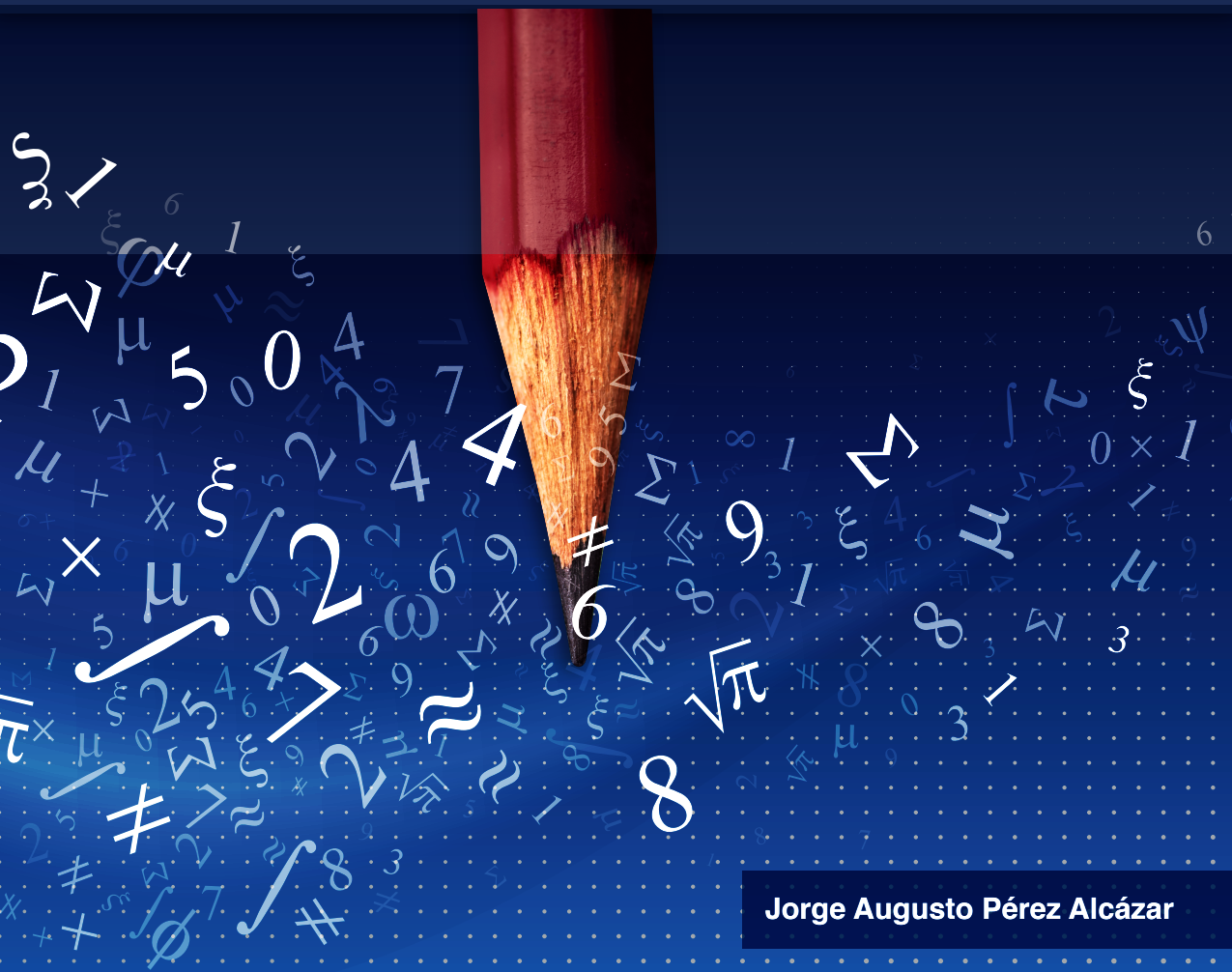


Nivelación en matemáticas básicas



Jorge Augusto Pérez Alcázar



Nivelación, capacitación y evaluación matemática

Autor
Jorge Augusto Pérez Alcázar



Catalogación en la fuente: Biblioteca Universidad EAN

Pérez Alcázar, Jorge Augusto

Nivelación, capacitación y evaluación matemática
Jorge Augusto Pérez Alcázar. -- Bogotá : Universidad EAN, 2016.
351 p.

ISBN: 978-958-756-427-3

1. Matemáticas - Enseñanza superior
2. Números racionales
3. Números reales
4. Números naturales

510.78 CDD 23

Catalogación en la fuente: Biblioteca Universidad EAN



Edición

Gerencia de Investigaciones

Revisor de estilo

Sonia Sánchez

Diagramador

César Augusto Rubiano Moreno

Diseño de carátula

Karen Olivia Sandoval Rojas

Finalización y ajustes

César Augusto Rubiano Moreno

Publicado por Ediciones EAN 2016.
Todos los derechos reservados.
ISBN: 978-958-756-427-3

© Universidad EAN: SNIES 2812 | Personería Jurídica Res. N°.2898 del Minjusticia - 16/05/69,
Carrera 11 No. 78-47 Bogotá D.C., Colombia, 2016. Prohibida la reproducción parcial o total de
esta obra sin autorización de la Universidad EAN®

Producido en Colombia.
Ankla Editores S.A.S., Carrera 69 i # 71- 28, Bogotá D.C., Colombia, 2016

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	6
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	8
OBJETIVOS	9
JUSTIFICACIÓN	10
MARCO TEÓRICO	14
METODOLOGÍA	23

CAPÍTULO 1

LOS NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS	25
1.1 Los números naturales y sus operaciones	27
1.1.1 Divisibilidad	28
1.1.2 Tres reglas de divisibilidad	30
1.1.3 Descomposición en factores primos	33
1.1.4 Máximo común divisor	37
1.1.5 Mínimo común múltiplo	45
1.2 Los números enteros	49
1.2.1 Operaciones con los números enteros	53
1.2.1.1 Suma y resta de enteros	53
1.2.2 Multiplicación y división de números enteros	55
1.2.2.1 Multiplicación	55
1.2.2.2 División	57
1.3 Cálculo con expresiones literales	58
1.3.1 Propiedades de las operaciones con números enteros	58
1.4 Evaluación 1	63

CAPÍTULO 2

LOS NÚMEROS RACIONALES	73
2.1 Introducción	75
2.2 Fracciones equivalentes	80
2.3 Amplificación y simplificación de fraccionarios	83
2.4 Notación	88

2.5 Representación gráfica de las fracciones irreducibles	90
2.5.1 Representación gráfica	92
2.6 Adición de números fraccionarios	97
2.6.1 Adición de fracciones homogéneas	97
(fracciones con el mismo denominador)	
2.7 Adición de fracciones que tienen distinto denominador.....	102
2.8 Propiedades de la adición de números fraccionarios.....	106
2.9 Sustracción de fracciones	111
2.10 Ecuaciones con fracciones	113
2.11 Multiplicación de fracciones	118
2.11.1 Multiplicación de un entero por una unidad fraccionaria.	118
2.11.2 Multiplicación de dos unidades fraccionarias.....	121
2.11.3 Propiedades de la multiplicación de las fracciones.....	127
2.11.4 División de números fraccionarios	135
2.11.5 Solución de ecuaciones de la forma	138
2.12 La potenciación en los números fraccionarios	141
2.12.1 Propiedades de la potenciación	143
2.12.1.1 Productos de potencias que tienen la misma base	143
2.12.1.2 Potencia de una potencia	144
2.12.1.3 Productos de potencias que tienen el	
mismo exponente	145
2.12.1.4 Exponentes enteros	146
2.13 Orden en los números fraccionarios	152
2.14 Expresión decimal de una fracción	155
2.14.1 Paso de la expresión fraccionaria a la decimal	159
2.14.2 Paso de la expresión decimal a la fraccionaria	160
2.15 Otro modo de definir una fracción	164
2.15.1 Porcentajes	164
2.16 Expresiones literales	170
2.2 Evaluación 2	173

CAPÍTULO 3

LOS NÚMEROS REALES	189
3.1 Radicación	190
3.2 Propiedades de las raíces cuadradas	193
3.3 Extracción de la raíz cuadrada	196
3.4 Raíces cúbicas y de índice superior	198

3.5 Simplificación de radicales	201
3.6 Teorema de Pitágoras	204
3.7 Números irracionales	209
3.8 Los números reales y la recta real	212
3.9 El valor absoluto	219
3.10 Distancias entre puntos	222
3.11 Potencias y raíces	226
3.12 Ecuaciones de segundo grado	234
3.13 Exponenciales y logaritmos	240
3.13.1 Exponencial	240
3.13.2 Logaritmos	244
3.13.3 Propiedades de los logaritmos	246
3.14 Evaluación 3	252
Bibliografía	350

INTRODUCCIÓN

El diseño y elaboración del texto en línea para un autoaprendizaje sobre los conceptos básicos de matemáticas para los diferentes programas de la Universidad EAN, es una estrategia-metodología que enriquece la experiencia docente en sus procesos de enseñanza y dinamizan el rol del estudiante en sus procesos de autoaprendizaje.

El modelo pedagógico de la Universidad EAN busca desarrollar en los estudiantes a través de las competencias: saber ser, saber hacer y saber tener, mediante la potencialización de habilidades, destrezas, actitudes y conocimientos básicos de las diferentes unidades de estudio. En particular en las unidades de estudio de matemáticas, la propuesta pretende dar una manera de nivelar las carencias que se vienen encontrando en nuestros estudiantes de primer semestre y aún de semestres superiores en cuanto a los conocimientos básicos de aritmética y geometría, resolución de problemas, competencias argumentativas, interpretativas y pensamiento crítico. Para el Departamento de Ciencias Básicas, es claro que no se pueden desarrollar las competencias si no se tienen las herramientas mínimas en dicha unidad del conocimiento, tal como sucede con un computador con mucha capacidad pero sin el *Software* apropiado.

La propuesta presenta la elaboración de un texto en línea que le permita a partir de auto aprendizaje a todos los estudiantes de primer semestre de la Universidad EAN y a aquellos que por alguna razón no tienen o no recuerdan ciertos conceptos básicos de la matemáticas, una nivelación conceptual en las ideas y herramientas de la aritmética, la geometría y la preálgebra, que buscan desarrollar y aplicar los conocimientos de esta disciplina a través de estrategias de enseñanza que dinamicen el papel de los estudiantes en su autoaprendizaje; promoviendo el aprendizaje significativo y autónomo que generará un conocimiento contextualizado y aplicable a su cotidianidad, fortaleciendo las competencias antes mencionadas y por ende su actitud hacia las matemáticas.

Este proyecto surge a partir de dos premisas básicas: la primera del seguimiento que se ha venido realizando a las diferentes pruebas de entrada que por parte del Departamento de Ciencias Básicas se han efectuado semestre tras semestre, en donde se evidencia efectivamente una carencia en las competencias planteadas y la segunda, de las diferentes reuniones y charlas con los docentes del departamento, en donde no es extraño escuchar que los estudiantes no vienen con las habilidades y destrezas fundamentales de la aritmética y de la geometría, para poder realizar los cursos de nivel superior.

Para los docentes es preocupante que los estudiantes no puedan resolver un problema que implique operaciones con fracciones, porcentajes, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, etc., que impiden y desmotivan su desarrollo en las unidades de estudio de su pensum académico. Es por esto que sobre un marco referencial que sustente teórica y contextualmente la propuesta y un seguimiento a las evaluaciones en línea que el estudiante debe realizar; y después de estudiar cada una de las tres unidades planteadas en el texto, se puede analizar la eficacia de dicho texto virtual, en cuanto puedan llenar los vacíos, deficiencias conceptuales y operativas de los conceptos básicos en la matemática elemental que traen los estudiantes de primer semestre.

La presentación del texto en línea está organizada desde la exploración disciplinar de las unidades básicas de auto aprendizaje y su publicación, finalizando con el análisis y posterior evaluación de la eficiencia del mismo en los aspectos planteados en la propuesta.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la actualidad, los estudiantes que ingresan a la Universidad carecen de conceptos básicos en matemáticas, los cuales se requieren para abordar un primer curso de esta área del conocimiento. De acuerdo con el Proyecto Educativo Institucional (PEI) de la Universidad, centrado en el trabajo por competencias, es muy importante que el estudiante tenga las herramientas mínimas para poder potenciar sus competencias matemáticas. Esto ocurre debido a la poca homogeneidad de la población estudiantil, ya que la fundamentación en esta disciplina no es la misma en todas las instituciones de la educación básica y media.

Teniendo en cuenta lo anterior, se evidencia una baja producción académica por parte de los estudiantes, siendo esta una de las causas de la cancelación o pérdida de la asignatura o hasta la misma deserción. Además, el modelo pedagógico de la Universidad EAN promueve el aprendizaje autónomo en la formación de sus profesionales, lo que implica que estos tengan buenos hábitos de estudio aunque es poco usual de encontrar. El Departamento de Ciencias Básicas ha venido utilizando diferentes estrategias como tutorías, asesorías sin lograr los avances requeridos.

Por lo tanto, es necesario un cambio en las herramientas y estrategias de la enseñanza en los cursos de matemáticas y sobre todo, en la innovación de unidades de aprendizaje las cuales faciliten la adaptación de los estudiantes al trabajo autónomo y al auto-aprendizaje, logrando así involucrar al educando en el modelo pedagógico de la Universidad EAN, así como a nivelarse en las herramientas básicas de matemáticas.

OBJETIVOS

● General

Elaborar un texto en línea de auto aprendizaje para un primer curso de nivelación en las herramientas básicas de matemáticas (Aritmética, Álgebra y Geometría) para los programas de las diferentes carreras que tiene la Universidad EAN, las cuales conlleven al aprendizaje autónomo y a la facilitación de los conocimientos en esta disciplina.

◆ Específicos

- ◆ Fortalecer la experiencia docente en la enseñanza de las unidades de estudio, de los primeros cursos de matemáticas en los diferentes programas en la Universidad EAN, a partir del desarrollo del texto en línea.
- ◆ Incorporar la tecnología en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para dinamizar el rol del estudiante, logrando un aprendizaje significativo dentro de un enfoque constructivista a partir del texto.
- ◆ Involucrar temáticas de la matemática básica y de algunos conceptos en matemáticas básicas.

JUSTIFICACIÓN

La enseñanza de las matemáticas por competencias, es un proceso que se ha venido implementando en nuestro país y en particular en el PEI de la Universidad EAN; este se considera de gran impacto por creerse que responde al reto de llevar a cabo una integración del proceso formativo con las dinámicas sociales y políticas del país, simultáneamente con el proyecto de vida y de autorrealización personal. Pero para el desarrollo de dichas competencias, es importante que el estudiante tenga unas mínimas herramientas sin las cuales el avance en las unidades de estudio no se pueden realizar.

La Universidad EAN, en la semana de inducción con los estudiantes nuevos, da espacio al Departamento de Ciencias Básicas para realizar una prueba de entrada de matemáticas en línea para evaluar cuatro aspectos: conocimientos básicos, competencias interpretativas y argumentativas y pensamiento crítico. En un segundo espacio, se realiza un taller sobre estrategias de resolución de problemas.

