos $\beta x$.
4. F(x) = productos de funciones de tipo 1, 2, 3.
5. F(x) = combinación lineal de 1, 2, 3, 4.

Procedimientos ligeramente diferentes se utilizan en el método de coeficientes indeterminados, para encontrar solución particular en términos del tipo de función de fuerza f(x). Empezamos cuando f(x) involucra un polinomio o una función exponencial. Para entender el procedimiento o técnica de este método empecemos mirando unos ejemplos.

**Primer paso:** el primer paso para entender este método de coeficientes indeterminados es siempre el mismo: analizar las soluciones de la ecuación homogénea asociada y todas sus raíces (incluyendo la multiplicidad de sus raíces).

**Segundo paso:** el segundo paso depende de f(x). Por ejemplo:

Si f(x) en (42) es una exponencial, $e^{ax}$ veces un polinomio de grado m, esto es:
f(x) = $e^{ax}$ (polinomio de grado m), entonces $y_p$ es de la forma:

$$y_p = e^{ax}x^k(A_0+A_1x+\ldots+A_mx^m) \qquad (43)$$

Para constantes apropiadas $A_0$, $A_1$, ⋯. $A_m$, donde k es la multiplicidad de r = $\alpha$, es una raíz de la ecuación característica de la ecuación homogénea asociada.

El grado del polinomio en la solución particular es la misma; como el grado es el mismo del polinomio de la función forzada f(x), si $e^{ax}$ no es una solución homogénea (esto es, si r = $\alpha$ no es una raíz de la ecuación característica). El grado del polinomio en la solución particular está creciendo por el número de veces r = $\alpha$ que es una raíz de la ecuación característica.

La ecuación (43) da la forma de la solución particular. Los $A_i$ son llamados **coeficientes indeterminados** y pueden ser determinados por sustitución de la forma (43) en la forma (42). Este método descrito por (43), tiene también una validez en la ecuación de primer orden, y se generaliza mediante los sencillos ejemplos discutidos en la sección referente a ecuaciones de primer orden. El método de coeficientes indeterminados también es válido sin ninguna alteración para encontrar una solución particular de orden superior a los coeficientes constantes para ecuaciones diferenciales lineales. Con modificaciones menores (43) se pueden utilizar para todos los siete casos que consideramos ahora.

## Caso 1. La función forzada es un polinomio

Un caso especial de (43) ocurre si la función forzada f(x) es justamente un polinomio. Esto corresponde cuando $\alpha = 0$. Si la función forzada es un polinomio, entonces una solución particular es también un polinomio (de grado posiblemente mayor). El grado de la solución particular es el mismo, como el grado del polinomio forzado, si r = 0 no es una raíz de la ecuación característica. El grado de la solución particular es creciente por el número de veces en que r = 0 es raíz de la ecuación característica. Para ser más precisos:

Si f(x) en (42) es una función polinomial de grado m, entonces $y_p$ es de la forma:

$$y_p = x^k(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m)$$

Donde k es la multiplicidad de r = 0 como una raíz de la ecuación característica.

## Ejemplo 16. Polinomio forzado en donde r = 0 no es una raíz:

Encontrar la solución general de:

$$y^{//} - 3y^{/} + 2y = 2x^2 + 1$$

## Solución:

**Primer paso:** la ecuación característica es $r^2 - 3r + 2 = (r - 2)(r - 1) = 0$, tiene dos raíces $r = 1$, y $r = 2$) Entonces $y_h = c_1e^x + c_2\, y^{2x}$.

**Segundo paso:** aquí $f(x) = 2x^2 + 1$ es un polinomio de segundo grado. Entonces $y_p$ tiene la forma $x^k(A_0 + A_1x + A_2x^2)$. $r = 0$ no es una raíz de la ecuación característica, entonces $k = 0$ y se tiene que:

$$y_p = A_0 + A_1x + A_2x^2$$

Sustituyendo esta expresión para y en la ecuación diferencial dada, se tiene:

$$(A_0 + A_1x + A_2x^2)^{//} - 3(A_0 + A_1x + A_2x^2)^{/} + 2(A_0 + A_1x + A_2x^2) = 2x^2 + 1$$

O:

$$2A_2 - 3A_1 - 6A_2x + 2A_0 + 2A_1x + 2A_2x^2 = 2x^2 + 1$$

Igualando coeficientes de igual potencia de x nos da:

$$2A_2 - 3A_1 + 2A_0 = 1$$

$$-6A_2 + 2A_1 = o$$

$$2A_2 = 2$$

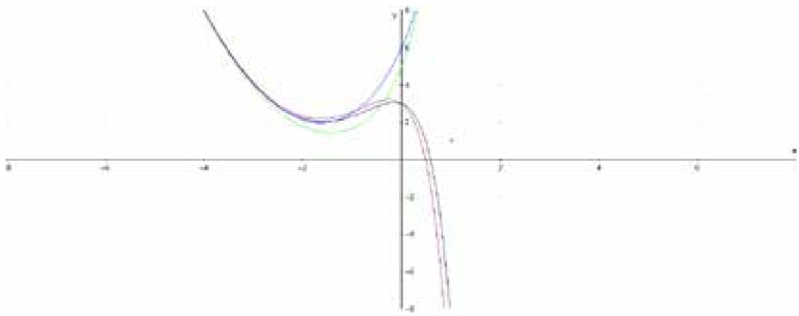
Este sistema nos da la solución:

$$A_0 = 4, A_1 = 3, A_2 = 1$$

Luego la solución particular es $y_{p'} = 4 + 3x + x^2$, y la solución general será:

$$y = y_p + y_h = 4 + 3x + x^2 + c_1e^x + c_2\, y^{2x}$$

**Figura 12.** Gráficas de algunas soluciones de la ecuación diferencial dada.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 12. Polinomio forzado con r = 0 como una raíz:

Suponga que usted tiene que resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 3y' = 2x^2 + 1$$

Usando el método de coeficientes indeterminados. Dar la forma de la solución particular que puede usar.

### Solución:

**Primer paso:** la ecuación característica es $r^2 - 3r = (r - 3)\, r = 0$, tiene una raíz $r = 0$ y $r = 3$. Entonces la solución de la ecuación homogénea es: $y_h = c_1 + c_2\, e^{3x}$.

**Segundo paso:** aquí $f(x) = 2x^2 + 1$ es un polinomio de segundo grado. Luego $y_p$ Tiene la forma: $x^k (A_0 + A_1x + A_2x^2)$. Como $r = 0$ es una raíz de la ecuación característica de multiplicidad 1, entonces $k = 1$ y se tiene que:

$$y_p = x( A_0 + A_1x + A_2x^2) = = A_0x + A_1x^2 + A_2x^3$$

Es bueno observar que el lado derecho del ejemplo 11 y el ejemplo 12 son idénticos a $f(x) = 2x^2 + 1$, pero sus polinomios para la solución particular tienen formas diferentes.

## Caso 2. La función forzada es una exponencial

Un caso particular de (43) ocurre si la función forzada f(x) es justamente una constante multiplicada por $e^{\alpha x}$. Las constantes corresponden al polinomio de grado cero, m = 0. Si la función forzada es de este tipo exponencial, entonces la forma de una solución particular es similar a una exponencial de la forma $y_p = Ae^{\alpha x}$, si $e^{\alpha x}$ no es una solución de la homogénea (es decir si r = $\alpha$, no es una raíz de la ecuación característica). La forma de una solución particular es la misma exponencial multiplicada por un polinomio, cuyo grado va creciendo (desde m=0) de acuerdo al número de veces que r = $\alpha$ es una raíz de la ecuación característica. Para ser más precisos:

Si f (x) en (43) es una constante multiplicada por $e^{\alpha x}$, entonces $y_p$ tiene la forma:

$$y_p = Ax^k e^{\alpha x}, \qquad (44)$$

Donde k es la multiplicidad de r = $\alpha$ como una raíz de la ecuación característica.

## Ejemplo 18. Función forzada es una exponencial (r = $\alpha$ no es una raíz):

Encontrar una solución particular de:

$$y'' + y = 3e^{-x}$$

### Solución:

**Primer paso:** por sustitución de y = $e^{rx}$ en la ecuación diferencial homogénea o por inspección, vemos que la ecuación característica es $r^2 + 1 = 0$, la cual tiene como raíces r = i, y r = - i.

**Segundo paso:** aquí f(x) = $e^{-x}$ es una función exponencial. Por (44) $y_p = Ax^k e^{-x}$, donde k es el número de veces que r = $\alpha$ = -1 es una raíz de la ecuación característica $r^2 + 1 = 0$. Como r = -1 no es una raíz, tenemos que k = 0 y que la solución particular es de la forma:

$$y_p = A\, e^{-x}$$

Sustituyendo esta forma de $y_p$ en la ecuación dada, tenemos:

$$(A\, e^{-x})'' + A\, e^{-x} = 3\, e^{-x}$$

Derivando y simplificando nos da que 2A = 3, luego $y_p = \frac{3}{2}e^{-x}$ es una solución particular de la ecuación dada.

## Ejemplo 19. Función forzada es una exponencial (r = $\alpha$ es una raíz):

Encontrar la solución particular de:

$$y'' - y = 3\, e^{-x}$$

### Solución:

La ecuación característica es $r^2 – 1 = 0$, la cual tiene las raíces r = 1 y r = -1. Aquí f(x) = 3 $e^{-x}$ es una función exponencial. Por (44), $y_p = A\, x^k e^{-x}$ donde k es el número de veces en que $\alpha = –1$, es una raíz de la ecuación característica $r^2 – 1$. Como r = -1 es una raíz una vez, tenemos que k = 1.

$$y_p = A\, x\, e^{-x}$$

Sustituyendo esta forma $y_p$ en la ecuación dada, tenemos:

$$(A\, x\, e^{-x})'' - (A\, x\, e^{-x}) = 3\, e^{-x}$$

Derivando una vez:

$$A\, (e^{-x} - x\, e^{-x})' - A\, x\, e^{-x} = 3\, e^{-x}$$

Y derivando por segunda vez nos da:

$$A\,(-2e^{-x}+ xe^{-x}) - A\,x\,e^{-x} = 3\,e^{-x}$$

El término x $e^{-x}$ se cancela. Simplificando nos da – 2A = 3, luego $y_p = -\frac{3}{2}xe^{-x}$, es una solución particular de la ecuación diferencial dada.

Observemos que en los ejercicios 13 y 14 la función forzada es la misma, pero sus soluciones particulares $y_p$ son diferentes, ya que las soluciones homogéneas también lo son. Este hecho es muy importante.

En general, la forma para $y_p$ no puede determinarse mirando solamente la función forzada f. La solución de la ecuación homogénea (raíces de la ecuación característica) también debe ser considerada.

Para muchos de los ejercicios que siguen, es frecuente el uso del principio de superposición.

## El principio de superposición

Dicho principio para ecuaciones diferenciales lineales dice que:

Si $x_{p1}$ es una solución particular de $ay'' + b\,y' + c\,y = f_1$ y, $x_{p2}$ es una solución particular de $ay'' + b\,y' + c\,y = f_2$, entonces $x_{p1}+ x_{p2}$ es una solución particular de $ay'' + b\,y' + c\,y = f_1 + f_2$.

Este principio se puede generalizar a n funciones forzadas f(x) donde $f(x) = f_1(x) + f_2(x)+\cdots+ f_n(x)$.

## Caso 3. La función forzada es varias exponenciales y polinómicas

Consideremos el siguiente caso.

## Ejemplo 20. Superposición:

Dar la forma para $y_p$, si:

$$y'' - y' = x^3 + x + e^{2x} - 2xe^{2x}$$

Es resuelto por el método de los coeficientes indeterminados.