Ambos espacios han servido para mostrar por qué es importante este texto en línea; basta ver los resultados de dichas pruebas desde 2010-1 al 2012-2, que se presentan a continuación (tomados de los resultados entregados a Desarrollo Humano):

Tabla 1. Resultados primera semana de estudios 2012 - 1

PENSAMIENTO MATEMÁTICO	1. Competencias matemáticas	Globalidad	48.12%
		Conocimiento básico	28.52%
		Interpretativas	31.51%
		Argumentativas	31.51%
		Pensamiento critico	40.4%

Tabla 2. Resultados primera semana de estudios 2012 - 2

PENSAMIENTO MATEMÁTICO	1. Competencias Matemáticas	Globalidad	34.93%
		Conocimiento básico	28.52%
		Interpretativas	31.51%
		Argumentativas	31.51%
		Pensamiento critico	40.4%

Tabla 3. Resultados primera semana de estudios 2011 - 1

PENSAMIENTO MATEMÁTICO	1. Competencias Matemáticas	Globalidad	37%
		Conocimiento básico	41,50%
		Interpretativas	22,60%
		Argumentativas	22,70%
		Pensamiento critico	41,50%

Tabla 4. Resultados primera semana de estudios 2011 - 2

PENSAMIENTO MATEMÁTICO	1. Competencias Matemáticas	Globalidad	61,10%
		Conocimiento básico	40,50%
		Interpretativas	67%
		Argumentativas	67%
		Pensamiento critico	68%

Tabla 5. Resultados primera semana de estudios 2010 - 1

PENSAMIENTO MATEMÁTICO	1. Competencias Matemáticas	Globalidad	36%
		Conocimiento básico	36.58%
		Interpretativas	39.3%
		Argumentativas	32%
		Pensamiento critico	33%

Tabla 6. Resultados primera semana de estudios 2010 - 2

PENSAMIENTO MATEMÁTICO	1. Competencias Matemáticas	Globalidad	21.52%
		Conocimiento básico	28.97%
		Interpretativas	16%
		Argumentativas	16%
		Pensamiento critico	30%

Fuente. Elaborado por el autor.

En la tabla se ve que en promedio, en estos últimos seis semestres, se tiene:

Conocimientos básicos:	34.16 %
Competencias interpretativas:	34.83%
Competencias argumentativas:	33.66%
Pensamiento crítico:	42.17%

Estos resultados muestran los bajos niveles en herramientas básicas de la matemática, con los cuales vienen los alumnos de primer semestre y lo cual implica necesariamente planear semestre tras semestre, grandes espacios de tutorías en matemáticas (con costos casi equivalentes a otra unidad de estudios) para suplir estas deficiencias. El material en línea que se plantea como objetivo central, ayudará a los estudiantes a obtener las herramientas mínimas necesarias para enfrentar las unidades de estudio de nivel superior. Lo anterior estaría muy de acuerdo con la misión de la Universidad EAN, donde se plantea: “Contribuir a la formación integral de la persona y estimular su aptitud emprendedora, de tal forma que su acción coadyuve al desarrollo económico y social de los pueblos” (Universidad EAN, s.f.).

Desde el punto de vista pedagógico, la formación de sus estudiantes está basada en el aprendizaje por competencias, y dentro del modelo pedagógico de la Universidad EAN esto implica que el estudiante:

- ♦ Es gestor de su propio aprendizaje y puede autónomamente llenar sus vacíos.
- ♦ Aprende a pensar, para construir su conocimiento.
- ♦ A partir de unos conocimientos y destrezas previas, construye nuevos significados y conocimientos.
- ♦ Plantea, resuelve problemas y busca distintas alternativas de solución.
- ♦ Desarrolla su pensamiento crítico ante situaciones que la requieren.

Dentro del aprendizaje por competencias cada una de las facultades requiere que sus estudiantes, a partir de unos conocimientos y destrezas básicos que deben traer de su bachillerato, puedan ayudar a desarrollar y construir las unidades de estudio.

Además, en la actualidad, las universidades en Colombia están sufriendo una transformación en sus programas de estudio y han incluido materias de matemáticas básicas, debido al bajo nivel académico con que llegan los estudiantes de la formación básica y media, como una forma de suplir estas carencias. La Universidad EAN no es ajena a este problema, hecho que se evidencia, como ya se ha mencionado, mediante las diferentes pruebas de entrada que viene realizando el Departamento de Ciencias Básicas, y que en ocasiones lleva a los estudiantes a desmotivarse y pensar que están desubicados en su carrera profesional, o peor aún a la deserción universitaria.

Por otra parte, la Universidad EAN maneja dos grupos de estudiantes: aquellos que no tienen compromisos laborales y otros que tienen que trabajar para poder pagar sus estudios, y por ende, el tiempo que dedican a su aprendizaje es limitado. Este grupo de estudiantes tiene además otro problema y es que en promedio hace más de cinco años que han dejado de estudiar. Teniendo en cuenta esto, acceder a una biblioteca en ocasiones es difícil o no les gusta por cuestiones de tiempo y ven en Internet un único acceso a la información.

Por eso se busca que el estudiante:

- ♦ Sea autor de su propio conocimiento: consultando este texto en línea, que le permite suplir sus carencias en la matemática básica (aritmética y geometría).
- ♦ Aprenda a seleccionar bien la información con la orientación del texto virtual, en el momento en que se genere la duda sobre el tema a trabajar.
- ♦ Recuerde o adquiera los conceptos donde están sus vacíos o carencias con base en las unidades de estudio dadas en el texto en línea, previamente seleccionadas y diseñadas.

De esta manera, se busca llevar al estudiante al aprendizaje autónomo y ser autor de su propio conocimiento y nivelación. Es muy importante entender que esta autonomía se va dando en la medida en que el estudiante va superando estas carencias básicas de matemáticas y por ende, va mejorando su actitud hacia ella, formándose un bucle de retroalimentación positivo en su aprendizaje.

MARCO TEÓRICO

En los últimos años, las instituciones educativas se han encaminado en propender por una educación que avance hacia una sociedad del conocimiento, capaz de mantener profesionales preocupados por el mejoramiento de su entorno y por un ambiente sostenible. Sociedad del conocimiento que permita al ser humano dejar de ser un hombre totalmente anúmeroico o analfabeto en matemáticas, ya que según Douglas Hofstadler, autor del libro *Gödel, Escher, Bach* “Nuestra sociedad sería totalmente distinta si cualquiera pudiera entender realmente las ideas básicas de la matemáticas que podría construir una auténtica revolución en la enseñanza de la matemáticas” (1982). Teniendo en cuenta esto, a la educación superior le corresponde mantener un sistema de evaluación continuo que mejore la calidad de la educación, para que se vuelva más pertinente, significativa y práctica. Además le permite a las instituciones una retroalimentación para detectar fortalezas y debilidades dentro de los procesos educativos y desarrollar acciones específicas para optimizar los conocimientos y las competencias básicas.

La Universidad EAN en su Proyecto Educativo Institucional (PEI), expone cuatro pilares fundamentales, que se rigen por los siguientes aspectos pedagógicos: El aprendizaje significativo, el aprendizaje autónomo, el aprendizaje basado en problemas y el aprendizaje por comprensión. Y es el capítulo de las competencias básicas, retoma y plantea una definición muy acertada y pertinente:

Respecto al aprendizaje autónomo que plantea la Facultad de Estudios en Ambientes Virtuales, mediante la activación cognitiva

se intenta que el estudiante vincule sus experiencias, conocimientos y vivencias al proceso de aprendizaje. Estos vínculos se pueden activar y orientar mediante la formulación de preguntas, y la predicción de los aspectos que mostrará el desarrollo del tema objeto de estudio. Esto permite precisar la forma como están organizados los conocimientos que la persona posee sobre el tema y la forma como están relacionados.

Por otra parte, en el programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA por sus siglas en inglés), conformado en 1997 por países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2006), alfabetización matemática es:

La capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten las necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano, constructivo, comprometido y reflexivo.

El proyecto PISA se rige por un objetivo básico desde el marco curricular de las matemáticas: los estudiantes deben aprender a matematizar. Es un proceso de aprender a aprender desde las matemáticas; es el proceso de ser competentes desde la resolución de problemas. Por ello PISA caracteriza la práctica de hacer matemáticas desde situarnos en un problema real, plantearlo desde esquemas matemáticos, hacer suposiciones sobre los datos del problema, para luego solucionarlo y proponerle un sentido al problema inicial. Lo anterior propone cómo hacer matemáticas desde su vida diaria y desde su contexto social y cultural. Esto implica realmente que cada persona debe tener unas herramientas y habilidades matemáticas mínimas que le permitan enfrentar dichos problemas.

Es necesario confrontar la pregunta desde los estándares curriculares ¿Por qué enseñamos matemáticas? (OCDE, 2006) expone:

La evaluación PISA declara su finalidad cuando establece su foco en conocer como los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no solo ni principalmente en conocer cuales contenidos del currículo han aprendido. El estudio PISA considera que el fin prioritario de la enseñanza de las matemáticas consiste en desarrollar competencia matemática de los escolares, la funcionalidad del conocimiento matemático, su potencialidad para dar respuestas a problemas y cuestiones, la competencia de los ciudadanos en el uso cotidiano, social y técnico es la finalidad que PISA considera y estudia.

La enseñanza de las matemáticas debe ir un poco más allá de unos contenidos, de unas estrategias y metodologías; debe hacer parte inherente de la vida de los estudiantes.

Como lo afirma PISA, el modelo funcional sobre el aprendizaje matemático debe partir de unas tareas contextualizadas, unas herramientas conceptuales y un individuo cognitivo. Son esas tareas y esas herramientas desde donde el estudiante aprende. Estas tareas como lo propone PISA 2006 (OCDE, 2006) deben situarse en ambientes personales, laborales, públicos y científicos. La evaluación PISA caracteriza las tareas como:

Utilizar y hacer matemáticas en una variedad de situaciones y contextos es un aspecto importante de la alfabetización o competencia matemática. Se reconoce que trabajar con cuestiones que llevan por sí mismas a un tratamiento matemático, a la elección de métodos matemáticos y a la organización por medio de representaciones, depende frecuentemente en las situaciones en las cuales se presentan los problemas... En las tareas de la evaluación PISA se considera la situación que contextualiza y dota de significado la tarea propuesta (OCDE, 2006).

Es por eso que la propuesta del proyecto apunta a ello cuando propone el desarrollo de competencias matemáticas a través del texto en línea como tareas contextualizadas hacia un individuo que aprende a partir de su vivencia social y cotidiana. Dicho texto dinamiza el papel del estudiante, permitiéndole un aprendizaje autónomo y significativo, dándole las

herramientas mínimas necesarias, dentro de un enfoque constructivista que está diseñado como material de nivelación y capacitación de las ideas básicas de la Aritmética y Geometría.

En la actualidad se ha venido implementando el concepto del trabajo por competencias en la educación, ante lo cual algunos autores han reflejado su pensamiento como Villanueva en su artículo “Las matemáticas por competencias” donde muestra el origen del concepto de competencia. Éste es propuesto originalmente por Noam Chomsky en el marco de su teoría de la Gramática Generativa Transformacional, donde aportó el concepto de competencia lingüística y en donde señala que “una persona es competente en el uso del lenguaje cuando lo emplea para interactuar en la comunidad”.

Este hecho tiene un papel muy importante en la enseñanza de la matemática ya que ella de por si es un lenguaje, y metodológicamente tiene que ser vista como tal.

Otra de las fuentes en la construcción del concepto surgió en el mundo laboral, en donde David McClelland afirmó que los test y cuestionarios tradicionales utilizados para predecir el rendimiento laboral, que están basados en la medición de conocimientos y aptitudes, así como las notas escolares, no predecían el éxito en el desempeño en situaciones concretas de la vida ni del ejercicio ocupacional y, por lo tanto, buscó y estableció unas nuevas variables que denominó como competencias. Estas variables se medían dentro del contexto de tareas laborales, teniendo como referencia a aquellos empleados que son particularmente exitosos en sus labores, frente a quienes tienen un rendimiento promedio.

Una de sus motivaciones en la creación de PISA, fue trabajar el concepto de competencia definida como “la capacidad de los estudiantes de analizar, razonar y comunicarse efectivamente conforme se presentan, resuelven e interpretan problemas en una variedad de áreas”.

Las distintas definiciones que se dan del concepto de competencia, están enmarcadas dentro de un contexto y dependen de dónde se quiera

trabajar: en un ambiente laboral, social, educativo, etc. Es de nuestro interés trabajar las competencias en matemáticas, dar una definición, ver qué tipos de competencias son las que se trabajan y cómo estas deberán estar enmarcadas dentro de este trabajo investigativo en la construcción de las unidades, que facilitarán y promoverán el aprendizaje autónomo en los estudiantes de las unidades de estudio correspondientes a matemáticas de la Universidad EAN. Pero para promover y facilitar en el trabajo de las matemáticas, es fundamental tener herramientas conceptuales mínimas, sin las cuales es muy difícil avanzar en el trabajo de la matemática en los cursos de nivel superior.

Villanueva (s.f.) establece que las matemáticas por competencias, tomando como referencia el enfoque socio-formativo, “pretende formar personas competentes para desempeñarse en la realización de tareas y resolución de problemas mediante algoritmos, procesos lógicos, estimación aproximada de resultados, construcción de modelos algebraicos, medición y procedimientos de cálculo numérico”.

El proyecto PISA 2006 (OCDE, 2006) define competencia matemática como: “una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos”.

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Villaveces, 2008) establece que las competencias genéricas en matemáticas para la educación superior se deben abordar desde dos puntos de vista como saber instrumental y como parte integral de nuestra cultura.

Como saber instrumental: conocer las herramientas básicas de las matemáticas (objetivo central de este texto virtual). Todo profesional debe ser competente en:

La capacidad de entender terminología y conceptos probabilísticos generales Como parte integral de nuestra cultura: (hacer del profesional un experto no anúmero). El profesional deber ser competente en:

- ♦ La habilidad para encontrar regularidades y patrones.
- ♦ La facilidad para hacer conjeturas y someterlas a prueba.
- ♦ La capacidad de abstraer y encontrar las estructuras escondidas en muchas situaciones.
- ♦ La capacidad de construir modelos de diferentes sistemas físicos y sociales.
- ♦ La habilidad de usar distintos tipos de tecnologías matemáticas, tales como calculadoras, calculadoras gráficas y computadores. Deben usarlas con eficiencia y comprensión de su funcionamiento y principios básicos. Especialmente deben tener claridad sobre cuándo será útil su uso y cuándo no.
- ♦ La facilidad de leer distintos tipos de gráficas, estadísticas, notaciones científicas, logarítmicas, etc.
- ♦ Una comprensión del manejo espacial, que incluya la capacidad de leer mapas, la de comprender gráficas tridimensionales y un manejo de las nociones fundamentales de la perspectiva y la geometría proyectiva.
- ♦ La capacidad de entender a grandes rasgos procesos de carácter algorítmico y de poder entender algo de código básico.
- ♦ La capacidad de entender terminología y conceptos probabilísticos generales.
- ♦ Comprender que las matemáticas son un lenguaje que expresa su contenido de manera más abstracta.

- ♦ Las matemáticas permiten formular teorías en las ciencias naturales y económico-administrativas.
- ♦ El profesional debe comunicarse de manera correcta a través del lenguaje de las matemáticas.
- ♦ Comprender que las matemáticas son una ciencia que tiene objetos de trabajo que luego van a modelar fenómenos de la naturaleza.
- ♦ Comprender que las matemáticas son un arte que permite toda una recreación de nuestro espíritu.

De acuerdo con lo expresado anteriormente, podemos visualizar que en Colombia se ha empezado a trabajar sobre las competencias en distintas disciplinas, y en particular, las afines a matemáticas. Sin embargo, aún falta implementar y articular textos o documentación que permitan llevar a la práctica pedagógica, un manejo constante de las competencias en esta área del conocimiento y en la reformulación de nuestros conocimientos.

El profesor Villanueva Aguilar en su ponencia “Las Matemáticas por competencias” afirma:

La orientación de las matemáticas por competencias, tomando como referencia el enfoque socio-formativo, pretende formar personas competentes para desempeñarse en la realización de tareas y resolución de problemas mediante algoritmos, procesos lógicos, estimación aproximada de resultados, construcción de modelos algebraicos, medición y procedimientos de cálculos numérico. En esta perspectiva, se enfatiza en la comprensión de los conceptos antes que en la acumulación de datos inconexos como se ha dado con tanta frecuencia en el currículo tradicional.

Al igual que el profesor Villanueva, la propuesta apunta al aprendizaje significativo, un aprendizaje que promueva el desarrollo de las estructuras cognitivas de los estudiantes; un aprendizaje que tome el conocimiento y se apropie de él que proyecte su formación y haga parte de su aprendizaje. El texto en línea fortalece este aprendizaje dotando al estudiante de las herramientas y habilidades básicas, que le permitan un manejo más amplio de las matemáticas superiores.

En la ponencia de Villanueva se expone el desarrollo de competencias propias del área de las matemáticas: La competencia lógica, numérica, geométrica, métrica, algebraica y estadísticas, como generadoras de conocimientos, habilidades y actitudes; competencias que el estudiante debe traer desde el ciclo básico y que no se reflejan en las pruebas de entrada.

Se puede afirmar, sin temor a equivocarse que la enseñanza de las matemáticas por competencias es el instrumento para el desarrollo de las habilidades básicas y las destrezas de pensamiento que todo ser humano necesita ejercitar. Toda persona requiere desarrollar destrezas básicas como la expresión oral y escrita del lenguaje matemático y, a la vez hacer cálculos y razonamientos lógicos. Es por ello que la enseñanza por competencias involucra el desarrollo de habilidades básicas y de destrezas de pensamiento como planear, formular, resolver y analizar, entre otras

Al respecto, la Universidad EAN desarrolla en sus estudiantes como competencias básicas: la competencia comunicativa, cognitivas-meta cognitiva, y como competencias transversales: la competencia empresarial, sociohumanística, tecnológica e investigativa. Estas son evaluadas por las actitudes (saber-ser), el conocimiento (saber) y las habilidades (saber-hacer) aplicadas por los estudiantes de la Institución. Son sus comportamientos los que demuestran el alcancen de las competencias matemáticas y el desarrollo de aprendizajes cognitivos.

Las competencias son direccionadas desde diferentes niveles y significaciones sociales, culturales y educativas. El texto en línea de autoaprendizaje para una nivelación de las matemáticas básicas en la Universidad EAN, direccionan procesos desde la comprensión, análisis y explicación del mundo (competencia interpretativa); posibilitan procesos de argumentación y justificación en plan-teamientos de juicios que conllevan a hipótesis (competencias argumentativas) y realizan proposiciones, interacciones, que generan el conocimiento de un mundo transformado (competencia propositiva). Las competencias accionan dos campos del saber: la significación y la interiorización. Se hace necesario perfeccionarlas y accionarlas como capacidades e interiorizarlas dentro de un contexto real.

¿Por qué un texto On-line? La Universidad EAN, y en particular el Departamento de Ciencias Básicas, ha venido poniendo en práctica una serie de actividades con el fin de poder mejorar el nivel y conocimiento matemático básico con que los estudiantes de primer semestre.

De manera que se espera que los contextos virtuales en matemáticas pueden favorecer la comprensión de contenidos en cuanto tienen la facultad de compartir significados, crear entornos complejos de resolución de problemas, representaciones gráficas interrelacionadas, simulaciones y promoción de trabajo colaborativo.

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo la construcción de las unidades del texto en línea se tuvieron en cuenta los siguientes parámetros:

- ♦ Los resultados de las pruebas de entrada que realiza la universidad en la semana de inducción.
- ♦ Analizar el modelo pedagógico de la Universidad EAN.
- ♦ A partir de las competencias que se quieren desarrollar en los diferentes Syllabus propios de las asignaturas de Ciencias Básicas, establecer las pautas para la construcción del texto en línea.
- ♦ Consultar diferentes fuentes bibliográficas, material de apoyo que se ajuste a las necesidades requeridas para desarrollar las competencias planteadas en los *Syllabus* de matemáticas de la Universidad EAN.
- ♦ Construcción del texto de autoaprendizaje cuya finalidad fundamental es el nivelar los conceptos básicos de matemáticas (aritmética, álgebra y geometría) mediante el aprendizaje autónomo en línea, sin abandonar las temáticas que semanalmente están en las unidades de estudios.

De acuerdo con las competencias que se deben desarrollar en matemáticas, las propuestas en los *Syllabus* de las unidades de estudio de esta materia y los resultados de las pruebas de entrada de las competencias matemáticas en la Universidad EAN, se diseñó el texto en línea de auto aprendizaje que involucran al estudiante en dos situaciones: la primera, ser autor de su propio conocimiento, ya que el texto en línea lleva los conceptos básicos (ejemplos, ejercicios y evaluaciones de cada unidad). La segunda, participa en la aplicabilidad

de la matemática dentro un contexto o de forma interdisciplinar con otras materias de su carrera.

A continuación se presenta el modelo general de las unidades:

- Encabezado
- Número de la unidad.
- Tema de la unidad
- Competencias específicas: involucran las competencias propias del texto en línea, logros a alcanzar y sus respectivos indicadores de logros.

En cuanto al desarrollo de la unidad, esta se compone de ejercicios y de una evaluación general al final de la misma. Si el estudiante pasa la evaluación de la unidad por encima de 70, puede continuar con la siguiente. En general la unidad se divide en:

- ♦ Introducción al tema.
- ♦ Explicación de la unidad.
- ♦ Ejercicios de refuerzo.
- ♦ Evaluación.
- ♦ Soluciones de los ejercicios.
- ♦ Soluciones de la evaluación.

CAPÍTULO

1

LOS NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS

Competencias cognitivas

- ♦ Identificar el sistema numérico de los números naturales y enteros.
- ♦ Aplicar las diferentes propiedades de los números naturales y enteros en la solución de problemas que involucran a los números naturales.
- ♦ Operar correctamente con los números naturales y enteros.
- ♦ Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números naturales.

1.1

LOS NÚMEROS NATURALES Y SUS OPERACIONES

Recordemos que los números naturales se definen históricamente como aquellos que sirven para contar. Dicho sistema se nota por:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

Con los números naturales (1, 2,... y el 0) se pueden realizar cuatro operaciones aritméticas: sumar, restar, multiplicar y dividir.

De las cuatro operaciones tan sólo dos, sumar y multiplicar, pueden realizarse con cualquier par de números. Esto es así porque la suma y el producto de dos números naturales es siempre un número natural. Las otras dos operaciones, restar y dividir, pueden hacerse unas veces sí y otras no. Por ejemplo, puede restarse 4 de 9 y el resultado es el número natural 5.

$$9 - 4 = 5$$

Pero si no hubiera más números que los naturales, no podría restarse 7 de 3. De igual manera puede dividirse 10 entre 5, y el resultado es el número natural 2, pero no puede dividirse 5 entre 3. Para poder realizar siempre esas operaciones es preciso inventar más números. Así se inventaron los números negativos:

$$3 - 7 = -4$$

Y los fraccionarios:

$$5 : 2 = 5/2 = 2.5$$

A continuación se analiza la relación que hay entre dos números naturales, cuando uno divide al otro de manera exacta.

Los negativos de las naturales y los fraccionarios se verán más adelante.

1.1.1 Divisibilidad

Cuando un número natural **d** puede dividirse de manera exacta por otro número natural **c**, decimos que **d** es divisible por **c**.

Ejemplo 1: el número natural 18 es divisible por 9, ya que $18 : 9 = 2$, pero no es divisible por 5.

Ejemplo 2: el número natural es 36 divisible por 2 y también es divisible por 18, pero no es divisible por 7.

Un número natural **d** se dice divisible por otro **c** si al dividir **d** entre **c** la división es exacta.

El concepto de divisibilidad puede entenderse de otra manera. Si **d** es divisible por **c** y llamamos **b** al cociente exacto de la división de **d** entre **c** resulta:

$$d = c \cdot b$$

Es decir, cuando un número natural **d** puede escribirse como producto de dos números naturales **c** y **b**, $d = c \cdot b$, decimos que **d** es divisible por **c** (también lo será por **b**). Se dice también que **c** y **b** son factores o divisores de **d**, y que **d** es *múltiplo de c y b*.

En resumen, las tres expresiones:

c divide a d .

c es un divisor de d .

d es un múltiplo de c

Son equivalentes a decir que la división de d entre c es exacta.

Si $d = c.b$, el producto $c.b$ se denomina una factorización o descomposición en factores de d .

Todo número se puede factorizar, al menos, de las maneras siguientes:

$$d = d.1 = 1.d$$

Por ello se llaman factorizaciones triviales y 1 y d se llaman factores triviales.

Ejemplo 3: los números 8 y 75 se pueden factorizar de maneras distintas a las triviales:

$$8 = 2.4$$

$$75 = 5.15 = 3.25$$

Ejemplo 4: los números 5, 13 y 29 no admiten más factorizaciones que las triviales:

$$5 = 1.5 = 5.1$$

$$13 = 1.13 = 13.1$$

$$29 = 1.29 = 29.1$$

Un número que tiene alguna factorización, además de las triviales, se dice compuesto.

Un número que no tiene más factorizaciones que las triviales se dice primo. En otras palabras: un número mayor que 1 es primo si no es divisible más que por 1 y por él mismo.

Entre los 100 primeros números naturales hay 25 números primos que son:

2	3	5	7	11	13	17
19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73
79	83	89	97			

Todos los demás excepto 1 son compuestos. El número 1 no es ni primo ni compuesto.

1.1.2 Tres reglas de divisibilidad

Es fácil recordar tres reglas muy sencillas que anticipan cuando un número es divisible por 2, 3 o 5.

Divisibilidad por 2: Un número es divisible por 2 si termina en una cifra par, esto es 0, 2, 4, 6, 8.

Según esta regla los números 30, 32, 14, 26 y 58 son divisibles por 2, mientras que 31, 53, 73 y 95 no son divisibles por 2.

Divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.

Así el número 105 es divisible por 3, ya que la suma de sus cifras $1 + 0 + 5 = 6$ es divisible por tres, mientras que el número 217 no es divisible por 3 ya que $2 + 1 + 7 = 10$ no es divisible por 3.

Divisibilidad por 5: Un número es divisible por 5 si termina en 0 o en 5.

De acuerdo con esta regla los números 25, 80 y 205 son divisibles por, mientras que 14, 28 y 48 no lo son.

Ejercicios 1

1. ¿Es el número 132 divisible por 3?
2. ¿Es el número 239 divisible por 13?
3. ¿Es el número 143 un número primo o compuesto?
4. ¿Es el número 111 un número primo o compuesto?
5. Halle una factorización diferente de la trivial del número 91.
6. Averigüe cuáles de los siguientes números son divisibles por 2.

126	1035	764	919	538	123	59
210	476	68	101	231	125	63

7. Averigüe cuáles de los siguientes números son divisibles por 3.

126	1035	201	219	38	126	49
210	476	68	101	231	125	63

8. Averigüe cuáles de los siguientes números son divisibles por 5.

129	1035	201	219	38	126	49
210	476	68	101	231	125	63

9. Averigüe cuáles de los siguientes números son divisibles por 4.

129	560	200	212	38	126	48
210	80	68	102	238	125	62

10. Averigüe cuáles de los siguientes números son divisibles por 6.

129	580	200	912	38	126	48
80	68	102	238	125	62	

11. El corazón, bajo condiciones normales, late aproximadamente 72 veces por minuto. ¿Cuántas veces late en los siguientes periodos de tiempo?

a) 5 minutos

b) 1 hora

C) 1 día

d) 1 año

e) 80 años

1.1.3 Descomposición en factores primos

Se ha visto que si se tiene un número compuesto c , este se puede escribir como el producto de dos factores que no son ni 1, ni c .

$$c = a \cdot b$$

Ahora, si alguno de los factores a y b son compuestos se puede factorizar así por ejemplo:

$$\begin{aligned} 36 &= 4 \cdot 9 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 9 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

Este proceso se puede repetir hasta que todos los factores sean primos, luego:

Cada número natural mayor que 1 o es primo o es producto de primos.

Ejemplo 1: como el número:

$$242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$$

El número 242 se descompone en productos de los factores primos 2.11.11

Ejemplo 2: dado que:

$$\begin{aligned} 60 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

El número 60 se descompone en producto de factores primos 2 (dos veces), 3 y 5.

Para poder hacer la descomposición en factores primos de un número, es conveniente ordenar los cálculos. Un buen procedimiento es hacer divisiones sucesivas por los números primos de menor a mayor, hasta agotar cada factor. Veamos un ejemplo para entender mejor esta idea.

Si se quiere calcular la descomposición en factores primos el número 78, se comienza por probar si es divisible por 2:

$$\begin{array}{r|l} 78 & 2 \\ - 78 & 39 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, es divisible por 2. Ahora, el cociente 39 de la división no es divisible por dos, ya que no termina en número par. Entonces probamos ahora por 3.

$$\begin{array}{r|l} 39 & 3 \\ - 39 & 13 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como el cociente de esta división es 13 que es primo entonces, él es el único factor restante. Luego este proceso se resume en:

$$\begin{aligned} 78 &= 2 \cdot 39 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 13 \end{aligned}$$

Así la descomposición en factores primos de 78 es 2.3.13.

A menudo, los cálculos anteriores se ordenan en una tabla que hace más breve el proceso y su escritura.

En el caso del número 78 la tabla será:

$$\begin{array}{r|l} 78 & 2 & (78:2=39) \\ 39 & 3 & (39:3=13) \end{array}$$

En la columna de la izquierda se escribe el número cuya descomposición queremos hallar y los cocientes sucesivos. En la columna de la derecha se escribe los factores primos. El proceso termina cuando en la columna de la izquierda aparece un 1. La descomposición en factores primos es igual al producto de los números de la columna de la derecha.

Ejemplo 3: encuentre la descomposición en factores primos del número 700.

Los cálculos se resumen en la siguiente tabla:

$$\begin{array}{r|l} 700 & 2 \\ 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Por lo tanto, 700 se puede descomponer en el producto de los factores primos $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

Ejemplo 4: encuentre la descomposición en factores primos del número 360.

Los cálculos se resumen en la tabla:

360	2	$(360:2 = 180)$
180	2	$(180:2 = 90)$
90	2	$(90:2 = 45)$
45	3	$(45:3 = 15)$
15	3	$(15:3 = 5)$
5	5	$(5:5 = 1)$
	1	

Por lo tanto 360 se descompone en el producto de los factores primos es $2.2.2.3.3.5 = 2^3.3^2.5$.

Ejercicios 2

1. Halle la descomposición en factores primos del número 252.
2. Halle la descomposición en factores primos del número 2002.
3. Halle la descomposición en factores primos del número 323.
4. Halle la descomposición en factores primos del número 672.
5. Hallar la descomposición en factores primos del número 1210.

1.1.4 Máximo común divisor

Un número **a** se dice divisor común de los números **a** y **b** si divide a ambos números, es decir:

$$b = a.b_1$$

$$c = a.c_1$$

Ejemplo 1: el número 7 es un divisor común de 35 y 42, ya que 7 divide a ambos.

Ejemplo 2: los números 18 y 48 tienen sólo cuatro, y sólo cuatro divisores comunes: 1, 2, 3 y 6.

Ejemplo 3: los números 21 y 14 solo tienen dos divisores comunes: 1 y 7. Dos números naturales cualesquiera **b** y **c**, siempre tienen algún divisor común, puesto que al menos 1 divide a ambos. Al mayor de los divisores comunes se le denomina máximo común divisor y se representa así:

$$m.c.d(b,c)$$

Se llama máximo común divisor de los números **a** y **b** al mayor de los divisores comunes.