## Solución:

La ecuación característica es $r^2 - r = r(r - 1) = 0$, la cual tiene los ceros $r = 0$, $r = 1$, luego $y_h = c_1 + c_2e^x$. La función forzada es:

$$f(x) = (x^3 + 1) + (1 - 2x)\, e^{2x}$$

El primer término es un polinomio de tercer grado. Como $r = 0$ es una raíz de multiplicidad 1 de la ecuación característica (caso 1), $y_p$ debe incluir un término de la forma $x^k (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3 x^3)$ donde $k = 1$. El segundo término es de la forma $p(x)\, e^{\alpha x}$, donde $p(x) = 1 - 2x$ es un polinomio de primer grado y $\alpha = 1$. Como $r = 1$ no es una raíz de la ecuación característica entonces por (43), $y_p$ tiene que incluir un término de la forma $x^k (A_4 + A_5x)\, e^{2x}$ con $k = 0$. Entonces $y_p$ tiene la forma:

$$Y_p = x\,(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3 x^3) + (A_4 + A_5x)\, e^{2x}$$

## Ejemplo 21. La función forzada es un polinomio por una exponencial ($r = \alpha$ es una raíz):

Dar la forma para $y_p$ si:

$$y'' - 2y' + y = 7x\, e^x$$

se resuelve por el método de los coeficientes indeterminados.

## Solución:

La ecuación característica es $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0$ tiene la raíz $r = 1$ de multiplicidad 2. Entonces $y_h = c_1\ e^x + c_2\ x\ e^x$. La función forzada es de la forma $p(x)\ e^{\alpha x}$, donde $p(x) = 7x$ es un polinomio de primer grado y $r = \alpha = 1$. Como $r = 1$ es una raíz de multiplicidad 2, por (43) con $k = 2$, $m = 1$, se tiene que $y_p$ tiene la forma:

$$y_p = x^2(A_0 + A_1\ x^2)\ e^x,$$

El método de coeficientes indeterminados trabaja para toda ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, siempre y cuando los términos de forzamiento tengan el tipo correcto de las funciones dadas, es decir, los términos de forzamiento son todos de la forma descrita en esta sección.

## Ejemplo 22. Ejemplo de tercer orden:

Encuentre la forma general de la solución de:

$$y^{///} - 6y^{//} + 12\ y^{/} - 8y = x\ e^{2x}$$

## Solución:

Primero se requiere encontrar la solución de la ecuación homogénea asociada $y^{///} - 6y^{//} + 12\ y^{/} - 8y = 0$. La ecuación característica es $r^3 - 6r^2 + 12\ r - 8 = (r - 2)^3 = 0$, luego $r = 2$ es una raíz de multiplicidad 3. Un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea asociada es $\{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\}$, luego $y_h = c_1\ e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3x^2e^{2x}$. El término correspondiente a la función forzada es $f(x) = xe^{2x}$. Por (43) con $\alpha = 2$, $m = 1$, $x_p$ tiene que ser de la forma $x^k[A_0 + A_1x]e^{2x}$, donde k es la multiplicidad de 2 que es la raíz de la ecuación característica. Entonces $k = 3$ y $y_p$ es de la forma:

$$Y_p = x^3[A_0 + A_1x]e^{2x} = A_0x^3e^{2x} + A_1x^4e^{2x}$$

La solución general será $y = y_p + y_h$

## Caso 4. Función forzada sinusoidal

Si la función forzada es sinusoidal, es decir de la forma f(x) = $C_1$ cos $\beta x$ + $C_2$ sen $\beta x$, pensamos en esta combinación lineal del seno y coseno como en la exponencial compleja. Luego, de acuerdo (44) (con el caso especial de (43)), la solución particular involucra la misma función exponencial $e^{\pm \beta i x}$, la cual es equivalente a una combinación lineal de cos $\beta x$ y sen $\beta x$. Claro está que puede ser multiplicada por una potencia de x si r = $\pm\beta i$ son raíces de la ecuación característica. De forma más precisa:

> Si f(x) = = $C_1$ cos $\beta x$ + $C_2$ sen $\beta x$ en a $y''$ + b $y'$ + c y = f(x), entonces $y_p$ tiene la forma:
>
> $$Y_p = x^k(A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x),$$
>
> Donde k es la multiplicidad de r = $\beta i$ como una raíz de la ecuación característica.

## Ejemplo 23. Función forzada sinusoidal (r = $\beta i$ no es una raíz):

Dar la forma de $y_p$ si

$$y'' + 2y' + 2y = 3\,e^{-x} + 4\cos x$$

## Solución:

La ecuación característica es $r^2 + 2r + 2 = 0$. Sus raíces son r = - 1 + i y r = - 1 – i. Entonces $y_h = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{-x}$. Ahora vamos a determinar $y_p$. Observe que f es la suma de dos términos, $3e^{-x}$ y, 4 cos x. Como – 1 no es una raíz de la ecuación característica. El caso (43) nos dice que $y_p$ incluye un término de la forma $A_1\, e^{-x}$. Ahora consideremos a 4 cos x. Como i no es una raíz de la ecuación característica, por el caso 4 con $\beta$ = 1 nos dice que $y_p$ incluye términos de la forma $A_2$ cos x + $B_2$ sen x. Entonces:

$$y_p = A_1 e^{-x} + A_2 \cos x + B_2 \operatorname{sen} x$$

Para algunas constantes $A_1$, $A_2$ y $B_2$.

Este ejemplo pone de relieve otra fuente común de errores:

A pesar de que solo aparece cos $ßx$ en el término de forzamiento f, la forma para $y_p$ requiere tanto $x^k$ A cos$ßx$ como $x^K$B sen$ßx$

Puede ser probado, usando propiedades de la independencia lineal y el Wronskiano, que:

Si a, b y c son constantes y f es la función descrita en el método de coeficientes indeterminados, entonces el método siempre funciona (quizás no en orden). En particular, si la ecuación para las constantes indeterminadas no es consistente (no tiene una solución), quiere decir que se ha cometido un error.

## Ejemplo 24. Función forzada sinusoidal (r = $ßi$ es una raíz):

Dar la forma para $y_p$ si:

$$y'' + 4y = \operatorname{sen}(2x)$$

debe ser solucionado por el método de coeficientes indeterminados.

### Solución:

La ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$, cuyas raíces son r = $ßi$ ±2$i$. Entonces $y_h = C_1$ cox 2x + $C_2$ sen 2x. El término de la función forzada sen (2x) es sen ($ßi$, donde $ß$=2. Como r = $ßi$ es una raíz de la ecuación característica de multiplicidad 1, tenemos que k = 1 y por el caso 4 la forma de la solución particular es:

$$y_p = x\,[A \cos(2x) + B \operatorname{sen}(2x)]$$

## Caso 5. Función forzada un polinomio por una función sinusoidal

Si la función forzada es un polinomio por una función forzada sinusoidal, la función sinusoidal es tratada como una exponencial compleja en el caso previo. Para ser más preciso.

Si $f(x) = p(x) \cos \beta x + q(x) \operatorname{sen} \beta x$ en la ecuación diferencial $ay'' + b\,y' + c\,y = f(x)$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado m y $q(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $y_p$ tiene la forma:

$$Y_p = x^k[(A_0 + A_1 x + \ldots + A_s x^s) \cos \beta x + (B_0 + B_1 x + \ldots + B_s x^s) \operatorname{sen} \beta x] \qquad (45)$$

Donde k es la multiplicidad de $r = \beta i$ como una raíz de la ecuación característica y s es el mayor entre m y n.

## Ejemplo 25. Función forzada un polinomio por una función sinusoidal ($r = \beta i$):

Dar la forma para $y_p$ si:

$$y'' + 4y = x^2\cos(2x) - x \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(2x) = x^2 \cos(2x) + (1 - x) \operatorname{sen}(2x)$$

Debe ser solucionado por el método de coeficientes indeterminados.

### Solución:

La ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$ tiene como raíces a $\pm 2i$ y entonces $y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)$. El término de forzamiento es de la forma:

$$P(x) \cos \beta x + q(x) \operatorname{sen} \beta x$$

Donde $p(x) = x^2$ es un polinomio de segundo grado, $q(x) = 1 - x$ es un polinomio de primer grado, y $\beta = 2$. Como $r = \beta i = 2i$ es una raíz de la ecuación característica de multiplicidad 1, entonces se tiene:

$$Y_p = x\,[(A_0 + A_1x + A_2x^2)\cos 2x + (B_0 + B_1x + B_2x^2)\,\text{sen}\,2x]$$

## Ejemplo 26. Ejemplo de orden cuarto:

Dar la forma para $y_p$ si:

$$y^{(4)} + 8y'' + 16\,y = x\,\text{sen}\,x + x^2\cos(2x)$$

debe ser solucionado por el método de coeficientes indeterminados.

### Solución:

Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$y^{(4)} + 8y'' + 16\,y = 0$$

Su ecuación característica es $r^4 + 8r^2 + 16 = (r^2 + 4)^2 = 0$ y tiene raíces complejas repetidas $r = \pm 2i, \pm 2i$. Un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea asociada está dado por:

$$\{\text{sen}\,(2x), \cos(2x), x\,\text{sen}(2x), x\cos(2x)]$$

Ahora vamos a encontrar la forma de $y_p$. Consideremos la función forzada:

$$f(x) = x\,\text{sen}x + x^2\cos 2x$$

Por (45), el término x sen x implica que $y_p$ incluye:

$$x^{k_1}[(A_0 + A_1x)sen\,x + (B_0 + B_1x)cosx] \qquad (45)$$

Con $k_1 = 0$, ya que r = i que no es una raíz de la ecuación característica. El término $x^2\cos 2x$ implica que $y_p$ incluye:

$$x^{k_2}[(A_2 + A_3x + A_4x^2)sen2x + (B_2 + B_3x + B_4x^2)\cos 2x] \qquad (46)$$

Con $k_2 = 2$, ya que r = 2i tiene multiplicidad 2 como una raíz de la ecuación característica. En realidad, usando (45) y (46) se puede añadir (45) y (46) para obtener la forma de $y_p$ sustituyendo en la ecuación diferencial original dada, y resolver para $A_0$ , $A_1$ ..$A_4$ $B_0$, ⋯ $B_4$. Alternativamente, uno podría encontrar la solución particular de (45) para encontrar una solución particular de:

$$y^{(4)} + 8y'' + 16\,y = x \operatorname{sen} x,$$

y luego usar (46) para encontrar una solución particular de:

$$y^{(4)} + 8y'' + 16\,y = x^2 \cos 2x.$$

Adicionando estas dos soluciones particulares de (45) y (46) dadas, por el principio de superposición, se da una solución de $y^{(4)} + 8y'' + 16\,y = x \operatorname{sen} x + x^2 \cos 2x$ como se quería.

## Caso 6. Función forzada una exponencial por una función sinusoidal

Si la función forzada es una exponencial por una función sinusoidal, $f(x) = E_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + E_2 e^{\alpha x} sen \beta x$, pensamos en la función forzada como una combinación lineal de la exponencial compleja $e^{(\alpha \pm \beta)x}$. Luego de acuerdo a (44), (el cual es un caso especial de (43)), la solución particular tiene que incluir una solución de la misma forma exponencial $e^{(\alpha \pm \beta)x}$, la cual es equivalente a una combinación lineal de $E_1 e^{\alpha x} \cos \beta x$, y $E_1 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$. Por supuesto, esto debe ser multiplicado por una potencia de x si $r = \alpha \pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica. Para ser más preciso:

> Si $f(x) = E_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + E_2 e^{\alpha x} sen \beta x$ en la ecuación diferencial $ay'' + b\,y' + c\,y = f(x)$, entonces $y_p$ tiene la forma:
>
> $$y_p = x^k (A e^{\alpha x} \cos \beta x + B e^{\alpha x} sen\, \beta x),$$
>
> Donde k es la multiplicidad de $r = \alpha \pm i\beta$ como raíz de la ecuación característica.

## Ejemplo 27. Función forzada una exponencial por una función sinusoidal:

Dar la forma para $y_p$ si:

$$Y'' + 2y' + 2y = 5e^{-x}\cos x$$

debe ser solucionado por el método de coeficientes indeterminados.

### Solución:

La ecuación característica es $r^2 + 2r + 2 = 0$, la cual tiene como raíces $r = -1 \pm i$, luego se tiene:

El término forzado es de la forma $e^{\alpha x}\cos\beta x$ donde $\alpha = -1, \beta = 1$. Como $r = -1 + i$, es una raíz de la ecuación característica de multiplicidad 1, por el caso 6, con k = 1, la forma de la solución particular es:

$$y_p = x(Ae^{-x}\cos\beta x + Be^{-x} sen\,\beta x)$$

## Ejemplo 28. Superposición:

Dar la forma para $y_p$ si:

$$Y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos 2x + e^{-x}\operatorname{sen} 2x + e^{-x} - 3\cos x$$

Debe ser solucionado por el método de coeficientes indeterminados.

### Solución:

Esta ecuación tiene la misma ecuación característica del ejercicio 22, luego las raíces son $r = -1 \pm i$. La función forzada en esta ecuación es la suma de tres tipos de términos:

$e^{-x}\cos 2x + e^{-x}\operatorname{sen} 2x$: Como r = -1 + 2i no es raíz, incluimos $A_0e^{-x}\cos 2x + B_0e^{-x} sen\, 2x$, por el caso 6.

$e^{-x}$: Como r = - 1 no es raíz, incluimos $A_2e^{-x}$, por el caso 2.

-3 cos x: Como r = i no es raíz, incluimos $A_1 \cos x + B_1 sen\, x$, por el caso 4.

Entonces la forma de $y_p$ por el principio de superposición es:

$$y_p = A_0e^{-x} \cos 2x + B_0e^{-x} sen\, 2x + A_1 \cos x + B_1 sen\, x + A_2e^{-x}$$

## Caso 7. Función forzada un polinomio por una exponencial y por una función sinusoidal

Si la función forzada es un polinomio por una exponencial y por una función sinusoidal, entonces la función exponencial por la función sinusoidal es tratada como una exponencial compleja como en el caso 6. Para ser más precisos.

Si $f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} sen\beta x$, donde P(x) es un polinomio de grado m y Q(x) es un

$$y_p = x^k[(A_0 + A_1x + \cdots + A_sx^s)e^{\alpha x}cos\beta x + ((B_0 + B_1x + \cdots + B_sx^s)e^{\alpha x}sen\beta x)]$$

Donde k es la multiplicidad de r = $\alpha \pm \beta i$ como una raíz del polinomio característico y s es el mayor entre n y m.

Este caso es el caso más general. Este incluye todas los casos anteriores para apropiadas escogencias de $\alpha$, $\beta$, $m$ y $n$.

## Ejemplo 29. Función forzada un polinomio por una exponencial y por una función sinusoidal (r =P(x)$e^{\alpha x}$ *(cos$\beta$x + sen$\beta$x)*

Dar la forma para $y_p$ si:

$$y'' + 3y' + 2y = x\, e^{-x} cos2x$$

ser solucionado por el método de coeficientes indeterminados.

## Solución:

La ecuación característica es $r^2 + 3r + 2 = (r + 1)(r + 2) = 0$, luego las raíces son $r = -1$ y $r = -2$. Entonces, dos soluciones independientes de la homogénea son $e^{-x}$ y $e^{-2x}$. El término forzado es de la forma $P(x)\, e^{\alpha x}\cos\beta x$ donde $P(x) = x$, es de primer grado y $\alpha + i\beta = -1 + 2i$. Como $-1 + 2i$ no es una raíz de la ecuación característica, por el caso 7 (con $k = 0$), la forma de $y_p$ es:

$$y_p = (A_o + A_1 x)e^{-x}\cos 2x + (B_o + B_1 x)e^{-x} sen\, 2x$$

## Ejemplo 30. Función forzada un polinomio por una exponencial y por una función sinusoidal ($r = \alpha \pm \beta i$ es una raíz):

Dar la forma para $y_p$ si:

$$y'' + 2y' + 5y = x^3 e^{-x}\,\text{sen}\, 2x$$

Debe ser solucionado por el método de coeficientes indeterminados.

## Solución:

La ecuación característica es $r^2 + 2r + 5 = 0$, y sus raíces son $r = -1 + 2i$. Entonces, las dos soluciones linealmente independientes homogéneas son $e^{-x}\cos 2x$ y $e^{-x} sen\, 2x$.. Los términos de la función forzada son de la forma $P(x)\, e^{\alpha x} sen\, \beta x$, donde $P(x) = x^3$ es un polinomio de tercer grado y $r = \alpha + \beta i = -1 + 2i$. Como $r = -1 + 2i$ es una raíz de la ecuación característica de multiplicidad 1, por el caso 7 (con $k = 1$), la forma de $y_p$ es:

$$Y_p = (A_o + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3)e^{-x}\cos 2x + (B_o + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3)e^{-x} sen\, 2x$$

Cuando se dan condiciones iniciales y la función forzada es no cero, es importante recordar la aplicación de las condiciones iniciales para dar la solución general $y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2 y$, no solamente $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 y$.

## Ejemplo 31. Problema con valor inicial:

Resolver:

$$y'' - y = 3\,e^{-x}, \text{ si } y(0) = 0,\; y'(0) = 1$$

### Solución:

Primero encontramos la solución general de $y'' - y = 3\,e^{-x}$. En el ejemplo 14 encontramos que $y_p = -\frac{3}{2}xe^{-x}$, y que la ecuación característica es $r^2 - 1 = 0$, tiene como raíces r = 1, - 1. Entonces la solución general es:

$$Y = -\frac{3}{2}xe^{-x} + C_1e^{x} + C_2e^{-x}$$

El orden para aplicar las condiciones iniciales es:

$$y' = -\frac{3}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}xe^{-x} + C_1e^{x} - C_2e^{-x}$$

Con las condiciones iniciales nos da:

$$0 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$1 = y'(0) = -\frac{3}{2} + C_1 - C_2$$

Resolviendo para las constantes se tiene que $C_1 = 5/4$ y $C_2 = -5/4$, y la solución particular es:

$$Y_p = -\frac{3}{2}xe^{-x} + \frac{5}{4}e^{x} - \frac{5}{4}e^{-x}$$

## Resumen del método de los coeficientes indeterminados

En resumen, **el método de los coeficientes indeterminados** puede ser usado con $ay'' + by' + cy = f(x)$ si a, b y c son constantes y f es una combinación lineal de funciones de la forma:

$$x^m e^{\alpha x}\cos\beta x,\; x^m e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

Donde m es un entero no negativo y $\alpha, \beta$ son números reales. Casos especiales son:

$$x^m, x^m e^{\alpha x}, e^{\alpha x}, e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, x^m\cos\beta x, x^m\operatorname{sen}\beta x$$

El método es el siguiente:

Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

Determine luego $y_p$ como una combinación lineal de las funciones con coeficientes desconocidos, usando las reglas dados en los casos 1 al 7 con base en los siguientes hechos.

Si f incluye una serie de términos de la forma $P(x)\,e^{\alpha x}$, donde P(x) es un polinomio de grado $m_1$, entonces $y_p$ es:

$$(1)\quad ay'' + b\,y' + c\,y = f(x)$$

$$x^k[A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m]e^{\alpha x}$$

Donde k es la multiplicidad de r = $\alpha$ como una raíz de la ecuación característica $ar^2+br+c = 0$.

Si f incluye una suma de términos de la forma:

$$P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}sen\beta x$$

Donde P(x) es un polinomio de grado m y Q(x) es un polinomio de grado n, entonces la forma de $y_p$ es:

$$x^k[A_0 + A_1x + \cdots + A_sx^s]e^{\alpha x}\cos\beta x + x^k[B_0 + B_1x + \cdots + B_sx^s]e^{\alpha x}sen\,\beta x$$

Donde s es el mayor entero entre m y n y k es la multiplicidad de r = $\alpha + \beta i$, como una raíz de la ecuación característica $ar^2+br+c = 0$.

Sustituir la expresión para $y_p$ en la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = f(x)$ para determinar los coeficientes desconocidos $A_i$, y $B_i$.

La solución general de $ay'' + by' + cy = f(x)$ es $y = y_p + y_h$.

Observemos que si f(x) incluye términos como ln x, $x^{1/3}$ $senx, \tan x$, entonces, los coeficientes indeterminados no se pueden hallar en general.

## 8.12 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 12, mencione si el método de coeficiente indeterminado se puede aplicar a las ecuaciones diferenciales dadas. Si no se puede, explicar la razón.

1. $y'' + y = x \tan x$
2. $y'' + 3y = x^{1/2} \operatorname{sen} x$
3. $y'' + y = x^2 + x + \ln|x|$
4. $y'' + y = e^{x+1}$
5. $y'' + y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
6. $y'' + y' + y = \cosh x$
7. $y'' + x\,y = 3e^{2x}$
8. $y'' + y = x \operatorname{senh} 2x$
9. $y'' + y = x^{-1}e^{x}$
10. $y'' + yy' = e^{2x}$
11. $y'' + 3y = e^{-2x}\cos 3x + \operatorname{senh} 3x$
12. $y'' + y' + 4y = \operatorname{sen}^2 x$

En los ejercicios 13 al 52, resuelva la ecuación diferencial usando el método de los coeficientes indeterminados. Si no son dadas las condiciones iniciales, dar la solución general.

13. $y'' + 9y = x^2 + 6$

14. $y'' - 4y = x^2 + 17x$

15. $y'' + 8y = 7x + 11$

16. $y'' - 7y' = 5x - 3$

17. $y'' - 7y' + 12y = 5e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

18. $y'' + 7y' + 12y = 5e^{5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

19. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{x}$

20. $y'' + 4y = 3e^{2x}$

21. $y'' - 2y' + 5y = 4e^{x}$

22. $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x}$

23. $y'' - 9y = 5e^{-3x}$

24. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-x}$

25. $y'' + 2y' + 5y = 3\,\mathrm{sen}\,x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

26. $y'' + 9y = 5\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

27. $y'' + 9y = 4\,\mathrm{sen}\,3x$

28. $y'' + y' + y = 3e^{-x}$

29. $y'' + y = \cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

30. $y'' + 4y' + 8y = t^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

31. $y'' - 4y = x\, e^{3x}$

32. $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x}$

33. $y'' - 4y' + 3y = xe^{x}$

34. $y'' - 7y' + 12y = (x + 5)\, e^{4x}$

35. $y'' + 16y = 3 \cos 4x$

36. $y'' + y = \operatorname{sen} x$

37. $y'' - 2y' + 5y = e^{x} \cos 3x$

38. $y'' + 2y' + y = 3e^{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

39. $y'' + 4y' = 12t^2 + e^{x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

40. $y'' + y' + y = \cos 2x$

41. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

42. $y'' + 2y' + y = 3xe^{-x} + 2e^{-x}$

43. $y'' - 4y' + 4y = xe^{x} - e^{x} + 2e^{2x}$

44. $y'' - 5y' + 4y = 17 \operatorname{sen} x + 3e^{2x}$

45. $y'' + 5y' + 4y = 8x^2 + 3 + 2\cos 2x$

46. $y' + y = 2e^{-x}$

47. $y' + 3y = x^2 + 1$

48. $y' -- y = \text{sen } x$

49. $y'' + 4y = \text{sen } 2x$

50. $2y' + 4y = x$

51. $3y' - 2y = xe^x$

52. $y' - 3y = e^x \text{sen } x$

En los ejercicios 53 al 96, dar la forma de $y_p$ si el método de los coeficientes indeterminados es usado. No se necesita calcular $y_p$.