El máximo común divisor de **a** y **b** se representa por $m.c.d(a,b)$

Ejemplo 4: los números 124 y 16 tienen los divisores comunes 1, 2, y 4. El mayor de ellos es 4. Luego $m.c.d.(124,16) = 4$

Ejemplo 5: los divisores comunes de los números 60 y 70 son: 1, 3, 5 y 15. Por lo tanto, $m.c.d(60,75) = 15$

Si se conoce la descomposición en factores primos de b y c , el cálculo del máximo común divisor es muy simple. Por ejemplo, si $a = 84$ y $b = 360$, entonces tenemos:

84	2	360	2
42	2	180	2
21	3	90	2
7	7	45	3
1		15	3
		5	5
		1	

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 84 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 360 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

Observemos que los divisores comunes no pueden tener otros factores primos diferentes de 2 y 3, y tendrán que ser de la forma:

$$2^n \cdot 3^m$$

El más grande de los factores comunes será aquel que tenga los mayores exponentes posibles, pero el exponente n no puede ser mayor que 2 a fin de que divida a 84 ni mayor que 3 para que divida a 360. Por consiguiente la mayor elección posible para n es 2. De igual modo se llega a la conclusión de que la mayor elección posible para m es 1, Luego:

$$\text{m.c.d}(84, 360) = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Ejemplo 6: encuentre el m.c.d.(225, 90)

La descomposición en factores primos de ambos es:

$$225 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Luego el m.c.d (225,90) = $3^2 \cdot 5 = 45$

Ejemplo 7: encuentre el m.c.d.(84, 70).

La descomposición en factores primos de ambos números es:

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Luego m.c.d (84,70) = $2 \cdot 7 = 14$

En ocasiones, el cálculo de la descomposición en factores primos de un número puede resultar difícil, sobre todo cuando ese número tiene factores primos mayores que 2, 3, 5 ó 7. Un procedimiento mecánico y práctico para calcular el máximo común divisor, basado en el algoritmo de la división, el proceso es el siguiente:

Supóngase que **a** y **b** son los números cuyo máximo común divisor se quiere calcular y que **b** < **a**, se divide **a** entre **b** y resulta:

$$a = b \cdot c + r$$

Donde **c** es el cociente de la división y **r** el residuo; el residuo debe cumplir $0 \leq r < b$. Ahora, si el resto es cero ($r = 0$) entonces **b** divide a **a**, luego:

$$\text{m.c.d.}(a,b) = b$$

En caso contrario, si el resto es diferente de cero, entonces $r = a - b \cdot c$, luego todo número que divide a **a**, **a** y **b** divide a **r** resulta así que **a**, **b** y **b**, **r** tienen los mismos divisores comunes. Por consiguiente:

$$\text{m.c.d.}(a,b) = \text{m.c.d.}(b,r)$$

Gracias a esta igualdad el problema se simplifica, puesto que ahora basta calcular el m.c.d.(b,r) y los números que aparecen son más pequeños que los iniciales. Además, este razonamiento se puede aplicar una y otra vez.

Ejemplo 8: encuentre el máximo común divisor de los números 258 y 78.

Primero se divide el mayor, 258, entre el menor, 78

$$\begin{array}{r} 258 \\ - 234 \\ \hline 24 \end{array} \quad \begin{array}{r} 78 \\ 3 \end{array} \quad \text{es decir } 234 = 78 \cdot 3 + 24$$

Después se divide el divisor 78 por el residuo 24, así:

$$\begin{array}{r} 78 \\ - 72 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ 3 \end{array} \quad \text{es decir } 78 = 24 \cdot 3 + 6$$

El procedimiento se repite; otra vez se divide el divisor 24 por el resto 6

$$\begin{array}{r} 24 \\ - 24 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 4 \end{array} \quad \text{es decir } 24 = 6 \cdot 4 + 0$$

Como 6 es divisor de 24 se tendrá que m.c.d.(24,6)= 6, por lo tanto:

$$\text{m.c.d.}(258,78) = \text{m.c.d.}(78,24) = \text{m.c.d.}(24,6) = 6$$

El máximo común divisor de 258 y 78 es 6

Ejemplo 9: calcular el m.c.d.(8296,732)

Dividimos 8296 entre 732, así:

$$\begin{array}{r} 8296 \quad | \quad 732 \\ - 8052 \quad 11 \\ \hline 244 \end{array}$$

Ahora dividimos 732 entre 244, así:

$$\begin{array}{r} 732 \quad | \quad 244 \\ - 732 \quad 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Luego el m.c.d.(8296,732) = 244

Ejemplo 10: Calcular el m.c.d.(371,428)

Primero dividimos 371 entre 428

$$\begin{array}{r} 428 \quad | \quad 371 \\ - 371 \quad 1 \\ \hline 57 \end{array}$$

es decir: $428 = 371 \cdot 1 + 57$

Ahora, como $\text{m.c.d.}(428,371) = \text{m.c.d.}(371,57)$, se divide 371 entre 57

$$\begin{array}{r} 371 \quad | \quad 57 \\ - 342 \quad 6 \\ \hline 29 \end{array}$$

es decir: $371 = 57 \cdot 6 + 29$

Y también $\text{m.c.d.}(371,428) = \text{m.c.d.}(57,29)$. Luego ahora se divide 57 entre 29.

$$\begin{array}{r} 57 \quad | \quad 29 \\ - 29 \quad 1 \\ \hline 28 \end{array}$$

es decir: $57 = 29 \cdot 1 + 28$

De nuevo $\text{m.c.d.}(29,28) = \text{m.c.d.}(28,1)$. Como el $\text{m.c.d.}(28,1) = 1$ y si se vuelve atrás en la cadena de igualdades tendremos que:

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.}(371,428) &= \text{m.c.d.}(371,57) \\ &= \text{m.c.d.}(57,29) \\ &= \text{m.c.d.}(29,28) \\ &= \text{m.c.d.}(28,1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cuando el máximo común divisor de dos números es 1, como en ejemplo anterior, se dice que los números son primos entre sí.

Dos números naturales **a, b** se dicen primos entre sí, si se verifica $\text{m.c.d.}(a,b) = 1$.

Ejemplo 11: los números 39 y 32 son primos entre sí. En efecto, la descomposición en factores primos de cada uno de los números es:

$$39 = 3 \cdot 13$$

$$22 = 2 \cdot 11$$

Por lo tanto, los dos números no tienen factores primos comunes: el único divisor común es 1.

Ejemplo 12: los números 17 y 51 no son primos entre sí. En efecto, su descomposición en factores primos es:

$$17 = 1 \cdot 17 \qquad 51 = 3 \cdot 17$$

Por tanto, tienen un factor primo común: 17. Obsérvese que 17 es un número primo, pero 17 y 51 no son primos entre sí.

Ejemplo 13: los números 150 y 221 son primos entre sí puesto que su máximo común divisor es 1. En efecto, si se calcula el máximo común divisor por el algoritmo de la división, resulta:

$$\begin{array}{r}
 221 \overline{)150} \\
 \underline{-150} \quad 1 \\
 71
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 150 \overline{)71} \\
 \underline{-142} \quad 2 \\
 8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 71 \overline{)8} \\
 \underline{-64} \quad 8 \\
 7
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8 \overline{)7} \\
 \underline{-7} \quad 1 \\
 1
 \end{array}$$

Como $\text{m.c.d.}(7,1) = 1$, se tiene que $\text{m.c.d.}(150, 221) = 1$, por lo tanto 150 y 221 son primos entre sí.

Ejercicios 3

1. Halle el máximo común divisor de los números 34 y 51.
2. Halle el máximo común divisor de los números 242 y 110.
3. Halle el máximo común divisor de los números 126 y 306.
4. Halle el máximo común divisor de los números 65 y 25.
5. Halle el máximo común divisor de los números 32 y 64.
6. Si dos números naturales **a**, **b** son primos entonces el $m.c.d(a,b) = ?$
7. ¿Se podrán dividir tres varillas de longitud 20, 24 y 30 cm en pedazos de 4 cm de longitud sin que sobre ni falte nada en cada varilla?
8. El gerente de una empresa da a un promotor 80 esferos, a otro 75 y a un tercero 60, para repartir entre los estudiantes de un cierto colegio, de modo que todos repartan a cada estudiante la misma cantidad. ¿Cuál es la mayor cantidad que podrán dar a cada estudiante y cuántos son los estudiantes?

1.1.5 Mínimo común múltiplo

Dos números naturales dados, **a** y **b**, tienen siempre múltiplos comunes. Ya que, por ejemplo el producto de los dos números es múltiplo de ambos. Al menor de los múltiplos comunes se le denomina mínimo común múltiplo y se representa por:

$$\text{m.c.m (a,b)}$$

Cuando se desconoce la descomposición en factores primos de los dos números, hallar el mínimo común múltiplo es fácil. Para que un número sea múltiplo común debe contener todos los factores primos de cada número elevado a un exponente mayor o igual que cualquiera de los exponentes que aparecen en ambas descomposiciones. Para que sea el menor de los múltiplos comunes, el exponente debe ser el mayor de los exponentes del factor en las dos descomposiciones.

Ejemplo 1: los números 12 y 15 tienen muchos (infinitos) múltiplos comunes. Así 180, 60 y 300 son múltiplos comunes ya que:

$$180 = 12 \cdot 15$$

$$180 = 15 \cdot 12$$

$$60 = 12 \cdot 5$$

$$60 = 15 \cdot 4$$

$$300 = 12 \cdot 25$$

$$300 = 15 \cdot 20$$

Ahora bien, la descomposición en factores primos de los dos números es:

$$12 = 2^2 \cdot 3; \quad 15 = 3 \cdot 5$$

El menor de los múltiplos comunes tendrá como factores primos todos los que aparezcan en alguna de las descomposiciones, esto es 2, 3 y 5. El menor de los múltiplos comunes será $2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Ejemplo 2: los números 8 y 24 tienen infinitos múltiplos comunes, por ejemplo 24, 48, 72 y 96. Como 24 es múltiplo de 8, el mismo número 24 es múltiplo común. No puede haber un múltiplo común más pequeño, por lo tanto, $m.c.m.(8, 24) = 24$.

Ejemplo 3: los números 52 y 32 se descomponen en factores primos como sigue:

$$52 = 2 \cdot 2 \cdot 13 \quad 32 = 2^5$$

Por lo tanto $m.c.m.(32, 52) = 2^5 \cdot 13$.

Ejemplo 4: si a y b son los números:

$$a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \quad b = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^4$$

Entonces $m.c.m.(a, b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4$

De los procedimientos para calcular el máximo común divisor ($m.c.d$) y el mínimo común múltiplo ($m.c.m$) de dos números a partir de su descomposición en factores primos se sigue la importante relación:

$$m.c.m.(a, b) \times m.c.d.(a, b) = a \times b$$

Por lo tanto, cuando el cálculo de la descomposición en factores primos de los números a y b no es fácil, para hallar el mínimo común múltiplo, es preferible calcular primero el máximo común divisor por el algoritmo de la división y a continuación emplear la relación:

$$m.c.m.(a, b) = \frac{(a \cdot b)}{(m.c.d.(a, b))}$$

Ejemplo 5: para hallar el m.c.m(1455, 1164) se calcula primero m.c.d (1455, 1164) mediante el algoritmo de la división.

$$\begin{array}{r}
 1455 \quad | \quad 1164 \\
 - 1164 \quad 1 \\
 \hline
 291 \\
 1164 \quad | \quad 291 \\
 - 1164 \quad 4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Luego: m.c.d (1455, 1164) = m.c.d (1164, 291) = 291

Entonces por la fórmula dada anteriormente, se tiene que:

$$\text{m.c.m (1455, 1164)} = \frac{(1455 \times 1164)}{(\text{m.c.d}(1455, 1164))} = \frac{(1455 \times 1164)}{291} = 5820$$

$$\text{Es decir que: } \text{m.c.m (1455, 1164)} = \frac{1455 \times 1164}{\text{m.c.d (1455, 1164)}} = 5820$$

Ejemplo 6: encuentre el mínimo común múltiplo de los números 242 y 110. Se calcula primero el máximo común divisor por el algoritmo de la división.

$$\begin{array}{r}
 242 \quad | \quad 110 \\
 - 220 \quad 2 \\
 \hline
 22 \\
 110 \quad | \quad 22 \\
 - 110 \quad 5 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Luego:

$$\text{m.c.d} (242, 110) = \text{m.c.d} (110, 22) = 22$$

De donde resulta que:

$$\text{m.c.m} (242, 110) = (242 \times 110) / 22 = 1210$$

Esto es: $\text{m.c.m} (242, 110) = 1210$.

Ejercicios 4

1. Halle el mínimo común múltiplo de los números 6 y 21.
2. Halle el mínimo común múltiplo de los números 24 y 42.
3. Si el producto de dos números es 104 y su máximo común divisor es 2, ¿cuál es su mínimo común múltiplo?
4. Halle el mínimo común múltiplo de los números 63 y 25.
5. Halle el mínimo común múltiplo de los números 32 y 64.
6. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir exactamente con tres reglas de longitud 2,5 y 8 cm de largo?
7. Halle el menor número de bombones necesarios para repartir entre tres clases de 20, 25 y 30 estudiantes, de modo que cada alumno reciba un número exacto de bombones. ¿Cuántos bombones recibirá cada alumno de la primera, de la segunda y de la tercera clase?

1.2

Los números enteros

Entre las necesidades del hombre prehistórico, las cuales lo llevaron al descubrimiento de los números naturales y las del hombre actual hay diferencias radicales.

El primero vivía sometido a la naturaleza, sus necesidades eran elementales, mientras que el hombre de hoy vive en un mundo dominado por las creaciones del propio hombre; su mundo está gobernado por conceptos y abstracciones.

No es difícil imaginar cómo, en algún momento del discurrir de la historia, el hombre descubrió que para medir ciertas magnitudes es conveniente considerar su variación en un sentido y en otro, por encima y por debajo de un origen prefijado.

Por ejemplo si los reintegros son superiores a los ingresos, una cuenta corriente tendrá sólo saldo negativo y el banco seguirá calculando en dichas cantidades, incluso intereses negativos en “números rojos”, para controlar exactamente la deuda.

Si la temperatura desciende 10°C a partir de una temperatura de 5°C , se alcanza los 5°C bajo cero. Ello nos informa de cuánto tiene que volver a subir para alcanzar el punto de fusión del hielo. Si no se contase por debajo de cero, se carecería de tal información.

Las matemáticas proporcionan una manera unificada de tratar cantidades como 5°C bajo cero o 150.000 pesos en números negativos. Todo consiste en anteponer al número el signo menos e interpretarlo como la cantidad que falta para alcanzar el origen de la escala de que se trate; así se dice que la temperatura es de -5°C o que el saldo es de -150.000 pesos.

Estos números se llaman negativos.

Para cada número natural, como 1, 3, 504, hay uno negativo, -1, -3, -504. En ocasiones, al hablar de un número natural, se insiste en su carácter positivo y se escribe +4 en lugar de 4.

A los números naturales, sus negativos y el cero, se les denomina Números Enteros. Esto es:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Por su origen, los números -6 y 6 suman cero, esto es $-6 + 6 = 0$, por esto se dice que -6 es el opuesto del 6.

El opuesto de un número es el número que tenemos que añadirle para que la suma sea cero. Por esta razón el opuesto del número **a** es **- a**.

En particular, el opuesto del número -7, que se debería representar por - (-7), es 7 (7 es lo que es preciso añadir a -7 para que la suma sea cero).

En particular, el opuesto del número -3 que se debería representar por - (-3), es 3 (3 es lo que es preciso añadir a -3 para que la suma sea cero).

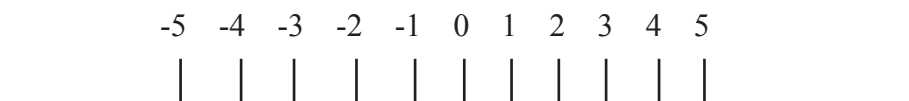
De esta observación se siguen las igualdades:

$$- (-10) = +10$$

$$- (-8) = +8$$

$$- (-15) = +15$$

Las cantidades negativas pueden representarse gráficamente, como se muestra a continuación. Imagínese una carretera recta; se considera como punto de referencia el cero 0 la posición de cierto vehículo; los que le preceden a una cierta distancia d tendrán una ventaja respecto al vehículo prefijado de $+d$, y los que se vayan rezagando a una distancia d , ocuparán la posición $-d$.