53. $y'' - 5y' + 6y = x^5 + 7x^3 + 4x$

54. $y'' + 5y' + 6y = x^4 + 3x^2 + 7$

55. $y'' + 9y' = x^3$

56. $y'' - 9y' + 6y = 3x^3 + 2x^2 + x + 11$

57. $y'' + 5y' + 6y = 5e^{4x}$

58. $y'' - 5y' + 6y = 6e^{5x}$

59. $y'' + 4y = 5e^{2x}$

60. $y'' + 7y' + 12y = 5e^{-3x}$

61. $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$

62. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$

63. $y'' + 2y' + y = x^3e^{-x}$

64. $y'' - 2y' + y = x^2e^x$

65. $y'' - 7y' + 12y = x^5e^{4x}$. $y'' - 7y' + 12y = x^5e^{4x}$

66. $y'' - 16y' = (x^5 + 3x^2 + 7)e^{-4x}$

67. $y'' - 6y' + 9y = x^4 - e^{3x}$

68. $y'' + 2y' - 3y = x^3e^x - e^x + e^{-2x} + e^{-3x}$

69. $y'' + 3y' - 10y = x^2e^{2x} + e^{5x}$

70. $y'' - 6y' + 5y = e^{5x} + x^2e^{-5x}$

71. $y'' + 5y' = \cos 5x$

72. $y'' - 25y = \operatorname{sen} 5x$

73. $y'' - 7y' + 12y = x^2 \operatorname{sen} 4x$

74. $y'' + 3y' - 10y = x^2 \cos x$

75. $y'' + 25y = \cos 5x$

76. $y'' + 9y = x^2 \operatorname{sen} 3x + \cos 2x$

77. $y'' - 2y' + 5y = 3e^x \operatorname{sen} 2x$

78. $y'' + 2y' + 5y = 5e^{-x} \cos 3x$

79. $y'' + 9y = x e^{-x} \operatorname{sen} 3x$

80. $y'' - y = x^2 e^x \cos x$

81. $y'' + 2y' + 2y = x^2 e^x \operatorname{sen} x$

82. $y'' + 2y' + 2y = 3x^2 e^{-x} \cos 2x + xe^x \operatorname{sen} 2x$

83. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + e^x \operatorname{sen} x$

84. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{sen} x + \cos x$

85. $y'' - y = e^{-x} - e^x + e^x \cos x$

86. $y'' + y = e^{-x} - e^x + e^x \cos x$

87. $y'' + 16y = x\cos 4x + e^{-x}\operatorname{sen} 4x + 3e^{-4x}$

88. $y'' + 2y' + 2y = x^2 e^{-x} \cos x$

89. $y'' - 2y' + 2y = x^3 e^{-x} \operatorname{sen} x + e^x \cos x$

90. $y'' - 2y' + y = x^2 e^x \operatorname{sen} 3x$

91. $y'' + 2y' + y = x e^x \operatorname{sen} 3x + e^x \cos 3x$

92. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} \operatorname{sen} x$

93. $y'' + 4y' + 8y = x^2 e^{-2x} \operatorname{sen} 2x + xe^{-2x} \cos 2x$

94. $y'' + 4y' + 8y = x^2 e^{-2} \cos x$

95. $y'' + 4y' + 13y = x^3 e^{-2x} \operatorname{sen} 3x$

96. $y'' + 4y' + 13y = xe^x \operatorname{sen} 3x$

97. Considere la ecuación diferencial $y'' = x^3 7x - 2\ x^3 + 7x - 2$

a. Encuentre la forma de una solución particular usando el método de coeficientes indeterminados.
b. Encuentre la solución por integración.

---

98. En este ejercicio vamos a ver que el método de los coeficientes indeterminados es válido para funciones forzadas que son el producto de una exponencial por un polinomio si el método está bien probado para polinomios. Asumimos que P(x) es un polinomio de grado:

$$y_p = Q(x)$$

Donde Q(x) es un polinomio de grado m si r = 0 no es una raíz de la ecuación característica, y Q(x) es de grado m+1 si r = 0 es raíz una sola vez, y Q(x) tiene grado m + 2, si r = o es una raíz doble. Supongamos:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = e^{\alpha x}P(x). \qquad (47)$$

Donde P(x) es un polinomio de grado m.

- Usando el cambio de variable, $z = e^{\alpha x}v$, para mostrar que:

$$a\,v'' + (2a\alpha + b)v' + (a\alpha^2 + baa + c)v = P(x)$$

- Muestre que existe una solución particular pata v(x) que es un polinomio cuyo grado depende del número de veces que $r = \alpha$ es una raíz de la ecuación característica de (47).

El método de los coeficientes indeterminados puede ser aplicado para ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes de orden mayor a dos y no cambia. En los ejercicios 99 a 108, resolver las ecuaciones diferenciales por el método de los coeficientes indeterminados. Si no se dan las condiciones iniciales dar la solución general.

99. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{2x}$

100. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}$

101. $y''' - y = \operatorname{sen} x$

102. $y^{(4)} - 25y'' + 144y = x^2 - 1$

103. $y''' - y' = 3 + 2\cos x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

104. $Y^{(4)} - y = 2e3^{x} - e^{x}$

105. $Y^{(4)} - 16y = 5xe^{x}$

106. $y^{(4)} + 4y'' + 4y = \cos 2x$

107. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^{2} - e^{3x}$

108. $Y^{(4)} + y''' - 6y'' = 72x + 24$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -6$, $y'''(0) = -57$

En los ejercicios 109 al 116, dar la forma para $y_p$ que se puede usar para encontrar una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados. No resolver para $y_p$.

109. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2e^{x} - 3e^{x}$

110. $y^{(4)} + 2y'' + y = x \operatorname{sen} x$

111. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = x^3e^{x} + x^2e^{-x}$

112. $y^{(4)} + 5y^{//} + 4\,y = sen\,x + cos\,2x + 3x$

113. $y^{///} + 2y^{//} + 2\,y^{/} = 3e^{-x}\,cos\,x$

114. $y^{///} + 2y^{//} + 2\,y^{/} = x2e\text{-}x\,cos\,x - xe{-}x\,sen\,x$

115. $y^{(4)} + 4y^{///} + 8y^{//} + 8y^{/} + 4y = 7e^{-x}\,cos\,x$

116. $y^{(4)} - 2y^{//} + y = xe^{x} + x^{2}e{-}x + e^{2x}$

# 8.13 Método de variación de parámetros (ecuaciones de segundo orden)

**Figura 13.** Józef María Hoene-Wroński (1776-1853).

**Fuente.** Bell (2002).

Józef nace el 24 de agosto de 1776 y muere el 9 de agosto de 1853, fue un prominente matemático y filósofo polaco, que se destacó como físico, inventor, jurista y economista.

Hoene-Wroński procedía de una familia checa establecida en Wolsztyn, en el oeste de Polonia. En 1794 sirvió en el levantamiento de Kościuszko como teniente segundo de artillería, fue hecho prisionero y permaneció hasta 1797 en el ejército ruso. Reasignado con el grado de teniente coronel, estudió brevemente en Alemania y en 1800 se alistó en la Legión Polaca en Marsella.

Ahí comenzó su trabajo científico y académico y concibió la idea de un gran sistema filosófico. Diez años después se desplazó a París y vivió ahí hasta su muerte, trabajando infatigablemente hasta las últimas y más difíciles circunstancias materiales.

En la sección anterior, el método de coeficientes indeterminados fue usado para encontrar la solución de:

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)\,y(x) = f(x) \quad (48)$$

Hay dos restricciones sobre el método de los coeficientes indeterminados. Primero, P y Q tienen que ser constantes. Segundo, f tiene que ser de una forma especial. En esta sección presentaremos un método para encontrar una solución particular de $y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = f(x)$, con tal de que se haya resuelto en primer lugar la ecuación homogénea asociada:

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \quad (49)$$

Este nuevo método no requiere que P y Q sean constantes o que f no sea de una forma especial.

No hay un método general para encontrar un conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, y_2\}$ de (49). En la sección 8.3 usamos el método de la reducción del orden para obtener una segunda solución $y_2$ si una segunda solución $y_1$ es conocida. Desafortunadamente, no existe un método general para obtener una solución de (49) si P y Q son no constantes.

En esta sección, asumimos que tenemos un conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, y_2\}$ de (49). Primero vamos a construir el método y luego vamos a trabajar varios ejemplos. Comenzamos por buscar funciones $v_1$ y $v_2$ tal que:

$$y = v_1y_1 + v_2y_2 \quad (50)$$

Es una solución de (48):

$$y''(x) + P(x)\,y'(x) + Q(x)\,y(x) = f(x) \quad (51)$$

Este es llamado el **método de variación de parámetros**[5] porque las constantes usuales $C_1$y $C_2$ en la solución asociada de la ecuación homogénea son ahora variadas. Cuando (50) es sustituida en (51), una ecuación diferencial resulta, involucrando dos incógnitas $v_1$ y $v_2$. En el método de variación de parámetros, una ingenua observación es hecha. Elegimos $v_1$ y $v_2$ tal que las primeras derivadas de y serían lo mismo que si $V_1$ y $V_2$ fueron constantes, a pesar de que $v_1$ y $v_2$ no son constantes. Es decir, tenemos:

$$y' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \qquad (52)$$

Sin embargo, debería ser calculado usando la regla del producto a partir de (50). Por lo tanto, a partir de (50) tenemos:

$$y' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2' \qquad (53)$$

La ecuación (52) solo tiene dos de estos términos. Entonces (52) puede ser válida solo si la suma de los dos otros términos son cero:

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \qquad (54)$$

Entonces (52) se satisface si (54) se satisface. La segunda derivada de y se calcula derivada (52), usando la regla del producto dos veces. Usando $y''$ y $y'$ de (52) y reemplazando en la ecuación diferencial (51), se tiene:

$$v_1 y_1'' + v_1' y_2'' + v_2 y_2'' + v_2' y_2' + P(x)\left(v_1 y_1' + v_2 y_2'\right) + Q(x)(v_1 y_1 + v_2 y_2) = f(x)$$

Agrupando términos semejantes:

$$v_1\left(y_1'' P(x) y_1' + Q(x) y_1\right) + v_2\left(y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2\right) + v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \qquad (55)$$

5 La variación de parámetros es generalmente asociada para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales de segundo orden (o superior), el cual fue usado para encontrar la solución particular de la ecuación lineal de primer grado.

Como $y_1$ y $y_2$ son soluciones de la ecuación homogénea $y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$, luego los dos términos en los dos paréntesis de la ecuación (55) son cero, por lo tanto:

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \qquad (56)$$

En resumen, tenemos que, si $v_1'$ y $v_2'$ satisface las ecuaciones algebraicas (54) y (56), entonces:

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0. \qquad (57)$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \qquad (58)$$

Y:

$Y = v_1 y_1 + v_2 y_2$ es una solución particular de la ecuación diferencial original $y''(x) + P(x)\, y'(x) + Q(x)\, y(x) = f(x)$.

El sistema lineal (57) se puede resolver por eliminación o por la regla de Cramer para $v_1'$ y $v_2'$. Para eliminar $v_2'$, multiplicamos (57) por $y_2'$ y multiplicamos (58) por $y_2$ y restamos.

$$v_1'(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -f(x)\, y_2$$

Observemos que $y_1 y_2' - y_2 y_1'$ es el Wronskiano definido en la sección 8.2. Entonces podemos dividir por esta expresión y se tiene:

$$v_1' = -\frac{f(x) y_2}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}$$

De manera similar se obtiene $v_2'$ a partir (57):

$$v_2' = -\frac{f(x) y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}$$

Por integración (indefinida o definida), obtenemos $v_1$ y $v_2$. La solución particular se obtiene de (50).