Luego, si sólo se considera el número entero de kilómetros que se separan dos puntos, las posiciones de un móvil respecto de un punto fijo pueden ser

....., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6,

O bien, simplemente

....., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

Escritos en ambos casos en orden creciente.
Nótese que $-12 < -11$ ($-20 < -10$).

Si se toman como las marcas del kilometraje de la carretera, la posición -4 puede entenderse: así el signo menos $(-)$ indica que la posición es a la izquierda del punto de referencia y la cifra 4 señala la distancia al punto de referencia. Al contrario, un punto designado por $+5$ se encontrará a la derecha $(+)$ del punto cero, a una distancia de 5 kilómetros.

El gráfico de la carretera sirve también para interpretar otra vez los números opuestos. Dos números son opuestos si identifican a puntos simétricos respecto del punto de referencia, esto es, puntos que se encuentran a igual distancia pero en sentidos contrarios.

Cuando se quiere prescindir del signo y considerar exclusivamente la distancia que separa el origen de otra posición sin tener en cuenta si es a favor tener en cuenta si es a favor o en contra, se habla de valor absoluto del número entero.

Así:

El valor absoluto de -4 es 4

El valor absoluto de -2 es 2 .

El valor absoluto de -5 es 5 .

El valor absoluto de 0 es 0 .

El lugar de escribir, “el valor absoluto de -4 es 4 ”, lo indicamos encerrando en dos barras verticales. Así $|-4| = 4$, es el valor absoluto del número -4 es 4 . De manera similar $|5|$ es el valor absoluto de 5 .

Ejemplo 1: el saldo de una cuenta corriente puede ser positivo o negativo

Por lo tanto se mide con números enteros. Si un saldo es de $-\$1'200.000$, el signo menos $(-)$ indica que el cliente tiene una deuda con el banco por esta suma. Si saldo es de $+\$1'200.000$, entonces el banco tiene una deuda con el cliente de esta suma. En ambos casos el valor absoluto del saldo es igual:

$$|-1200000|=|1200000|=1200000$$

El valor absoluto del saldo señala el importe de la deuda. El signo del saldo indica a favor de quién es ese importe.

Ejemplo 2: veamos unos ejemplos de cálculo de algunos valores absolutos.

$$|-256|=256$$

$$|+2345|=2345$$

$$|-125|=125$$

$$|+326|=326$$

Aunque tampoco está de más dar una norma general de cálculo, como la que sigue:

El valor absoluto de un número entero **a** se representa por $|a|$ y es igual a:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es un entero positivo} \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a \text{ es un número entero negativo} \end{cases}$$

Ejemplo 3: como aplicación de la regla general, se tiene las igualdades siguientes:

$$|-256| = -(-256)$$

$$|+2345| = 2345$$

$$|-125| = -(-125)$$

$$|+326| = 326$$

1.2.1 Operaciones con los números enteros

1.2.1.1 Suma y resta de enteros

La suma de números enteros puede razonarse sin dificultad si interpretamos los números a sumar como temperaturas o saldos de una cuenta corriente, por ejemplo: La suma

$$-7 + 5$$

Puede interpretarse como el resultado de una subida de 5 grados (+5) a partir de una temperatura de - 7 grados. Por lo tanto:

$$-7 + 5 = -2$$

Otros ejemplos de sumas de enteros son:

$$4 + 2 = 6, \quad 5 + 9 = 14$$

$$(-5) + (12) = 7, \quad (-4) + (-7) = -11$$

$$(5) + (-2) = 3, \quad (-5) + 4 = -1$$

En otras palabras:

Si ambos números tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y se antepone el signo común. Por ejemplo:

$$6 + 18 = 24$$
$$-(12 + 16) = -26$$

Si tienen signos contrarios, se restan sus valores absolutos (en el orden que sea posible, esto es quitando el más pequeño al más grande) y se pone el signo del que tenga mayor valor absoluto. Por ejemplo:

$$(-3) + 10 = 10 - 3 = 7$$

$$(-8) + 3 = -(8 - 3) = -5$$

$$8 + (-11) = -(11 - 8) = -3$$

$$12 + (-10) = 12 - 10 = 2$$

De lo anterior, se puede concluir que la diferencia de dos números enteros se reduce a sumar al primero (minuyendo) el opuesto del segundo (sustraendo):

La diferencia **a - b** de dos números enteros **a** y **b** es igual a la suma de **a** y el opuesto de **b**.

$$a - b = a + (-b).$$

Ejemplo 1: las restas o diferencias de números enteros se reducen a sumas:

$$8 - (-3) = 8 + 3 = 11$$

$$(-5) - 8 = (-5) + (-8) = -13$$

$$(-2) - (-3) = (-2) + 3 = 1$$

1.2.2 Multiplicación y división de números enteros

1.2.2.1 Multiplicación

Entre los números naturales el producto es una suma repetida. Este principio permite deducir cual será el resultado de multiplicar un número positivo por otro positivo o negativo. Por ejemplo 5×6 significa “cinco veces seis”, es decir:

$$5 \times 6 = 5 \text{ veces } 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$$

De manera similar $5 \times (-4)$ se interpreta también como “cinco veces menos 4”, por ejemplo:

$$5 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20$$

Ejemplo 1: si la temperatura está subiendo a razón de 2 grados cada hora, dentro de 5 horas habrá subido $5 \times (+2) = 10$ grados. Mientras que si la temperatura está bajando a razón de 3 grados cada hora, dentro de 4 horas la variación sería de $4 \times (-3) = -12$ grados.

Ejemplo 2: si en una cuenta corriente se ingresan 3 cheques de \$1500000, la variación del saldo será de $3 \times 1.500.000 = 4.500.000$, mientras que si se sacan 4 cheques de \$650.000, la variación del saldo será de $4 \times (-650000) = -\$2.600.000$.

Pero también puede darse una interpretación al producto por un número negativo. Si de una suma se quitan tres sumandos iguales a cuatro, la suma disminuirá en 12. Puede pensarse que se ha puesto -3 veces el número 4.

Así, se tiene:

$$(-3) \times 4 = -3 \text{ veces } 4 = -12$$

Mientras que, si de una suma se quitan tres sumandos -4, la suma aumentará en 12, es decir:

$$(-3) \times (-4) = -3 \text{ veces } -4 = 12$$

En resumen, para multiplicar dos números enteros basta multiplicar los valores absolutos de los factores, según una regla denominada “de los signos”:

Regla de los signos para la multiplicación:

$$+ \times + = +$$

$$+ \times - = -$$

$$- \times + = -$$

$$- \times - = +$$

Ejemplo 3: para multiplicar $(-3) \times 5$ se realiza:

$$3 \times 5 = 15, \text{ y como } - \times + = -$$

Entonces

$$(-3) \times 5 = -15$$

Ejemplo 4: Para multiplicar $(-7) \times (-8)$ se hace primero

$$7 \times 8 = 56, \text{ y como } - \times - = +$$

Entonces:

$$(-7) \times (-8) = 56$$

Ejemplo 5: si la temperatura en este momento es de 0°C y lleva todo el día subiendo a razón de 3°C cada hora entonces dentro de 5 horas la temperatura será de $3 \times 5 = 15^{\circ}\text{C}$, mientras que hace tres horas es decir, en la hora -3 contada desde este instante la temperatura era de $(-3) \times 5 = -15^{\circ}\text{C}$.

Ejemplo 6: en este momento la temperatura es de 0°C y lleva todo el día bajando a razón de 4° cada hora. Dentro de 5 horas la temperatura será de $5 \times (-4) = -20^{\circ}\text{C}$, mientras que hace 3 horas – es decir, en la hora -3 contada desde el instante - la temperatura era de $(-3) \times (-4) = 12^{\circ}\text{C}$

1.2.2.2 División

Con los números enteros sucede como con los números naturales: no es posible, en general, dividir de manera exacta dos enteros. Sin embargo, cuando la operación puede llevarse a cabo la misma regla de los signos de la multiplicación permite tener el signo del cociente: Es decir:

Si un número entero **a** es divisible por otro entero **b**, el cociente es igual al cociente de los valores absolutos con el signo dado por la regla de los signos.

Ejemplo 7:

$$(-12) : 3 = -4 \qquad 15 : (-3) = -5$$

$$(-8) : (-2) = 4 \qquad (-36) : 12 = -3$$

$$(-128) : (-32) = 4 \qquad (-24) : (-12) = 2$$

1.3

Cálculo con expresiones literales

Una de las grandes virtudes de la matemática es su capacidad de hacer afirmaciones generales, es decir universalmente ciertas. En buena medida, esta capacidad se potencia con el uso de un lenguaje particular, donde los cálculos no se realizan mediante números sino con letras u otros símbolos. La idea es útil; la letra no es ningún número particular pero representa a cualquier número. Este ser y no ser se entenderá mejor con algunas aplicaciones.

1.3.1 Propiedades de las operaciones con números enteros

Es bien sabido que al sumar dos enteros, el orden en que se realice no altera el resultado. Esta es una propiedad de la suma de los números enteros que se llama propiedad conmutativa, puesto que se asegura que en una suma se puede alterar el orden (conmutar) de los sumandos sin que cambie el resultado. Así, expresada con palabras, la propiedad es general ya que hace referencia a cualquier par de números. Pero si se quiere expresar la propiedad conmutativa de manera simbólica no basta con decir:

$$5 + 7 = 7 + 5$$

ni

$$(-4) + 12 = 12 + (-4)$$

Puesto que cuando se afirma que $3 + 6 = 6 + 3$ se dice exactamente eso: que es igual sumar 3 a 6 que sumar 6 a 3 y esa igualdad no implica que cuando la pareja de números elegidos sea otra la igualdad se mantenga. Por ello se recurre a las letras y se afirma:

(Propiedad conmutativa de la suma) Si a y b son números enteros, se cumple:

$$a + b = b + a$$

En el enunciado anterior **a** y **b** son letras que representan a cualquier par de números enteros. Lo que se afirma es que cualesquiera que sean los números enteros que sustituyan a **a** y a **b**, la igualdad se cumple.

Con este lenguaje resulta fácil expresar las restantes propiedades de las operaciones con números naturales.

(Propiedad conmutativa del producto) Si **a** y **b** son números enteros, se cumple:
$$a \times b = b \times a$$

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}4 \times 6 &= 6 \times 4 \\ (-13) \times 10 &= 10 \times (-13) \\ (-4) \times (-3) &= (-3) \times (-4)\end{aligned}$$

(Propiedad asociativa de la suma) Si **a**, **b** y **c** son números enteros, se cumple
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}(12 + (-8)) + 4 &= 12 + ((-8) + 4) \\ (22 + 7) + (-6) &= 22 + (7 + (-6))\end{aligned}$$

(Propiedad asociativa del producto) Si **a**, **b** y **c** son números enteros, se cumple:
$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Ejemplo 3:

$$\begin{aligned}(14 \times (-5)) \times 3 &= 14 \times ((-5) \times 3) \\ ((-11) \times (-6)) \times 2 &= (-11) \times ((-6) \times 2)\end{aligned}$$

(Propiedad distributiva del producto respecto de la suma)

Si **a, b y c** son números enteros, se cumple

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

Ejemplo 4:

Por la propiedad distributiva, el producto $12.(4-8)$ es igual a:

$$12.(4 - 8) = (12.4) - (12.8)$$

De manera similar se tiene:

$$(-5).(7 + 27) = ((-5).7) + ((-5).27)$$

Por la misma razón:

$$a.(c - b) = (a.c) - (a.b)$$

Para algunas personas el manejo de esta propiedad presenta alguna dificultad al calcular con expresiones literales, como se hizo en este último ejemplo.

No es raro que sepan realizar las operaciones cuando intervienen números y que se equivoquen cuando estos son sustituidos por letras ¡No hay que temer a los cálculos con expresiones literales, las reglas que los gobiernan son las mismas que a los números! Los ejemplos que siguen muestran el cálculo de algunas expresiones literales que se presentan con bastante frecuencia.

Ejemplo 5:

La expresión $(2a + 6b)$ es igual a $2.(a + 3b)$.

En efecto, por la propiedad distributiva se cumple:

$$2.(a + 3b) = (2.a + 2.3b) = (2a + 6b)$$

De manera análoga se tiene $b.(3 - a) = 3b - ba$.

Ejemplo 6:

La expresión $(x - y).(x + y)$ es igual a $(x^2 - y^2)$ (Recuerde que x^2 significa $x.x$)

En efecto, por la propiedad distributiva se tiene:

$$(x - y)(x + y) = x.(x + y) + (-y)(x + y)$$

De la regla de los signos, se sigue:

$$x.(x + y) + (-y)(x + y) = x.(x + y) - y.(x + y)$$

y otra vez por la propiedad distributiva, se tiene:

$$x.(x + y) - y(x + y) = x.x + x.y - y.x - y.y$$

pero por la propiedad conmutativa, $x.y = y.x$. luego se tiene:

$$x.y - y.x = y.x - x.y = 0$$

de donde resulta que:

$$x.(x + y) - y(x + y) = x.x + x.y - y.x - y.y = x^2 - y^2$$

Este resultado se conoce como: la suma por la diferencia de dos números es igual a la diferencia de los cuadrados.

$$(x - y).(x + y) = x^2 - y^2$$

Ejemplo 7:

La expresión $(x + y)^2$ es igual a $x^2 + 2xy + y^2$ (Recuérdese que $(x + y)^2$ se lee “ x más y al cuadrado”).

Como se ha visto, el exponente 2 indica que el número de la base se multiplica por si mismo. Esto también vale para el cálculo con letras.

$$\begin{aligned}
 (x + y)^2 &= (x + y) \cdot (x + y) \\
 &= x \cdot (x + y) + y \cdot (x + y) && \text{(propiedad distributiva)} \\
 &= (x \cdot x + x \cdot y) + (y \cdot x + y \cdot y) && \text{(propiedad distributiva otra vez)} \\
 &= x^2 + x \cdot y + y \cdot x + y^2 && \text{(definición de } x \cdot y, y \cdot y) \\
 &= x^2 + x \cdot y + x \cdot y + y^2 && \text{(propiedad conmutativa del producto)} \\
 &= x^2 + 2xy + y^2
 \end{aligned}$$

Es decir que:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

En palabras, esta igualdad se lee: el cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer número, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Ejemplo 8:

La expresión $(x - y)^2$ es igual a: $x^2 + 2xy + y^2$

Para demostrarlo, basta tener en cuenta el resultado del ejemplo anterior, aplicándolo a la expresión:

$$(x - y)^2 = (x + (-y))^2$$

Resultará:

$$(x + (-y))^2 = x^2 + 2x(-y) + (-y)^2$$

Pero $2x(-y) = -2xy$ y, $(-y)^2 = y^2$, luego en resumen:

En palabras, esta igualdad se lee: el cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

1.4 Evaluación 1

Conocimientos básicos sobre los números Naturales y sus operaciones

1. Los números 7 y 20 son:
 - a. Dos números compuestos.
 - b. Primos entre sí.
 - c. Dos números primos.
 - d. Dos números pares.

2. Si a , b y c son números naturales tales que $c = a \cdot b$, se dice que:
 - a. c es divisor de a y b .
 - b. c es múltiplo de a y de b .
 - c. a y b son múltiplos de c .
 - d. a es un divisor de b .

3. Si a , b y c son números naturales tales que $c = a \cdot b$, se dice que:
 - a. c es un factor de a y b .
 - b. a y b son factores de c .
 - c. c es un divisor de a y b .
 - d. b es un divisor de a .