## Ejemplo 32. Variación de parámetros:

El conjunto {x, $x^3$} es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $x^2y^{//} - 3x\,y^{/} + 3y = 0$. Encontrar la solución general de:

$$x^2y^{//} - 3x\,y^{/} + 3y = 4x^7$$

### Solución:

Tenemos que $y_1 = x$, $y_2 = x^3$. Dividiendo por $x^2$ la ecuación diferencial se tiene:

$$y^{//} - \frac{3}{x}y^{/} + \frac{3}{x^2}y = 4x^5$$

Entonces $f(x) = 4x^5$. Podemos resolver el sistema dado por (57) y (58), el cual es:

$$v_1^{/}x + v_2^{/}x^3 = 0$$

$$v_1^{/}x^{/} + v_2^{/}[x^3]^{/} = 4x^5$$

O:

$$v_1^{/}x + v_2^{/}x^3 = 0$$

$$v_1^{/} + v_2^{/}3x^2 = 4x^5$$

Resolviendo de la primera ecuación para $v_1^{/}$: $v_1^{/} = v_2^{/}x^2$, sustituyendo en la segunda ecuación, tenemos:

$$-v_2^{/}x^2 + v_2^{/}3x^2 = 4x^5$$

Y resolviendo para $v_2^{/}$:

$$v_2^{/} = 2x^3$$

Entonces:

$$v_1^{/} = -v_2^{/}x^2 = -2x^5$$

Luego, calculando la antiderivada de $v_1^{/}, v_2^{/}$, nos da:

$$v_2 = \frac{x^4}{2}, \quad v_1 = -\frac{x^5}{3}$$

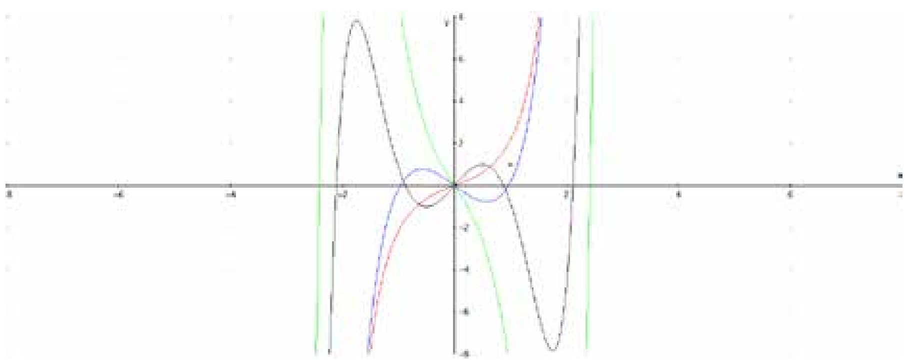
Una solución particular es:

$$y_p = v_1 x_1 + v_2 x_2 = \left(-\frac{x^6}{3}\right)x + \left(\frac{x^4}{2}\right)x^3 = \frac{x^7}{6}$$

Y la solución general es:

$$Y = \frac{x^7}{6} + C_1 x + C_2 x^3$$

**Figura 14.** Gráfica de algunas soluciones de la ecuación diferencial dada.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Ejemplo 33. Variación de parámetros:

Encontrar la solución general de:

$$y'' + y = \frac{1}{x+1}$$

Observe que esta es una ecuación diferencial con coeficientes constantes. Pero $\frac{1}{x+1}$ no es del tipo de función forzada para la cual se pueda aplicar el método de coeficientes indeterminados. El método para resolver esta ecuación tiene que ser el método de variación de parámetros, luego se tiene que conocer la solución de la ecuación homogénea asociada.

### Solución:

Primero se obtiene la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada que es: $y'' + y = 0$. Sustituyendo por $y = e^{rx}$, obtenemos la ecuación característica $r^2 + 1 = 0$, la cual tiene las raíces $r = \pm i$. Entonces, cos x y sen x forman un conjunto fundamental de soluciones. De acuerdo al método de variación de parámetros, vemos que la solución de la ecuación dada debe ser de la forma:

$$Y = v_1 \cos x + v_2 \operatorname{sen} x \qquad (59)$$

La derivada es la misma como si $v_1$ y $v_2$ son constantes:

$$y' = - v_1 \operatorname{sen} x + v_2 \cos x \qquad (60)$$

Sin embargo, por la regla del producto la ecuación anterior solo es válida si:

$$v_1' \cos x + v_2' \operatorname{sen} x = 0 \qquad (61)$$

Sustituyendo (59) en la ecuación inicial dada y tomando la derivada de (60) al usar la regla del producto, tenemos:

$$-v_1' \operatorname{sen} x - v_1 \cos x + v_2' \cos x - v_2 \operatorname{sen} x + v_1 \cos x + v_2 \operatorname{sen} x = \frac{1}{x+1}$$

Después de cancelar los términos en $v_1$ y $v_2$, lo cual siempre ocurre, la ecuación anterior se convierte en:

$$-v_1' \operatorname{sen} x + v_2' \cos x = \frac{1}{1+x} \qquad (62)$$

Las ecuaciones para $(v_1', v_2')$ son (61) y (62). Este sistema es familiar y fácil de resolver como un sistema de ecuaciones lineales. Hay varias opciones, tales como la matriz aumentada, la regla de Cramer o el método de eliminación. Usaremos este último método para resolver $(v_1', v_2')$. Para eliminar $v_2'$ multiplicamos (61) por cos x, multiplicamos (62) por - sen x y sumamos para obtener el resultado:

$$v_1'(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{x+1}$$

Como $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, tenemos:

$$v_1' = -\frac{sen\ x}{1+x}$$

Se puede ahora determinar $v_2'$ de (61):

$$v_2' = \frac{\cos x}{1+x}$$

Como estas dos últimas ecuaciones no se pueden integrar explícitamente, usamos la definición de integral:

$$v_1 = -\int_0^x \frac{sen\ t}{t+1}dt + C_1$$

$$v_2 = \int_0^x \frac{cos\ t}{t+1}dt + C_2$$

Por conveniencia escogemos el límite inferior como cero.

Una solución está formada por:

$$Y = \text{sen } x \int_0^x \frac{cos\ t}{t+1}dt - \cos x \int_0^x \frac{cos\ t}{t+1}dt + C_1 \cos x + C_2 sen\ x \quad (63)$$

Si las constantes arbitrarias $C_1$ y $C_2$ se mantienen, la solución general de la ecuación diferencial dada es obtenida.

Si las constantes son cero o algún otro valor específico, entonces la solución dada es una solución particular.

## Función de influencia

A pesar de que la solución general en (63) es correcta y satisfactoria para la ecuación diferencial dada, algunas manipulaciones algebraicas nos permiten dar un importante e interesante resultado.

Como la variable t es una variable muda de integración, la función de t puede ser tomada dentro de la integral y las dos integrales combinadas así:

$$y = \int_0^t \frac{sen\, x \cos t - \cos x\, sen\, t}{t+1}\, dt + C_1 \cos x + C_2 sen\, x \qquad (64)$$

Además, si usamos la fórmula de la adición de funciones trigonométricas, sen (a – b) = se n a.cos b – cos a. sen b, entonces tenemos de la fórmula (64):

$$y = \int_0^t \frac{sen\,(x-t)}{t+1}\, dt + C_1 \cos x + C_2 sen\, x \qquad (65)$$

La solución de la ecuación diferencial representa la respuesta a la entrada 1/(x+1). Esto es que la solución en un tiempo x (llamada la respuesta) es la suma (de hecho, una parte de la integral) de todas las entradas desde x = 0 (el tiempo presente).

La función sen (t – x) es una función de ponderación. Esta es una **función de influencia** llamada la **función de Green,** lo cual representa la contribución de la respuesta en x dada por las entradas en t:

$$G(x, t) = sen\,(x - t).$$

Usando esta notación, la solución de la ecuación diferencial dada es:

$$y = \int_0^t G(x,t)\, \frac{1}{t+1}\, dt + C_1 \cos x + C_2 sen\, x$$

Una ventaja de dar la solución de la ecuación diferencial en esta forma, es que si la entrada cambia, entonces es fácil cambiar la solución de tal manera que quede acorde a ella. En efecto, esto se puede ver si la entrada no está especificada, por ejemplo:

$$y'' + y = f(x)$$

Entonces la solución general se puede escribir como:

$$y = \int_0^t G(x,t) f(t)\, dt + C_1 \cos x + C_2 sen\, x$$

Donde G(x, t) es la función de Green, dada anteriormente.

Es también interesante notar la manera en la cual las condiciones iniciales se satisfacen.

Evaluando (65) en x = 0 se tiene:

$$y\,(0) = C_1$$

En este ejemplo también se puede mostrar (pero no es fácil) que:

$$y'(0) = C_2$$

### Resumen del método de variación de parámetros

La variación de parámetros (para ecuaciones de segundo orden) es un método para calcular una solución particular de $y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = f(x)$, dados un conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, y_2\}$ de la ecuación homogénea asociada $y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$. El método es como sigue:

a. Encontrar un conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, y_2\}$ de $y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$.

b. Después de sustituir $y = v_1y_1 + v_2y_2$, se resuelve el sistema algebraico de ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0 \qquad (66)\\ v_1'y_1 + v_2'y_2 &= f(x) \end{aligned}$$

c. Para las funciones $v_1', v_2'$.

d. Se buscan las antiderivadas para encontrar $v_1$ y $v_2$.

e. Entonces $y = v_1y_1 + v_2y_2$ es una solución particular de $y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = f(x)$.

$y = v_1y_1 + v_2y_2 + C_1\,y_1 + C_2\,y_2$ es la solución general de $y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = f(x)$.

## Observación:

1. Si constantes arbitrarias son introducidas en el paso c, cuando encontramos $v_1$ y $v_2$, entonces $y = v_1\, y_1 + v_2\, y_2$, será la solución general.
2. Los coeficientes de $v_1'$ y $v_2'$ en (66) son las entradas de la matriz:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es el Wronskiano. Como el Wronskiano de un conjunto fundamental de soluciones es siempre diferente de cero, se sigue de la teoría de matrices (regla de Cramer) en la que el sistema siempre tiene solución única para $v_1'$ y $v_2'$. Luego la única dificultad está en el paso a.

3. Dos comentarios son importantes en su orden. Primero, que el hecho algebraico llamado la regla de Cramer, puede ser aplicado al sistema de ecuaciones (66) para dar las fórmulas para $v_1'$ y $v_2'$. Ellas son:

$$v_1' = \frac{det\begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}} \quad y,\, v_2' = \frac{det\begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}}$$

Evaluando los determinantes dados se tiene:

$$v_1' = -\frac{f(x)y_2}{W[y_1,y_2]} \quad y,\, v_2' = \frac{f(x)y_1}{W[y_1,y_2]} \quad (67)$$

Donde $W[y_1,y_2]$ es el Wronskiano de $y_1$ y, $y_2$. Entonces:

$$v_1 = -\int \frac{f(x)y_2}{W[y_1,y_2]}dt,\, y\; v_2 = \int \frac{f(x)y_1}{W[y_1,y_2]}dt \qquad (68)$$

Y, $y = v_1\, y_1 + v_2\, y_2$, la solución general aplica si dos constantes resultan cuando integramos (67). Si no se introducen constantes cuando integramos, entonces se tiene una solución particular.

Segundo, en la práctica es probablemente más rápido usar (67) para encontrar $v_1'$ y $v_2'$, que resolver (66) directamente.