4. Si el producto de dos números es múltiplo de 4, siempre se cumple que:
 - a. Alguno de los números es par.
 - b. Alguno de los números es múltiplo de 4.
 - c. Los dos números son múltiplos de 2.
 - d. Alguno de los números es impar.

5. La descomposición en factores primos de 54 es igual a:
- a. 6.9
 - b. 3.6.3
 - c. 2.33
 - d. 22.3
6. Si el producto de dos números es divisible por 7, siempre se puede asegurar que:
- a. Ambos son divisibles por 7.
 - b. Alguno es divisible por 7.
 - c. La suma de los números es divisible por 7.
 - d. La diferencia es divisible por 7.
7. Se sabe que un número natural tiene 3 divisores, entonces se puede asegurar que:
- a. Es primo.
 - b. Es el cuadrado de un número primo.
 - c. Es imposible.
 - d. Es un número par.
8. Los números 23 y 115 son:
- a. Primos entre sí.
 - b. Dos números primos.
 - c. Múltiplo el uno del otro.
 - d. Dos números compuestos.
9. Si $m.c.d(a,b) = 2$, entonces:
- a. a y b son pares.
 - b. a y b son múltiplos.
 - c. a divide a b.
 - d. b divide a a.

10. El máximo común divisor de 70 y 196 es:
- 7.
 - 14.
 - 21.
 - 2.
11. Si a es un número natural cuyo resto al dividirlo por 36 es 11, entonces el máximo común divisor de a y 36 es:
- 1.
 - 6.
 - 11.
 - 36.
12. Los números 13 y 27 cumplen:
- Su máximo común divisor es 13.
 - Son primos entre si.
 - Son primos los dos.
 - Su mínimo común múltiplo es 27.
13. Si p y q son números primos y $a = p^2 q$, $b = p \cdot q^2$, el máximo común divisor de a y b es:
- $P \cdot q$.
 - $P^2 \cdot q^2$
 - $P^3 \cdot q^3$
 - $P^2 q^3$
14. Para que dos números naturales a y b se denominen primos entre si deben cumplir que:
- Al menos uno sea primo.
 - Su máximo común divisor sea 1.
 - Ninguno sea múltiplo del otro.
 - Sean pares.

15. Si a y b son primos entre sí, se cumplirá:
- a. a y b son primos.
 - b. $a.b$ es primo.
 - c. $m.c.d(a,b) = 1$.
 - d. $m.c.m(a,b) = a$.
16. Si a y b son números naturales, el símbolo $m.c.m(a,b)$ representa:
- a. Al mayor de los divisores comunes de a y b .
 - b. Al menor de los múltiplos comunes de a y b .
 - c. Al producto de los factores primos comunes de a y b .
 - d. Al producto $a.b$
17. El mínimo común múltiplo de los números 9 y 12 es:
- a. 27.
 - b. 36.
 - c. 3.
 - d. 24.
18. Si a y b son números naturales tales que el $m.c.d(a,b) = m.c.m(a,b)$, entonces se cumple:
- a. a y b son primos entre sí.
 - b. $a = b$.
 - c. a divide a b .
 - d. es imposible.
19. Si el producto de dos números naturales es 144 y su máximo común divisor es 12, su mínimo común múltiplo será:
- a. 48.
 - b. 16.
 - c. 12.
 - d. 24.

20. El producto de dos números naturales a y b es 180 y su máximo común divisor es 3, entonces:
- a. $m.c.m(a,b) = 60$.
 - b. $m.c.m(a,b) = 180$.
 - c. $m.c.m(a,b) = 30$.
 - d. $m.c.m(a,b) = 120$.
21. Si el $m.c.m(a,b) = a.b$, entonces:
- a. a y b son primos.
 - b. a y b son primos relativos.
 - c. a y b son múltiplos.
 - d. a y b son pares.
22. Si a y b son números naturales, el producto $m.c.m(a,b)$. $m.c.m(a,b)$ es igual a:
- a. El producto de todos los factores primos comunes y no comunes de a y b ,
 - b. El producto de los factores primos comunes de a y b .
 - c. El producto de a y b .
 - d. El producto de los múltiplos de a y de b .
23. $m.c.d(a,b) = a$.
- a. b es múltiplo de a .
 - b. a divide a b
 - c. b divide a a
 - d. $m.c.d(a,b) = b$
24. El mínimo común múltiplo de los números 39 y 52 es:
- a. 216.
 - b. 156.
 - c. 194.
 - d. 2028.

25. Si a y b son números primos entre sí, su mínimo común múltiplo será igual al número:

- a. 1
- b. $a.b$
- c. $b^2.a^2$
- d. $a.b^2$

26. En la multiplicación: $3N8$ en lugar de la N debe ir el número:

$$\begin{array}{r} \times 4 \\ 1312 \end{array}$$

- a. 2.
- b. 4.
- c. 5.
- d. 6.

27. Si el producto de dos números enteros es positivo, entonces se cumple que:

- a. Los dos números son positivos.
- b. Los dos números son impares.
- c. Los dos números son naturales.
- d. Los dos números tienen el mismo signo.

28. Si $a^3 = 1$ entonces:

- a. $a = 1$.
- b. $a = -1$ ó $a = 1$.
- c. a es primo.
- d. a es par.

29. Si a y b son números enteros negativos:

- a. $a.b$ es positivo.
- b. $a + b$ es positivo.
- c. $a + b$ es par.
- d. $a^3 + b^3$ es positivo.

30. Si el producto de tres números enteros es positivo, con seguridad se cumple que:
- Los tres números son positivos.
 - Alguno de los números es negativo.
 - Alguno de los números es positivo.
 - Los tres números son negativos.
31. Estamos a 5°C y la temperatura lleva todo el día subiendo a razón de 3°C cada hora. Hace tres horas estábamos a:
- -4°C .
 - 14°C .
 - 4°C .
 - -14°C .
32. Viajamos de Bogotá a Ibagué a la velocidad constante de 90 km por hora, hace 90 minutos estábamos en el kilómetro:
- 55.
 - 65.
 - 10.
 - 45
33. Si a es un número no negativo, $-a^2$ es:
- Un número negativo.
 - Un número positivo.
 - Su signo depende del valor absoluto de a .
 - a es cero.
34. $(a + b^2)^2$ es igual a:
- $a^2 + 2ab^2 + b^2$.
 - $a^2 + 2ab^4 + b^2$.
 - $a^2 + 2ab^2 + b^4$.
 - $a^2 + 2ab + b^2$.

35. La expresión $(a^2 - b^2)^2$ es igual a:

- a. $a^2 + 2ab + b^2$.
- b. $a^4 + 2ab + b^4$.
- c. $a^2 - 2ab^2 + b^2$.
- d. $a^4 - 2a^2 b^2 + b^4$.

36. Si a y b son números enteros, $(a + 3b)^2$ es igual a:

- a. $a^2 + 9b^2$.
- b. $a^2 + 3ab + 9b^2$.
- c. $a^2 + 6ab + 9b^2$.
- d. $a^2 + 18ab + 9b^2$.

37. La expresión $2a + 4b$ es igual a:

- a. $2(a + 2b)$.
- b. $2(a + 4b)$.
- c. $2(a + b)$.
- d. $2(2a + b)$.

38. Si a y b son números enteros, la expresión $b(b - a) + (-1)(-a)b$ es igual a:

- a. b^2 .
- b. $b^2 - 2ab$.
- c. $b(b + a)$.
- d. $b^2 - a^2$.

39. El producto de $(a + b)(a - b)$ es igual a:

- a. $a^2 - b^2$
- b. $a^{-2} - b^{-2}$
- c. $b^2 - a^2$
- d. $b^{-2} - a^{-2}$

40. El ascensor de un edificio con varios sótanos, se encuentra en el piso tercero, baja 5 pisos, luego sube 7 pisos y por último baja dos veces consecutivas 3 pisos. ¿Dónde se encuentra el ascensor ahora?

- a. En el segundo sótano.
- b. En el primer sótano.
- c. En el primer piso.
- d. En el segundo piso.

Resolución de problemas y pensamiento crítico

41. Se tienen tres cajas que contienen 1600, 2000 y 3392 libras de jabón respectivamente. El jabón de cada caja está dividido en bloques del mismo peso y el mayor posible. El peso de cada bloque de jabón es:

- a. 16 libras.
- b. 8 libras.
- c. 10 libras.
- d. 12 libras.

42. Se tienen tres terrenos de extensiones 3675, 1575 y 2275 metros cuadrados de superficie, respectivamente y se quieren dividir en parcelas iguales. Para que el número de parcelas de cada una sea la menor posible la superficie de cada parcela es:

- a. 125 metros cuadrados.
- b. 130 metros cuadrados.
- c. 135 metros cuadrados.
- d. 175 metros cuadrados.

43. Tres caballos arrancan juntos en una carrera en que la pista es circular. Si el primero tarda 10 segundos en dar una vuelta a la pista, el segundo 11 segundos y el tercero 12 segundos. El número mínimo de segundos que pasarán para que pasen juntos por la línea de salida, es:

- a. 600 segundos.
- b. 660 segundos.
- c. 700 segundos.
- d. 800 segundos.

44. Dos automóviles corren alrededor de una pista de 2 km. Salen juntos. Uno de ellos (A), da una vuelta cada 80 segundos. El otro (B), da una vuelta en 60 segundos. El tiempo en que el más rápido le saca una vuelta de ventaja al más lento es:

- a. 200 segundos.
- b. 220 segundos.
- c. 240 segundos.
- d. 300 segundos.

45. Siguiendo el problema anterior, el tiempo en que el más rápido logra sacar 10 vueltas de ventaja es:

- a. 2000 segundos.
- b. 3000 segundos.
- c. 2400 segundos.
- d. 2200 segundos.

CAPÍTULO

2

LOS NÚMEROS RACIONALES

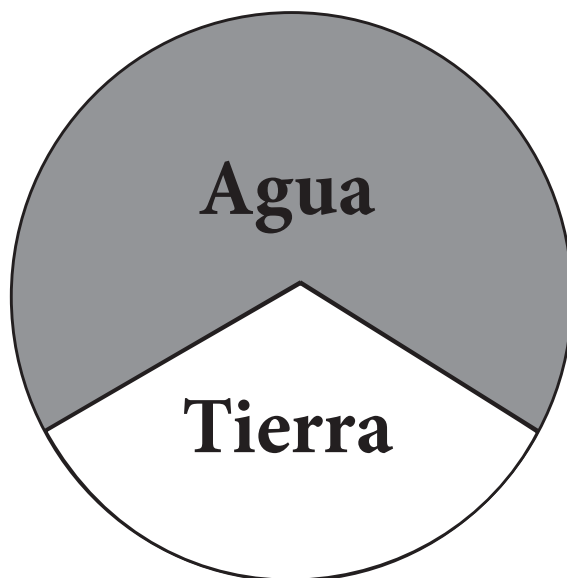
Competencias cognitivas

- ♦ Identificar el sistema numérico de los números racionales.
- ♦ Aplicar las diferentes propiedades de los números racionales en la solución de problemas que involucran dicho sistema numérico.
- ♦ Operar correctamente con los números racionales.
- ♦ Identificar las diferentes representaciones de los números racionales.

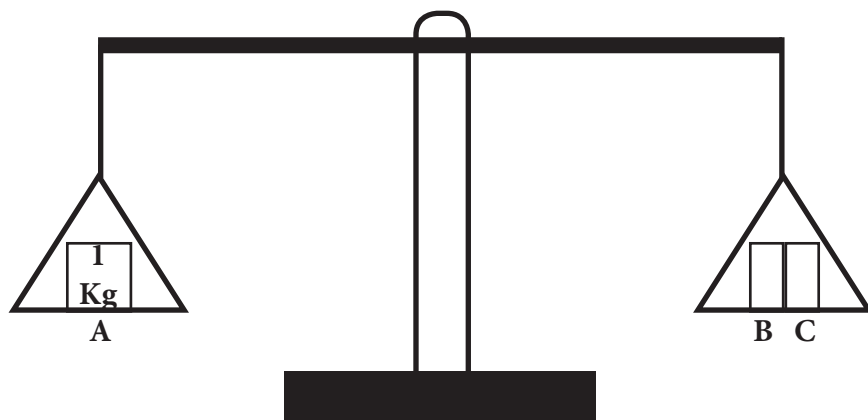
2.1 Introducción

Si se tienen los números naturales y enteros, es imposible resolver con ellos problemas tan simples como:

- ♦ Hallar un número entero que multiplicado por 3 resulte igual a 8.
- ♦ Representar la relación entre la extensión de tierra y las aguas marinas en el globo terrestre.



Si colocamos en uno de los platillos de una balanza una masa patrón (A) de un kilogramo y en el otro, dos cuerpos iguales (B) y (C), y esta queda en equilibrio, concluimos que cada cuerpo B y C tiene como masa la mitad del kilogramo patrón. En este caso, la masa de los cuerpos B y C no se pueden representar con un número entero.



Los números que nos permiten resolver los problemas anteriores son los números fraccionarios. Así, en el primer ejemplo a) el número que multiplicado por 3 da como resultado 8 es $8/3$. En el segundo ejemplo la fracción que representa la extensión aproximada de tierra en el globo terrestre es $1/3$ y de agua es $2/3$. En el tercer ejemplo la fracción que representa la masa de cada cuerpo B y C con respecto a la unidad patrón es $1/2$.

En general:

Una fracción es una expresión de la forma a/b , donde **a** y **b** son enteros y **b** diferente de cero.

En la fracción a/b , **a** y **b** se llaman términos de la fracción. Más específicamente **a** se llama el numerador y **b** denominador. El conjunto de los números fraccionarios se denota por **F** y se define por comprensión por:

$$F = \left[\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right]$$

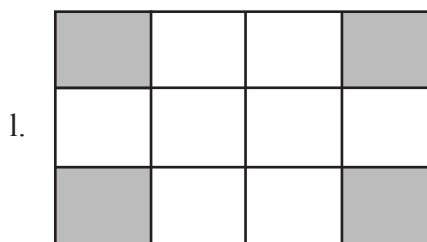
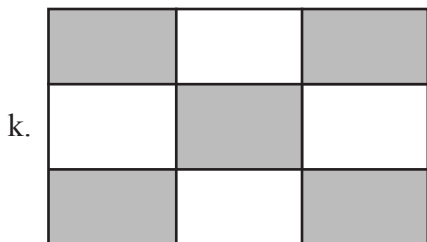
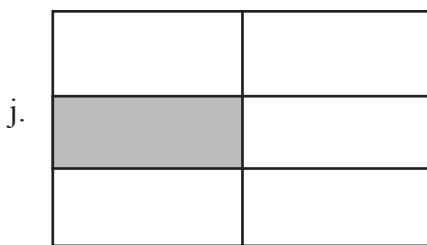
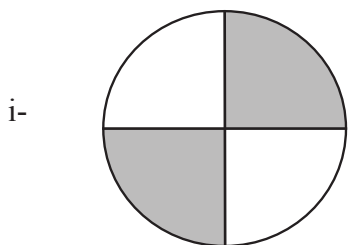
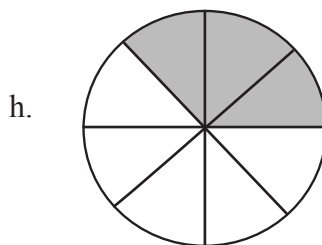
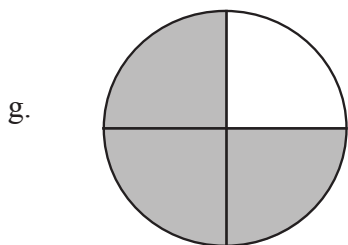
Ejemplos de números fraccionarios son: $4/5$,

$$\left\{ \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{3}{-9}, \frac{-4}{-7}, \frac{0}{2} \right\}$$

Observación: todo entero n se puede escribir como la fracción $\frac{n}{1}$.
Así: 3 se puede escribir como fracción $\frac{3}{1}$; -7 se puede escribir como fracción $\frac{-7}{1}$; 0 se puede escribir como $\frac{0}{1}$. Luego es claro que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Ejercicios 1

1. Escriba la fracción que representa la región sombreada:



2. Escribir la fracción que compara la parte sombreada de la región con el total de ella en cada uno de los siguientes casos.



3. ¿Qué observa acerca de las regiones sombreadas en los rectángulos anteriores?

4. Construir otros tres rectángulos con la misma región sombreada, pero representada por una fracción distinta a la dada.



2.2 Fracciones equivalentes

En el ejercicio 2 de la sección 2.1 de ejercicios observamos que las fracciones $1/3$, $2/6$, $3/9$, $4/12$ representan la misma región sombreada. En este caso, se dice que las fracciones son equivalentes. De igual forma, son equivalentes las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$$

Observemos que en el conjunto de fracciones equivalentes, $1/3$, $2/6$, $3/9$, $4/12$ se tiene la siguiente propiedad:

$$\frac{1}{2} \quad \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \quad \frac{2}{6} \quad (1) \cdot (6) = (3) \cdot (2)$$

$$\frac{2}{6} \quad \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \quad \frac{3}{9}$$

Se observa lo mismo con todas las fracciones equivalentes.

En general:

Las fracciones **a/b** , y, **c/d** son equivalentes si y sólo si $a \cdot d = b \cdot c$

Para indicar que las fracciones a/b y c/d son equivalentes escribimos $a/b=c/d$

Es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo 1:

- a. $2/3=10/15$; porque $(2) \cdot (15) = (3) \cdot (10)$.
- b. $(-3)/5=(-12)/20$; porque $(-3) \cdot (20) = (5) \cdot (-12)$.
- c. $(-4)/3=4/(-3)$; porque $(-4) \cdot (-3) = (3) \cdot (4)$.
- d. $(-7)/(-6) = 7/6$; porque $(-7) \cdot (6) = (-6) \cdot (7)$.
- e. $17/13$ no es equivalente a $24/26$ porque $(17) \cdot (26) = 442$, y, $(13) \cdot (24) = 312$ y, $442 \neq 312$.
- f. De igual forma $4/3 \neq 3/4$ y $9/6 \neq (-9)/6$.
- g. $0/5= 0/1$; porque $(0) \cdot (1) = (5) \cdot (0)$.

Ejercicios 2

1.
 - a. ¿Es $\{4 \times 1/3 \times 1., 4 \times 2/3 \times 2., 4 \times 3/3 \times 3., 4 \times 4/3 \times 4., \dots\}$ un conjunto de fracciones equivalentes?
 - b. ¿Es $\{6 \times 1/5 \times 1., 6 \times 2/5 \times 2., 6 \times 3/5 \times 3., 6 \times 4/5 \times 4., \dots\}$ un conjunto de fracciones equivalentes?
 - c. ¿Qué conclusión puede obtener de estos dos ejercicios?
2. Para cada uno de los siguientes conjuntos de fracciones equivalentes, escribir las tres fracciones que siguen:

$$\left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \dots \right\}$$

$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{8}, \frac{8}{9}, \dots \right\}$$

$$\left\{ \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \dots \right\}$$

$$\left\{ \frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{12}{15}, \dots \right\}$$

$$\left\{ \frac{5}{7}, \frac{10}{14}, \frac{15}{21}, \dots \right\}$$

3. Escribir dos fracciones equivalentes a cada una de las siguientes fracciones:

a.

b.

c.

d.

e.

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5}{8}$$

$$\frac{-5}{-12}$$

$$\frac{11}{-15}$$

$$\frac{3}{10}$$

4. Encontrar el término que falta para que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{4}{3} = \frac{?}{12}$ b) $\frac{5}{7} = \frac{10}{?}$ c) $\frac{-6}{9} = \frac{?}{3}$ d) $\frac{14}{?} = \frac{-7}{-6}$
 e) $\frac{?}{144} = \frac{11}{-12}$ f) $\frac{5}{7} = \frac{?}{4}$ g) $\frac{-14}{13} = \frac{28}{?}$

2.3

Amplificación y simplificación de fraccionarios

Un rectángulo A es dividido en 4 partes iguales, si se toman 3 de ellas, resulta la fracción $3/4$.

Si el mismo rectángulo A lo dividimos ahora en 8 partes iguales y tomamos 6 de ellas, nos resulta la fracción $6/8$, que corresponde a la misma región sombreada, así:



$$\frac{3}{4}$$



$$\frac{6}{8}$$

Este proceso de conseguir fracciones equivalentes, multiplicando el numerador y el denominador por un mismo número se llama **amplificación**. En general, siempre que se multiplique el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número diferente de cero se obtienen fracciones equivalentes. Así:

$$\text{Si } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \text{ entonces, } \frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Ejemplo 1:

a. $\frac{9}{4} = \frac{9 \times 3}{4 \times 3} = \frac{27}{12}$

b. $\frac{5}{3} = \frac{5 \times (-2)}{3 \times (-2)} = \frac{-10}{-6}$

c. $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \frac{4 \times 5}{5 \times 5} = \frac{-10}{-5}$

Supongamos ahora que dividimos el rectángulo A en 6 partes y tomamos

2. Resulta la fracción $2/6$.

Si dividimos el mismo rectángulo en 3 partes y tomamos 1, obtenemos la fracción $1/3$, que corresponde a la misma región sombreada; así:

$2/6$



$1/3$



Este proceso de conseguir fracciones equivalentes dividiendo tanto el numerador como el denominador por un mismo número, se llama simplificación de fracciones. En general, siempre que se divide el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número diferente de cero se obtienen fracciones equivalentes, así:

$$\text{Si } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \text{ entonces, } \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{1k \cdot b}$$

Ejemplo 2:

$$\text{a) } \frac{9}{6} = \frac{9 \div 3}{6 \div 3} = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \frac{12}{20} = \frac{12 \div (-4)}{20 \div (-4)} = \frac{-3}{-2}$$

Una fracción que no se puede simplificar o que el máximo común divisor (M.C.D) del numerador y denominador sea 1 se llama irreducible, o se dice que está reducido a su mínima expresión; así por ejemplo:

$$2/3, -3/4, 11/27, -4/35$$

Los ejemplos siguientes ilustran el proceso para reducir una fracción a su mínima expresión.

Ejemplo 3:

a. Reducir a su mínima expresión

$$\frac{10}{15}$$

Buscamos el M.C.D $(10,15) = 5$

Luego:

$$\frac{10}{15} = \frac{10 \div 5}{15 \div 5} = \frac{2}{3} \quad (\text{Fracción irreducible})$$

b. Reducir a su mínima expresión: $\frac{14}{63}$

Buscamos el M.C.D $(14,63) = 7$

Luego:

$$\frac{14}{63} = \frac{14 \div 7}{63 \div 7} = \frac{2}{9} \quad (\text{Fracción irreducible})$$

c. Reducir a su mínima expresión $\frac{-32}{56}$

Buscamos el M.C.D $(-32,56) = 8$

Luego:

$$\frac{-32}{56} = \frac{-32 \div 8}{56 \div 8} = \frac{-4}{7} \quad (\text{Fracción irreducible})$$

Ejercicios 3

1. Para las fracciones siguientes escribir la fracción equivalente que tenga a 24 como denominador.

- a. $\frac{2}{3}$ b. $-\frac{1}{2}$ c. $\frac{5}{-12}$
d. $-\frac{3}{-8}$ e. $\frac{1}{4}$ f. $\frac{5}{-6}$
g. $-\frac{7}{8}$

2. Hallar el M.C.D. de cada uno de los términos de las siguientes fracciones y reducirlas luego a su mínima expresión.

- a. $\frac{12}{18}$ b. $\frac{42}{49}$ c. $-\frac{20}{12}$
e. $\frac{39}{52}$ f. $-\frac{48}{64}$ d. $\frac{45}{-60}$

3. Reducir a su mínima expresión.

- a. $\frac{28}{36}$ b. $\frac{54}{108}$ c. $\frac{84}{126}$ d. $\frac{72}{324}$

4. Escribir el término que falta:

- a) $\frac{-9}{24} = \frac{?}{8}$ b) $\frac{10}{18} = \frac{?}{-9}$ c) $\frac{8}{22} = \frac{88}{?}$
d) $\frac{-20}{-28} = \frac{?}{84}$ e) $\frac{24}{32} = \frac{?}{4}$ f) $\frac{12}{85} = \frac{?}{595}$
j) $\frac{4}{5} = \frac{?}{415}$

5. Decir si estas igualdades son verdaderas (V) o falsas (F):

a) $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ _____ b) $\frac{2}{5} = \frac{5}{2}$ _____ c) $\frac{3}{7} = \frac{7}{3}$ _____

d) $\frac{14}{16} = \frac{35}{80}$ _____ e) $\frac{2}{15} = \frac{12}{90}$ _____ f) $\frac{7}{13} = \frac{91}{169}$ _____

g) $\frac{5}{6} = \frac{45}{48}$ _____ h) $\frac{11}{17} = \frac{187}{189}$ _____ i) $\frac{5}{249} = \frac{26}{45}$ _____

j) $\frac{63}{18} = \frac{49}{15}$ _____

2.4 Notación

a) Como, $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ escribimos en adelante:

$$\frac{a}{b} = \text{En lugar de, } \frac{-a}{-b}$$

Así, escribimos, $\frac{2}{3}$ en lugar de, $\frac{-2}{-3}$ y

$$\frac{15}{17} \text{ en lugar de, } \frac{-15}{-17}$$

b. Como, $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ escribiremos en adelante $\frac{-a}{b}$ o,

también se $-\frac{a}{b}$ acostumbra

Así: $\frac{-3}{4}$ o $-\frac{3}{4}$ en lugar de $\frac{3}{-4}$

$\frac{-5}{2}$ o $-\frac{5}{2}$ en lugar de $\frac{5}{-2}$.

Es decir:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Ejercicios 4

Escribir cada una de las siguientes fracciones en la notación que utilizaremos en adelante.

a. $\frac{4}{-5}$ b. $\frac{-6}{-3}$ c. $\frac{13}{-15}$ d. $\frac{-12}{-11}$ e. $\frac{0}{-7}$

2.5

Representación gráfica de las fracciones irreducibles

Una fracción cuyo numerador es menor que el denominador se llama fracción propia; en el caso contrario, se llama fracción impropia (sin tener en cuenta el signo).

Así:

$3/5$ es fracción propia porque	$3 < 5$
$-2/7$ es fracción propia porque	$2 < 7$
$4/3$ es fracción impropia porque	$4 > 3$
$-9/4$ es fracción impropia porque	$9 > 4$
$0/2$ es fracción propia ya que	$0 < 2$

Toda fracción impropia se puede expresar en otra forma, llamada expresión mixta, utilizando el algoritmo de la división.

Fracción Impropia	Algoritmo de la división	Expresión Mixta
$\frac{7}{-5}$	$\begin{array}{r} 7 \overline{) 3} \\ 1 \quad 2 \end{array}$	$2 \frac{1}{3}$

$$\frac{39}{4} \quad 39 \overline{) 4} \quad \rightarrow \quad 9 \frac{3}{4}$$

3 9

$$-\frac{26}{3} \quad 26 \overline{) 3} \quad \rightarrow \quad -\left(8 \frac{2}{3}\right)$$

2 8

De forma similar cualquier expresión mixta se puede llevar a una fracción impropia, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Expresión Mixta	Procedimiento	Fracción impropia
a) $3 \frac{1}{4}$	$3 \times 4 + 1 = 13$	$\frac{13}{4}$
b) $4 \frac{2}{5}$	$4 \times 5 + 2 = 22$	$\frac{22}{5}$
c) $-(2 \frac{3}{8})$	$2 \times 8 + 3 = 19$	$-\frac{19}{8}$
d) $-(5 \frac{7}{10})$	$5 \times 10 + 7 = 57$	$-\frac{57}{10}$

Ejercicios 5

1. Diga si la fracción es propia e impropia.

a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{4}{3}$ c. $\frac{-9}{7}$ d. $\frac{-1}{12}$ e. $\frac{-7}{9}$

f. $\frac{25}{8}$ g. $\frac{-31}{4}$ h. $\frac{95}{96}$ i. $\frac{101}{100}$ j. $\frac{70}{69}$

2. En el ejercicio 1, exprese las fracciones impropias como mixtas.

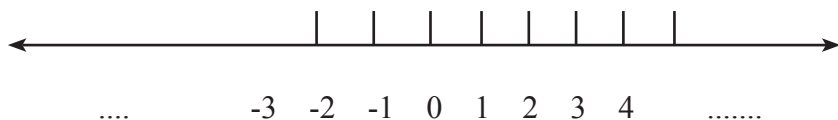
3. Escriba las siguientes expresiones mixtas como fracciones impropias:

a. $15\frac{3}{8}$ b. $20\frac{3}{19}$ c. $-(17\frac{5}{18})$ d. $31\frac{5}{31}$

e. $(-42\frac{3}{8})$ f. $53\frac{9}{17}$ g. $-(80\frac{3}{37})$ h. $5\frac{3}{106}$

2.5.1 Representación gráfica

Para representar gráficamente fracciones irreducibles se localizan sobre la recta numérica los enteros y se tiene en cuenta que las fracciones propias están entre -1 y 1; las fracciones impropias a la derecha de 1 o a la izquierda de -1.



Para localizar las fracciones se procede como en los siguientes ejemplos:

a. Tenga en cuenta que $\frac{3}{5}$ es una fracción propia, luego ella se localiza entre 0 y 1.

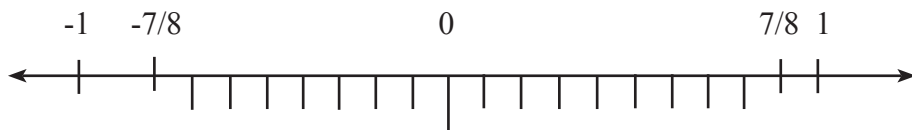
Por lo tanto, se divide la unidad en 5 partes a partir de cero hacia la derecha. Si tuviéramos que localizar $-\frac{3}{5}$ procederíamos en forma similar pero hacia a la izquierda de 0. Se observa que $-\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{5}$ están localizados de manera simétrica con respecto a 0.



b. Tenga en cuenta que $\frac{7}{8}$ es una fracción propia, luego ella se localiza entre 0 y 1.

Por la tanto, se divide la unidad en 8 partes iguales a partir de cero hacia la derecha.

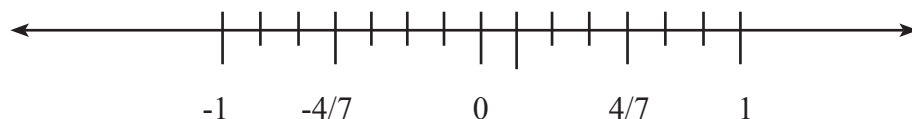
Si tuviéramos que localizar $-\frac{7}{8}$ procederíamos en forma similar pero hacia a la izquierda de 0. Se observa que $-\frac{7}{8}$ y $\frac{7}{8}$ están localizados de manera simétrica con respecto a 0.



c. $-\frac{4}{7}$ se localiza de la siguiente forma.

Tenga en cuenta que $-\frac{4}{7}$ es una fracción propia, luego ella se localiza entre 0 y 1.

Por la tanto, se divide la unidad en 7 partes iguales a partir de cero hacia la izquierda. Si tuviéramos que localizar $\frac{4}{7}$ procederíamos en forma similar pero hacia a la derecha de 0. Se observa que $-\frac{4}{7}$ y $\frac{4}{7}$ están localizados de manera simétrica con respecto a 0.