## Ejemplo 34. Variación de parámetros:

Encontrar la solución general de:

$$2y'' - 4y' + 2y = x^{-1}e^{x}, \text{ para } x > 0$$

### Solución:

Observe que la función $x^{-1}e^{x}$ no es del tipo de función forzada a la cual se le pueda aplicar el método de los coeficientes indeterminados. Sin embargo, la ecuación diferencial tiene coeficientes constantes, luego conocemos cómo resolver la ecuación homogénea asociada. Podemos resolver esta ecuación por el método de variación de parámetros. Escribimos la ecuación dada como:

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{2}x^{-1}e^{x}$$

Luego:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^{-1}e^{x}$$

**Paso 1:** resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada $y'' - 2y' + y = 0$. Sustituyendo por $y = e^{rx}$, la ecuación característica es $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0$', con lo cual r = 1, es una raíz de multiplicidad dos. Luego $\{e^x, x\,e^x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones. Sea $y_1 = e^x$, $y_2 = x\,e^x$.

**Paso 2.** $y_1 = e^x$, $y_2 = x\,e^x$:

$$W[e^x, xe^x] = det\begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{bmatrix} = e^{2x}$$

Y, $f(x) = \frac{1}{2}x^{-1}e^{x}$ entonces por (67) tenemos:

$$v_1' = -\frac{\frac{1}{2}x^{-1}e^{x}.xe^{x}}{e^{2x}} = -\frac{1}{2}$$

$$v_2' = \frac{\frac{1}{2}x^{-1}e^{x}.e^{x}}{e^{2x}} = \frac{x^{-1}}{2}$$

**Paso 3:**

$$v_1 = -\int \tfrac{1}{2}dx = -\tfrac{x}{2},$$

$$v_2 = \int \frac{x^{-1}}{2}dx = \frac{\ln x}{2}$$

**Paso 4 y 5:**

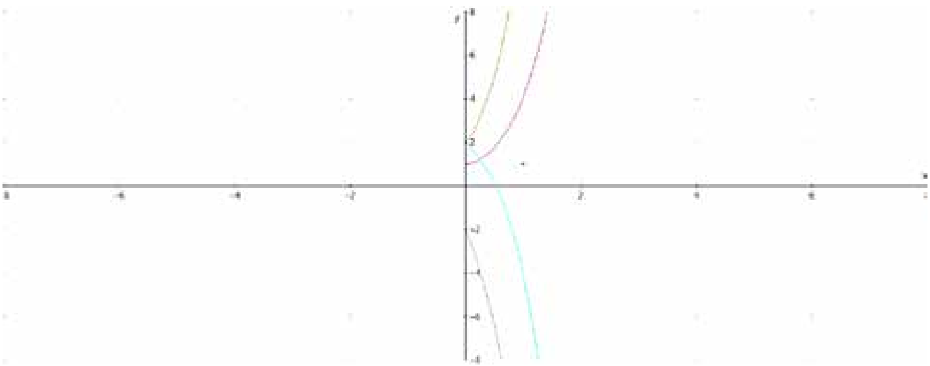
$$y = v_1y_1 + v_2y_2 + C_1y_1 + C_2y_2 = -\frac{x}{2}e^{x} + \frac{\ln x}{2}xe^{x} + C_1e^{x} + C_2xe^{x}$$

$$= \frac{-xe^{x}+xe^{x}\ln x}{2} + C_1e^{x} + C_2xe^{x}$$

Luego, la siguiente es la solución general de la ecuación diferencial:

$$2y'' - 4y' + 2y = x^{-1}e^{x}, \text{ para } x > 0$$

**Figura 15.** Gráfica de algunas soluciones de la ecuación diferencial.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

# 8.14 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 14, encuentre la solución de la ecuación diferencial dada por el método de variación de parámetros. Decida dónde el método de coeficientes indeterminados puede ser usado.

1. $y'' - y = e^{2x}$
2. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
3. $y'' + y = \frac{1}{sen\, x}$
4. $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$
5. $y'' + y = \tan x$
6. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$
7. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{2x}}$
8. $4y'' - y = x$
9. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}x^{3/2}$, $x > 0$
10. $y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$
11. $y'' + 4y' + y = x^{-2}e^{-x/2}$
12. $y'' + 5y' + 4y = e^{x}$
13. $y'' - 2y' - 6y = e^{-2x}$
14. $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}\cos(e^{x})$

15. Muestre que una solución particular de $y'' + P(x)$ $y' + Q(x)\, y = f(x)$, dada por variación de parámetros puede ser escrita por:

$$y_p(x) = \int_0^1 \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} f(t)dt$$

16. Muestre que la ecuación anterior da la única solución del problema con valor inicial $y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = f(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

En los ejercicios 17 al 20, encontrar la solución general por el método de variación de parámetros. En estos ejercicios una integral definida puede ser dada como en el ejercicio 28.

17. $y'' - y = e^{-x^2}$.

18. $y'' - 4y = sen\,(x^{\frac{1}{3}})$

19. $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{x+1}$

20. $y'' - 3y' + 2y = x^{1/5}$

# 8.15 Método de Variación de parámetros (de orden n)

El método de variación de parámetros dado en la sección anterior puede ser usado para ecuaciones diferenciales lineales de orden n, en la siguiente forma:

Supongamos que $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$$

Si $v_1'(x), \ldots, v_n'(x)$ satisface el sistema de ecuaciones lineales:

$$v_1'(x)y_1(x)+v_2'(x)y_2(x)+\ \ldots.+v_n'(x)y_n(x)=0$$

$$v_1'(x)y_1'(x)+v_2'(x)y_2'(x)+\ \ldots.+v_n'(x)y_n'(x)=0 \quad (69)$$

$$v_1'(x)y_1^{n-1}(x)+v_2'(x)y_2^{n-1}(x)+\ \ldots.+v_n'(x)y_n^{n-1}(x)=\frac{f(x)}{a_n(x)}$$

Entonces $y_p = v_1y_1 + v_2y_2 + \ldots.+v_ny_n$, es una solución particular de la ecuación diferencial dada.

En general, resolver el sistema dado para n > 2 puede ser un poco difícil. Para valores pequeños de n, por ejemplo 3 o 4, el sistema puede ser resuelto mediante la regla de Cramer. Para valores grandes de n, programas de computadores para la solución pueden ser usados.

La regla de Cramer para resolver el sistema dado anteriormente, toma la forma:

$$v_1' = \frac{det\begin{bmatrix} 0 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f(x)}{a_n(x)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{bmatrix}}{W[y_1,\cdots,y_n]} = (-1)^{n+1}f(x)\frac{det\begin{bmatrix} y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{bmatrix}}{a_n(x)W[y_1,\cdots,y_n]} \qquad (70)$$

En general:

$$v_i^{/} = (-1)^{n+i}\frac{f(x)}{a_i(x)}\frac{W_i}{W[y_1,\cdots,y_n]}$$

Donde W es el Wronskiano de $[y_1,\cdots,y_n]$, y $W_i$ es el Wronskiano de las n -1 funciones obtenidas por la eliminación de la columna $y_i$ del conjunto $[y_1,\cdots,y_n]$ del denominador de (70) y reemplazada por un columna de ceros salvo el último valor que es f(x)/an.

El siguiente ejemplo puede ser resuelto mediante el método de coeficientes, pero lo resolveremos mediante el método de variación de parámetros.

## Ejemplo 35. Variación de parámetros:

Resolver:

$$y^{///} - y^{//} = e^t$$

Por el método de variación de parámetros.

### Solución:

La ecuación diferencial dada tiene coeficientes constantes y haciendo $y = e^{rx}$, obtenemos la ecuación característica $r^3 - r^2 = r^2(r - 1) = 0$ con raíces r = 0, 0, 1, entonces $\{1, x, e^x\}$ forma un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea $y^{///} - y^{//} = 0$. Sea $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^x$. Entonces $a_3(x) = 1$, $n = 3$, y $f(x) = e^x$. El sistema de ecuaciones dado por (69) para esta ecuación diferencial es:

$$v_1^{/}.1 + v_2^{/}.1 + v_3^{/}.e^x = 0$$

$$v_1^{/}.0 + v_2^{/}.0 + v_3^{/}.e^x = 0$$

$$v_1^{/}.0 + v_2^{/}.0 + v_3^{/}.e^x = e^x$$

Luego para este ejemplo en particular es fácil resolver para cada una de nuestras funciones, y así obtener:

$$v_3' = 1, v_2' = -e^x, v_1' = xe^x - e^x \qquad (71)$$

Calculando las antiderivadas, tenemos:

$$v_3 = x, v_2 = -e^x, v_1 = xe^x - 2e^x$$

Entonces:

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = (xe^x - 2e^x).1 + (-e^x).x + x.e^x = xe^x - 2e^x$$

La solución general será:

$$Y = y_p + y_h = xe^x - 2e^x + C_1 + C_2 x + C_3 e^x = xe^x + C_1 + C_2 x + \ddot{C}_3 e^x$$

Supongamos, sin embargo, que en lugar de resolver el sistema directamente, vamos a utilizar la regla de Cramer, entonces se tiene:

$$W[1, x, e^x] = det\begin{bmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{bmatrix} = e^x$$

Y:

$$v_1' = (-1)^{3+1}\frac{e^x W[x, e^x]}{W[1, x, e^x]} = e^x \frac{det\begin{bmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{bmatrix}}{e^x} = xe^x - e^x,$$

$$v_2' = (-1)^{3+2}\frac{e^x W[1, e^x]}{W[1, x, e^x]} = -e^x \frac{det\begin{bmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix}}{e^x} = -e^x,$$

$$v_3' = (-1)^{3+3}\frac{e^x W[1, x]}{W[1, x, e^x]} = e^x \frac{det\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{e^x} = 1,$$

Estos son los mismos valores dados en (71).

# 8.16 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 4, resuelva la ecuación diferencial por el método de variación de parámetros y dar la solución general.

1. $y''' - y' = e^{2x}$
2. $y''' + y' = \frac{1}{sen\, x}$
3. $y'''' - y''' = x$
4. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{x}$
5. Verifique que $W[e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}] = e^{(a+b+c)x}(b-a)(c-a)(c-b)$

En los ejercicios 6 al 12, use el ejercicio 5 y el método de variación de parámetros para encontrar la solución general.

6. $y''' - y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$
7. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{x}$
8. $y''' + y'' - 4y' - 4y = x$
9. $y''' + 2y'' - y' - 2y = x$
10. $y''' - 3y'' - y' + 3y = sen\, x$
11. $y''' + 3y'' - y' - 3y = e^{x}$
12. $y''' - 3y'' + 2y' = e^{-x}. = x$
13. Verifique que $W[e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}] = 2e^{3ax}$

En los ejercicios 14 al 17, use el ejercicio 13 y el método de variación de parámetros para encontrar la solución general.

14. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^{1/2}e^{t}$

15. $y''' + 3y'' + 3y' + y = x^{-3}e^{-x}$

16. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = x^{-3}e^{-2x}$

17. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = x^{7/2}e^{2x}$

En los ejercicios 18 al 21, son dados el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada y f(x) y $a_n(x)$. Resuelva la ecuación diferencial usando el método de variación de parámetros.

18. $\{1, x, x^2, x^3\}, f(x) = x, a_4 = x$

19. $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}, f(x) = e^x, a_3 = 2$

20. $\{1, x^2, x^3\}, f(x) = x^{1/2}, a_3 = 1$

21. $\{1, x, x^{1/2}\}, f(x) = x^3, a_3 = x^2$

# 8.17 Ecuación de Cauchy-Euler

Se ha visto en las dos secciones anteriores que las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes siempre tienen solución, sin embargo, si los coeficientes son variables raramente tienen soluciones explícitas, las soluciones en este caso se dan por métodos numéricos o por el método de series de potencias, los cuales no analizaremos en este texto. En esta sección estudiaremos ecuaciones diferenciales con coeficientes variables de un tipo muy específico, donde las soluciones explícitas no son difíciles de obtener. La ecuación de segundo orden homogénea **de Cauchy-Euler** es:

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0$$

donde a, b y c son constantes y a ≠ 0. La ecuación de tercer orden de Euler es:

$$a_3x^3\frac{d^3y}{dx^3}+a_2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_0y=0$$

donde $a_3, a_2, a_1, a_0$ son constantes con $a_3 \neq 0$. Hay siempre una ecuación de Euler de primer orden,

$$ax\frac{dy}{dx}+by=0$$

La ecuación de Euler es conocida también como la ecuación de Cauchy-Euler o ecuación equidimensional. Este tipo de ecuación surge por ejemplo en algunos problemas de arrastre en los flujos uniformemente viscosos. Las ecuaciones de Euler no solo son importantes porque se usan en muchas aplicaciones, sino porque son usadas en aplicaciones más avanzadas de las ecuaciones diferenciales, tales como son los puntos de singularidad.

Consideraremos primero las ecuaciones diferenciales de Euler de segundo orden homogénea:

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0$$

Las potencias variables de esta ecuación van decreciendo en la medida que se van derivando para x en esta ecuación. Este hecho sugiere que la solución de dicha ecuación debe ser potencia de x, es decir que:

$$Y = x^m$$

Ya que las potencias tienen la propiedad que sus potencias van decreciendo cada vez que ellas son derivadas, entonces:

$$y' = mx^{m-1}$$

$$Y''=m\,(m-1)\,ym^{-2}$$

Esto es exactamente lo que se necesita para contrarrestar el aumento de potencia en el coeficiente de la variable de la ecuación de Cauchy -Euler.

Sustituyendo $y = x^m$, en $ax^2 y'' + b\,x\,y' + c\,y = 0$, nos da:

$$ax^2m\,(m-1)\,x^{m-2}+bxmx^{m-1}+c\,x^m=0\;[am(m-1)+bm+c]x^m=0$$

De donde:

$$a\,m\,(m-1)+bm+c=0$$

$$am^2+(b-a)\,m+c=0$$

La cual es llamada **la ecuación de índices.**

## Caso 1. Raíces reales distintas

Si el polinomio $am^2 + (b-a)\,m + c = 0$ tiene dos raíces reales distintas $m_1$, $m_2$, entonces $x^{m_1}, x^{m_2}$ nos dan un conjunto fundamental de soluciones. En este caso la solución general de la ecuación de Euler de segundo grado es:

$$y=C_1x^{m_1}+C_2r^{m_2}$$

## Ejemplo 36. Raíces reales distintas:

Encuentre la solución general de:

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+7x\frac{dy}{dx}-3x=0, x>0$$

### Solución:

Es bueno para el estudiante que obtenga la ecuación de índices las primeras veces. Basta hacer y = $x^m$ en la ecuación diferencial dada y luego dividir por $x^m$ para obtener la ecuación de índices:

$$2m\,(m-1)+7m-3=0$$

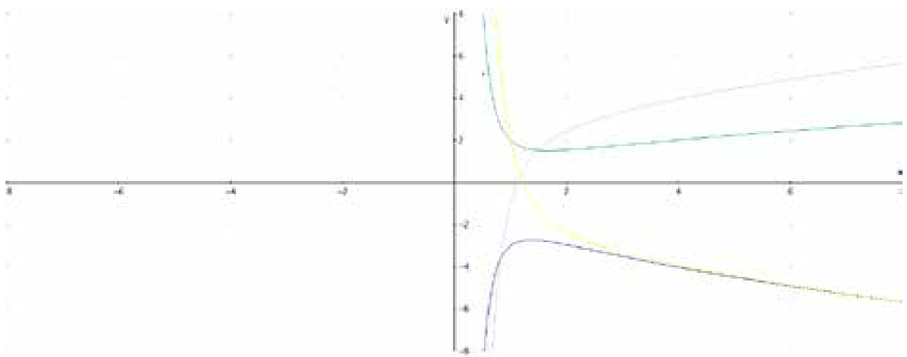
O:

$$2m^2+5m-3=(2m-1)(m+3)=0$$

Luego, las raíces son m = ½, - 3, y la solución general es:

$$Y=C_1x^{1/2}+C_2x^{-3}$$

**Figura 16.** Gráficas de algunas soluciones de la ecuación diferencial.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Caso 2. Raíces complejas conjugadas

Si la ecuación de índices tiene raíces complejas $m_1 = \alpha + \beta i, m_2 = \alpha - \beta i,$ entonces la solución general es:

$$y = C_1 x^{\alpha+\beta i} + C_2 e^{\alpha-\beta i} = x^{\alpha}\left(C_1 x^{\beta i} + C_2 x^{-\beta i}\right)$$

Pero por la propiedad de la exponencial (para x > 0) se tiene:

$$m^{i\beta} = e^{i\beta lnx}$$

Entonces nuestra ecuación para y se transforma en:

$$y = e^{\alpha}\left(C_1 e^{i\beta \ln x} + C_2 e^{-i\beta lnx}\right)$$

Ya mostramos, usando la ecuación de Euler, que una combinación lineal de $e^{\pm i\theta}$ es equivalente a una combinación lineal de cos $\theta$ y sen $\theta$. Para nuestro caso $\theta = \beta \ln x$. Entonces, cuando las raíces de la ecuación de índices para la ecuación de Cauchy-Euler sean números complejos $\alpha \pm \beta i$, la solución general es:

$$y = x^{\alpha}[Acos(\beta lnx) + Bsen(\beta lnx)]$$

O de forma equivalente:

$$y = [Ax^{\alpha}cos(\beta lnx) + Bx^{\alpha}sen(\beta lnx)]$$

## Ejemplo 37. Raíces complejas conjugadas:

Encontrar la solución general de:

$$9x^2 y^{//} + 15\, xy^{/} + 5y = 0\,,\, x > 0.$$

## Solución:

Haciendo $y = x^m$ se obtiene la ecuación de índices 9.m. (m – 1) + 15 m + 5 = $9.m^2 + 6m + 5 = (3m + 1)^2 + 4 = 0$, cuyas raíces son:

$$m = -\frac{1}{3} \pm i\frac{2}{3}$$

Como $x^m = x^{-\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3}i} = x^{-\frac{1}{3}}x^{\pm\frac{2}{3}}$, la solución general es:

$$y = C_1x^{-1/3}\cos\left(\frac{2}{3}\ln x\right) + C_2x^{-1/3}sen\left(\frac{2}{3}\ln x\right)$$

**Figura 17.** Gráficas de algunas soluciones de la ecuación diferencial.

**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

## Caso 3: Raíces reales repetidas:

Si la ecuación de índices am (m – 1) + b.m + c = 0 tiene raíces repetidas x = $m_1$, entonces solamente una solución homogénea es asumida de la forma $y = x^{m_1}$. La segunda solución homogénea se puede encontrar siempre por el método de reducción del orden estudiado anteriormente. En el caso de raíces repetidas para la ecuación de Euler, la segunda solución es siempre de la forma:

$$y = x^{m_1}\ln x$$

Veamos este hecho con un ejemplo.

## Ejemplo 38. Usando la reducción del orden:

Encontrar la solución general de:

$$x^2y'' - 7\,x\,y' + 16x = 0,\ x > 0$$

## Solución:

Sea y = $x^m$, esto nos lleva a la ecuación de índices m (m – 1) – 7m + 16 = $m^2$ – 8m + 16 = $(m – 4)^2$ = 0, con lo cual m = 4 es una raíz de multiplicidad dos. Como tenemos que una solución es y = $x^4$, la segunda solución para el conjunto fundamental de soluciones puede ser encontrada por reducción del orden, sea y = v.$x^4$.

Entonces de la ecuación diferencial dada y usando la regla del producto, se tiene:

$$x^2\left(v^{//}x^4 + 2v^{/}4x^3 + v12x^2\right) - 7x\left(v^{/}x^4 + v4x^3\right) + 16vx^4 = 0, x > 0$$

Los términos que contienen la variable v se cancelan, ya que $x^4$ es una solución, y se reduce a:

$$x^6v^{//} + v^{/}x^5 = 0$$

Dividiendo por $x^5$ tenemos:

$$x.v^{//} + \ v^{/} = 0$$

Por el método de reducción del orden, tenemos:

$$W = v^{/}.$$

Luego nuestra ecuación anterior se convierte en:

$$xw^{/} + w = 0$$

Separando variables:

$$\frac{dw}{w} = -\frac{dx}{x}$$

Entonces (como se tiene que x > o):

$$ln|w| = -\ln x + C$$

Tomando exponencial, se tiene:

$$w = \frac{C_1}{x}$$

Como w = v/, tenemos:

$$v^{/} = \frac{C_1}{x}$$

Integrando, se tiene:

$$V = C_1 \ln x + C_2$$

De donde:

$$Y = x^4.v = x^4(C_1 \ln x + C_2) = C_1x^4 \ln x + C_2x^4$$

Entonces la segunda solución linealmente independiente es $x^4 \ln x$.

De ahora en adelante, para obtener la solución general de una ecuación de Euler, cuando hay una raíz repetida, $m_1$ tenga en cuenta que la segunda solución es $x^{m_1} lnx$ y no use el método de reducción de orden a menos que se le indique.

## Ejemplo 39. Raíces repetidas:

Encuentre la solución general de:

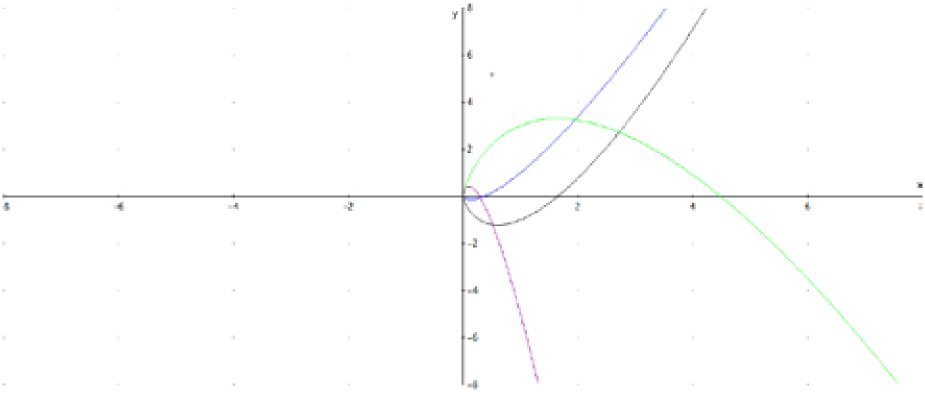
$$x^2y^{//} - xy^{/} + y = 0, x > 0$$

### Solución:

Haciendo y = $x^m$ tenemos la ecuación de índices $m(m-1) - m + 1 = m^2 - 2r + 1 = (m-1)^2 = 0$, la cual tiene raíz repetida a 1. Entonces:

$$Y = C_1 x \ln x + C_2 x, x > 0$$

**Figura 18.** Gráficas de algunas soluciones de la ecuación diferencial.



**Fuente.** Elaborada por el autor con el programa Derive.

En resumen, tenemos el siguiente teorema de todo lo visto en esta sección:

### Teorema: ecuación de Cauchy-Euler

La solución general de la ecuación de segundo orden de Euler:

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

está dada como sigue. Por sustitución $y = x^m$, obtenemos la ecuación de índices am (m – 1) + b. m + c = 0. Encontrar las raíces $m_1$, $m_2$:

1. Si $m_1 \neq m_2$ y $m_1$, $m_2$ son números reales, entonces: $y = C_1x^{m_1} + C_2r^{m_2}$.

2. Si $m_1 = \alpha + \beta i, m_2 = \alpha - \beta i, \beta \neq 0$, entonces: $y = [C_1x^{\alpha}cos(\beta lnx) + C_2x^{\alpha}sen(\beta lnx)]$

3. Si $m_1 = m_2$, entonces: $y = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_1}\ln x$

## Ejemplo 40. Un ejemplo de la ecuación de Cauchy-Euler para grado mayor que dos:

Encuentre la solución general de:

$$X^3\, y^{///} + 5x^2y^{//} + 7xy^{/} + 8y = 0.$$

### Solución:

Haciendo $y = x^m$ y calculando las tres primeras derivadas, se tiene:

$$y^{/} = m\, x^{m-1},\ y^{//}=m(m-1)x^{m-2},\ y^{///} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

Luego la ecuación dada se convierte en:

$$x^3\, y^{///} + 5x^2y^{//} + 7xy^{/} + 8y= x^3m(m-1)(m-2)x^{m-3}+5x^2m(m-1)x^{m-2}+7xmx^{m-1}+8x^m$$

$$= x^{m'}[m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 7m + 8]$$

$$= x^m\,(m^3 + 2m^2 + 4m + 8) = x^m\,(m+2)\,(m^2 + 4) = 0$$

En este caso se tiene que $m_1 = -2$, $m_2 = 2i$, y $m_3 = -2i$ son las raíces de dicha ecuación; por lo tanto, la solución general está dada por:

$$Y = C_1\, x^{-2} + C_2 \cos(2\ln x) + C_3 \operatorname{sen}(2\ln x)$$

Si la ecuación de Euler no es homogénea, es decir es de la forma:

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

En general el método de coeficientes indeterminados no se aplica para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables. Por lo tanto, el mejor método es el de variación de parámetros, veamos un ejemplo:

## Ejemplo 41. Un ejemplo de la ecuación de Cauchy - Euler no homogénea:

Encuentre la solución general de:

$$x^2y^{//} - 3xy^{/} + 3y = 2x^4e^x$$

### Solución:

Como se trata de una ecuación diferencial no homogénea, primero resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada a la ecuación diferencial lineal dada. Resolveremos primero la ecuación diferencial $x^2y^{//} - 3xy^{/} + 3y = 0$. De la ecuación de índice se tiene que $(m-1)(m-3) = 0$, luego $y_h = C_1 x + C_2 x^3$. Ahora recordemos que para hallar $y_p$ debemos encontrar $v_1$ y $v_2$ tales que $y_p = v_1y_1 + v_2y_2$ y que $v_1^{/} = \frac{W_1}{W}, v_2^{/} = \frac{W_2}{W}$ , donde $W_1$, $W_2$ y W son los determinantes que se definieron cuando definimos el método de variación de parámetros. Por lo tanto, dividiendo la ecuación dada por $x^2$ tenemos que:

$$y^{//} - \frac{3}{x}y^{/} + \frac{3}{x^2} = 2x^2e^x$$

Tomando $f(x) = 2x^2e^x$, $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, se tiene que:

$$W = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3, W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -2x^5e^x, W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x$$

Luego se tiene que:

$$v_1^{/} = -\frac{2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x, \ y\ v_2^{/} = \frac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x$$

La integral de esta última función es inmediata, es decir que $v_2 = e^x$ y para hallar $v_2$, se tiene que hacer integración por partes dos veces y se obtiene:

$$v_1 = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$$

Por lo tanto, $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$ es:

$$y_p(-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x)x + x^3e^x = 2x^2e^x - 2xe^x$$

Luego la solución general será:

$$y = y_h + y_p = C_1x + C_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^x$$

## Método alternativo para resolver ecuaciones de Cauchy-Euler

La similitud entre las formas de las soluciones de las ecuaciones de Cauchy – Euler y las soluciones de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes, no son solo una coincidencia. Así por ejemplo, cuando las raíces de la ecuación auxiliar de ay// + b y/ + c y = 0, y la ecuación de índices de la ecuación de Cauchy-Euler son reales y distintos $x^2$y//+ b x y/ + c y = 0, las soluciones generales respectivas son:

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}, y\ y = C_1x^{m_1x} + C_2x^{m_2x}, x > 0$$

Usando la identidad $e^{\ln x} = x, x > 0$, se puede ver que la segunda solución dada puede expresarse en la misma forma que la primera solución, esto es:

$$y = C_1e^{m_1 lnx} + C_2e^{m_2 lnx} = C_1x^{m_1r} + C_2x^{m_2r}$$

Donde r = ln x. Este último resultado ilustra el hecho de que cualquier ecuación de Cauchy-Euler siempre se puede escribir como una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, haciendo la sustitución x = $e^r$.

## En resumen

Dada la ecuación diferencial de Cauchy-Euler de la forma:

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

Donde a, b y c son constantes, entonces:

1. Si x > 0, transforme la variable independiente de la x a r, donde: x = $e^r$

De modo que:

$$r = \ln x,$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dr} \qquad (72)$$

Y:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dr^2} - \frac{dy}{dr} \qquad (73)$$

(Si x < 0, utilice la transformación x = - $e^r$ de modo que la transformación nos lleva a r = ln (-x) y las otras ecuaciones quedan iguales).

2. Sustituir (72) y (73) en la ecuación de Cauchy-Euler dada, y simplificar los términos semejantes, así se tiene:

$$b_2\frac{d^2y}{dr^2} + (b_1 - b_2)\frac{dy}{dr} + b_0y = 0 \qquad (74)$$

La cual es una ecuación diferencial lineal de segundo grado con coeficientes constantes.

3. Resuelva (74) para y = y(r).

4. Utilice el cambio de variables dado inicialmente y la solución y = y(r) obtenida en el paso 3 para encontrar la solución final y = y(r).

## Ejemplo 42. Forma alternativa para resolver la ecuación de Cauchy-Euler:

Resuelva el problema con valor inicial:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+5y=0, y(1)=0, y'(1)= 6$$

### Solución:

Cambiamos la variable independiente de x a r usando el cambio de variable x = $e^r$. Sustituyendo (72) y (73) en la ecuación diferencial dada, obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+5y=0$$

Esta ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes tiene la ecuación característica $t^2 + 2t + 5 = (t + 1)^2 + 4 = 0$, de manera que las solución general $y^r = C_1e^{-r}\cos 2r + C_2e^{-r}\operatorname{sen} 2r$. En términos de las variables originales, esto se convierte en:

$$Y(x) = C_1x^{-1}\cos(2lnx)+C_2x^{-1}sen(2lnx)$$

Aplicando las condiciones iniciales se obtiene $C_1 = 0$, $C_2 = 3$, de modo que la solución particular será:

$$y(x)=3x^{-1}sen(2lnx)$$

## Ejemplo 43. Buscando una solución particular:

Encuentre una solución particular de:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=\frac{2}{x+1}, \text{ para } x>0$$

### Solución:

El primer paso es resolver la ecuación diferencial homogénea asociada:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$$

Haciendo el cambio de variable y = $e^r$, sustituyendo de acuerdo a (72) y (73) en la ecuación diferencial llegamos a:

$$\frac{d^2y}{dr^2} - y = 0$$

cuya solución es y( r ) = $C_1e^r + C_2e^{-r}$. En términos de la variable x, la solución de la ecuación diferencial está dada por:

$$Y(x) = = C_1x + C_2x^{-1}$$

Como tenemos dos soluciones linealmente independientes, podemos utilizar el método de variación de parámetros, de manera que podemos hacer:

$$Y_p = x.v_1 + x^{-1}.v_2$$

De modo que $v_1^/, v_2^/$ satisfagan las ecuaciones:

$$x.\, v_1^/ + x^{-1}.\, v_2^/ = 0,$$

$$v_1^/ - x^{-2}v_2^/ = 2/[x^2(x+1)]$$

Resolviendo el sistema para $v_1^/$ multiplicando la primera ecuación por $x^{-1}$ y sumándola a la segunda ecuación del sistema anterior, se tiene:

$$v_1^/ = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

De donde se obtiene para $v_2^/$:

$$v_1^/ = -x^2v_1^/ = \frac{-1}{x+1}$$

Integrando esta ecuación tenemos:

$$v_2 = -\ln(x+1)$$

Para hallar la antiderivada de $v_1$, primero volvemos a escribir la forma de $v_1'$, usando fracciones parciales:

$$v_1' = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

Luego integrando, tenemos:

$$V_1 = -\ln x - x^{-1} + \ln(1+x)$$

Por lo tanto, la solución particular será:

$$y_p = x\ln(1+x) - 1 - x^{-1}\ln(1+x)$$

# 8.18 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 12, resuelva la ecuación diferencial de segundo orden de Cauchy-Euler para x > 0. Si no hay condición inicial, dé la solución general.

1. $x^2y'' + xy' - y = 0$.
2. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$.
3. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$.
4. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$, y $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$
5. $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$.
6. $x^2y'' + xy' + y = 0$.
7. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$
8. $9x^2y'' + 15xy' + 2y = 0$
9. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$
10. $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
11. $x^2y'' + 3xy' + 8y = 0$
12. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$
13. Por simple observación de las respuestas de los ejercicios 1 al 12, encuentre la ecuación de Cauchy-Euler cuya ecuación de índice tiene raíces repetidas. Para

estos ejercicios, encuentre la segunda solución usando el método de reducción del orden.

14. Encuentre la solución general de $5x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = 0$ usando separación de variables. Compare su respuesta con la solución obtenida usando el método de esta sección.

15. **(Equi-dimensionalidad)**. Sea k una constante y realice el cambio de variable por Ks.

a. Muestre que la ecuación de Cauchy-Euler:

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

Se convierte en:

$$as^2\frac{d^2y}{ds^2} + bs\frac{dy}{ds} + cy = 0$$

Es decir, la ecuación de Euler permanece inalterada mediante este cambio de escala de la variable independiente.

b. Esto contrasta con lo que sucede cuando se realiza el mismo cambio de escala en la ecuación de coeficiente constante a $y'' + b\,y' + c\,y = 0$.

c. Verifique que si $k > 0$ es un número real constante y $m_1$, $m_2$ son constantes reales distintas, entonces $x = k\,s$ cambia:

$$y = C_1x^{m_1} + C_2r^{m_2}$$

En:

$$y = As^{m_1} + Bs^{m_2}$$

d. Verifique que si $k > 0$ y $m_1$ es un número real constante, entonces $x = k\,s$ cambia:

$$y = C_1x^{m_1} + C_2r^{m_2}$$

En:

$$y = As^{m_1} + Bs^{m_2}$$

e. Verifique que, si K > 0 y $\alpha, \beta$ son constantes reales, $\beta \neq 0$, entonces x = ks cambia:

$$[C_1 x^{\alpha} cos(\beta lnx) + C_2 x^{\alpha} sen(\beta lnx)]$$

En:

$$[As^{\alpha} cos(\beta lns) + Bs^{\alpha} sen(\beta ln)]$$

---

16. Verifique qué transforma haciendo el cambio de variable y = ln x la ecuación de Cauchy-Euler:

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

En la ecuación de segundo orden con coeficientes constantes:

$$a\frac{d^2y}{dr^2} + (b-a)\frac{dy}{dr} + cy = 0.$$

---

La ecuación de Cauchy-Euler de cualquier orden se puede resolver haciendo el cambio de variable y = $x^r$, como se mostró en los ejemplos 36 y 37. Resuelva los siguientes ejercicios siguiendo dichos procesos:

17. $x^4 y^{(4)} + 6x^3 y^{(3)} + 7x^2 y^{(2)} + xy^{(1)} - y = 0.$

18. $x^4 y^{(4)} + 6x^3 y^{(3)} + 9x^2 y^{(2)} + 3xy^{(1)} + y = 0$

19. $x^3 y^{(3)} + xy^{(1)} - y = 0$

20. $x^3 y^{(3)} + 4x^2 y^{(2)} = 0$

Ediciones

## Misión

"Contribuir a la formación integral de la persona y estimular su aptitud emprendedora, de tal forma que su acción coadyuve al desarrollo económico y social de los pueblos".

## Visión

"Ser líder en la formación de profesionales, reconocidos por su espíritu empresarial".

Teléfono: 5936464
Calle 79 # 11 - 45
Bogotá D.C. - Colombia - Sur América
www.universidadean.edu.co

http://editorial.universidadean.edu.co