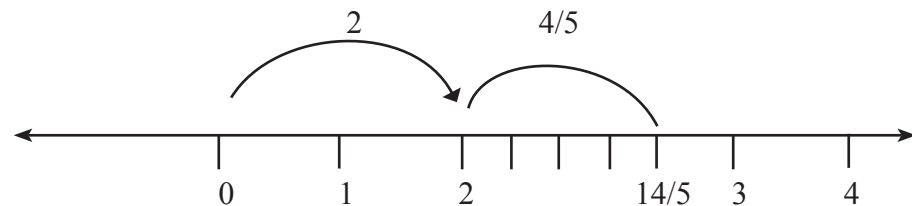


d. Tenga en cuenta que $\frac{10}{3}$ es una fracción impropia, luego ella se puede expresar en la forma mixta $3 \frac{1}{3}$; y entonces se divide la unidad entre 3 y 4 en 3 partes.

Por la tanto, si se toma una de estas tres divisiones después de la tercera unidad, ahí queda localizada la fracción $\frac{10}{3}$.

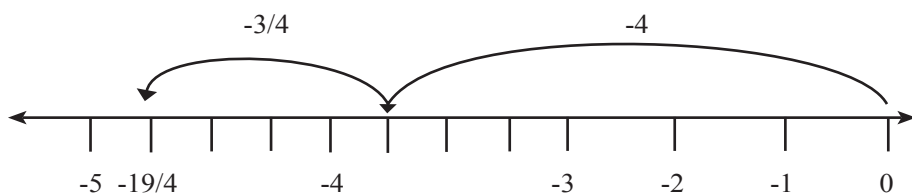


e. $\frac{14}{5}$ se localiza de la siguiente forma:



f. $-19/4$ se localiza así:

Como $-19/4 = -(4\frac{3}{4})$, se toman a partir de cero hacia la izquierda 4 unidades y $\frac{3}{4}$ de la siguiente tal como se muestra en la figura.



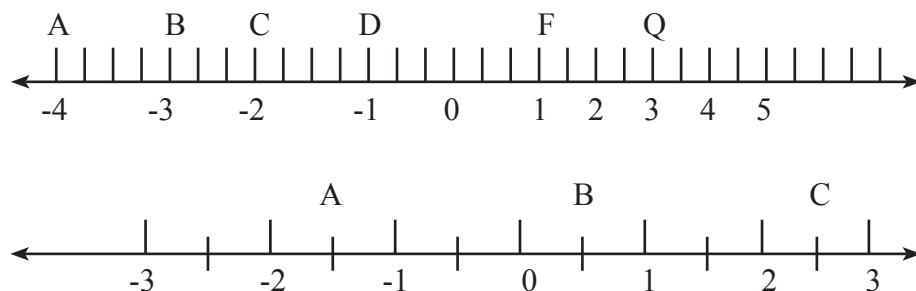
Ejercicios 6

1. Defina si la fracción es propia e impropia.

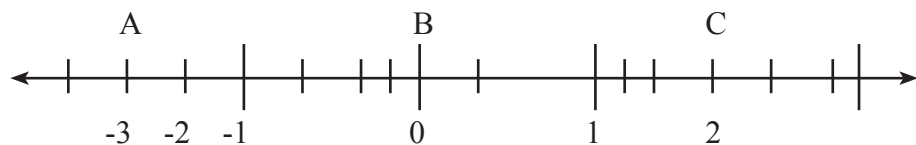
a. $\frac{8}{7}$ b. $-\frac{2}{5}$ c. $\frac{13}{2}$ d. $\frac{3}{8}$ e. $\frac{17}{10}$

f. $\frac{-3}{10}$ g. $\frac{15}{4}$ h. $-\frac{7}{4}$ i. $\frac{31}{6}$

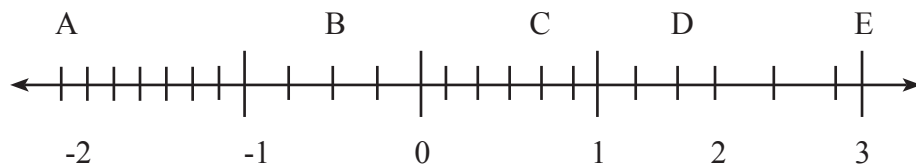
2. Hallar el número que corresponde a cada letra en la recta numérica.



3. Dibujar una recta numérica con escala en medios, es decir cada unidad se divide en la mitad. Luego, marcar con puntos, de modo que cada segmento pequeño quede dividido en tres partes iguales. ¿Cuál es la nueva escala? ¿Qué número corresponde a cada letra en esta nueva escala?



4. ¿Qué número corresponde a cada uno de los puntos A, B, C, D y E?



2.6

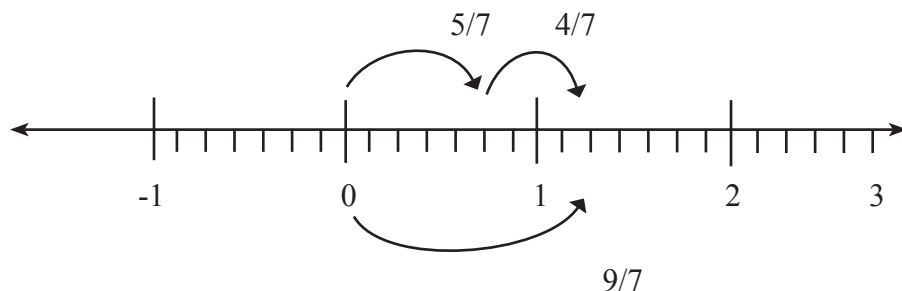
Adición de números fraccionarios

2.6.1 Adición de fracciones homogéneas (fracciones con el mismo denominador)

La recta numérica puede ayudarnos en la adición de fracciones que tienen el mismo denominador, de la misma manera como se hizo con los números enteros.

Ejemplo 1:

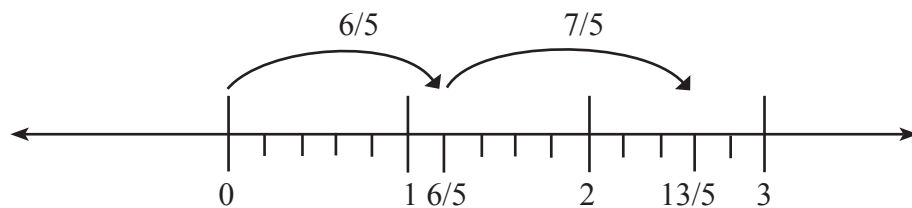
a. Sumar $5/7 + 4/7$



Luego:

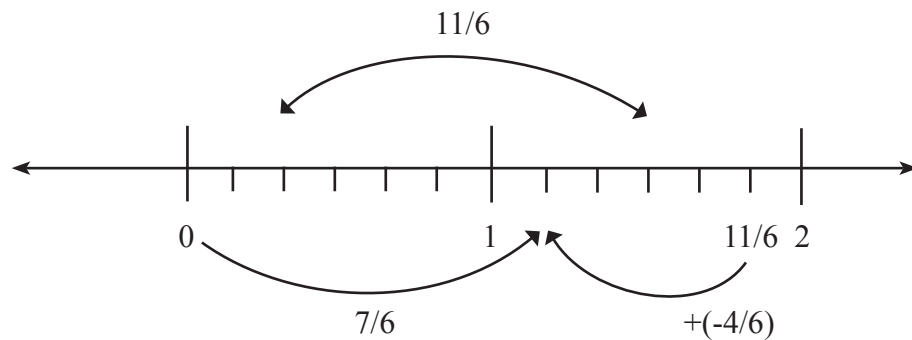
$$5/7 + 4/7 = \frac{5+4}{7} = 9/7$$

b. Sumar $6/5 + 7/5$



Luego: $6/5 + 7/5 = \frac{6+7}{5} = 13/5$

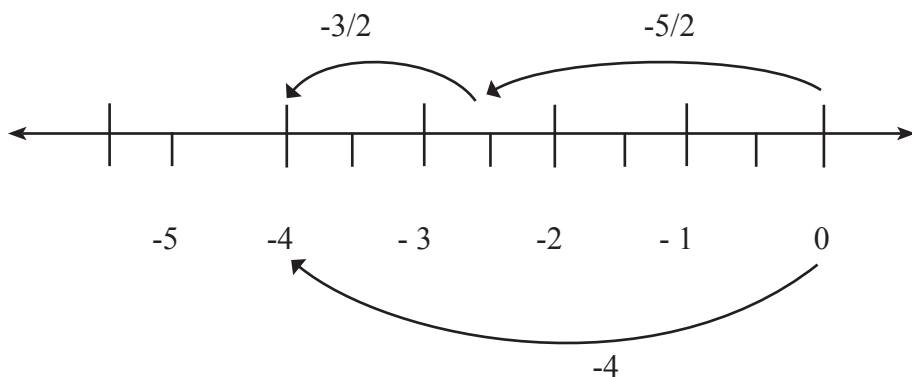
c. Sumar $11/6 + \left(-\frac{4}{6}\right)$



$$\frac{11}{6} + \left(-\frac{4}{6}\right) = \frac{11+(-4)}{6} = \frac{7}{6}$$

d. Sumar

$$\left(-\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)$$



$$\left(-\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{(-5)+(-3)}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

En conclusión, para sumar fracciones que tengan el mismo denominador se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.

En general:

Sí a , b y c son enteros y $b \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Ejemplo 2:

$$\text{a) } \frac{5}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5+3}{7} = \frac{8}{7}$$

$$\text{b) } \frac{13}{12} + \left(-\frac{7}{12}\right) = \frac{13+(-7)}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{2}{8} = \frac{(-5)+2}{12} = \frac{3}{8}$$

$$\text{d) } \left(-\frac{11}{15}\right) + \left(-\frac{7}{15}\right) = \frac{(-11)+(-7)}{15} = \frac{-28}{15} = \left(-1\frac{13}{15}\right)$$

$$\text{e) } 8\frac{2}{5} + 3\frac{1}{5} = \frac{42}{5} + \frac{16}{5} = \frac{58}{5} = 11\frac{3}{5}$$

Ejercicios 7

1. Hallar las sumas y simplificar:

a) $\frac{9}{16} + \frac{6}{16}$

b) $\frac{11}{3} + \frac{7}{3}$

c) $\frac{7}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right)$

d) $\left(-\frac{3}{10}\right) + \frac{4}{16}$

e) $\frac{3}{10} + \left(-\frac{4}{16}\right)$

f) $\left(-\frac{3}{10}\right) + \left(-\frac{9}{10}\right)$

g) $\left(-\frac{7}{5}\right) + \frac{2}{5}$

h) $\left(-\frac{11}{12}\right) + \frac{2}{12}$

i) $\left(-\frac{54}{100}\right) + \frac{14}{100}$

j) $3\frac{1}{4} + 5\frac{3}{4}$

k) $-(4\frac{1}{10}) + 9\frac{3}{10}$

l) $-(7\frac{1}{24}) + 3\frac{5}{24}$

2. Resolver los siguientes problemas:

- a. Un rectángulo tiene $\frac{7}{8}$ m de largo y $\frac{3}{8}$ m de ancho ¿Cuál es su perímetro?

$\frac{7}{8}$ m

$\frac{3}{8}$ m



- b. La distancia del pueblo A al pueblo B es $\frac{4}{6}$ km. La del pueblo B a C es de $\frac{3}{5}$ km ¿Cuál es la distancia de A a C, si se pasa por B?

2.7

Adición de fracciones que tienen distinto denominador

Si se sabe sumar fracciones que tienen el mismo denominador, entonces el problema de sumar con distinto denominador se reduce a llevar las fracciones a fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. El proceso para hallar dichas fracciones equivalentes es calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores, el cual se llama el mínimo común denominador de las fracciones.

Ejemplo 1:

$$\text{a. } \frac{3}{4} + \frac{5}{18}$$

$$\text{m.c.m (4,18)} = 36$$

$$\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$$

$$\frac{5}{18} = \frac{10}{36}$$

$$\text{Luego: } \frac{3}{4} + \frac{5}{18} = \frac{27}{36} + \frac{10}{36} = \frac{27+10}{36} = \frac{37}{36} = 1 \frac{1}{36}$$

$$\text{b. } \frac{7}{10} + \frac{4}{15}$$

$$\text{m.c.m (10,15)} = 30$$

$$\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$$

$$\frac{4}{15} = \frac{8}{30}$$

$$\text{Luego: } \frac{7}{10} + \frac{4}{15} = \frac{21}{30} + \frac{8}{30} = \frac{21+8}{30} = \frac{29}{30}$$

$$c. \quad \frac{9}{26} + \left(\frac{-5}{13} \right)$$

$$\text{m.c.m } (26,13) = 26$$

$$\frac{9}{26} \quad \text{queda igual ya que su denominador es el m.c.m}$$

$$\frac{-5}{13} = \frac{10}{26}$$

$$\text{Luego: } \frac{9}{126} + \left(\frac{-5}{113} \right) = \frac{9}{26} + \left(-\frac{10}{26} \right) = \frac{9 + (-10)}{26} = \frac{1}{26}$$

$$d. \quad 5 \frac{3}{8} + 6 \frac{1}{10}$$

Esta expresión en la misma que:

$$5 \frac{3}{8} + 6 \frac{1}{10} = \frac{45}{8} + \frac{121}{20}$$

$$\text{m.c.m } (8,20) = 40$$

$$\frac{45}{8} = \frac{225}{40} \quad \frac{121}{20} = \frac{242}{40}$$

Luego:

$$5 \frac{3}{8} + 6 \frac{1}{10} = \frac{45}{8} + \frac{121}{20} = \frac{225}{40} + \frac{242}{40} = \frac{467}{40} = 11 \frac{27}{40}$$

Luego:

$$5 \frac{3}{8} + 6 \frac{1}{10} = 11 \frac{27}{40}$$

$$\text{e. } \left(-\frac{4}{21}\right) + \left(-\frac{5}{18}\right)$$

$$\text{m.c.m } (21, 18) = 126$$

$$-\frac{4}{21} = -\frac{24}{126} = \quad \text{y} \quad -\frac{5}{18} = -\frac{35}{126}$$

Por lo tanto:

$$\left(-\frac{4}{21}\right) + \left(-\frac{5}{18}\right) = \left(-\frac{24}{126}\right) + \left(-\frac{35}{126}\right) = \frac{(-24)+(-35)}{126} = \frac{-59}{126} = \frac{59}{126}$$

Ejercicios 8

1. Efectuar las siguientes sumas:

a. $\frac{7}{20} + \frac{11}{25}$

b. $(-\frac{5}{18}) + \frac{2}{35}$

c. $3\frac{3}{4} + 2\frac{2}{5}$

d. $2\frac{1}{20} + 3\frac{1}{100}$

e. $\frac{5}{34} + (-\frac{2}{21})$

f. $13 + \frac{1}{7}$

g. $(-\frac{6}{21}) + (-\frac{5}{77})$

h. $\frac{4}{33} + \frac{4}{55}$

i. $(-44\frac{3}{5}) + 66\frac{9}{10}$

h. $43\frac{1}{2} + (-19\frac{5}{16})$

2.8

Propiedades de la adición de números fraccionarios

En el punto 2.6.1 se observa que cada vez que se suman dos fracciones se obtiene como resultado otra fracción; esto significa que la adición en los fraccionarios es una operación clausurativa o binaria.

Además, la adición en F cumple las mismas propiedades de la adición de Z , es decir:

a. Conmutativa

$$\text{Para todo } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

Ejemplo 1:

$$\text{a. } \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}$$

$$\text{b. } \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{7}{5} = \frac{7}{5} + \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{c. } \left(-\frac{8}{7}\right) + \left(-\frac{9}{2}\right) = \left(-\frac{9}{2}\right) + \left(-\frac{8}{7}\right)$$

b. Asociativa

$$\text{Para todo } \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in F: \quad \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$$

Ejemplo 2:

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \left(-\frac{7}{2} \right) + \left(\frac{3}{5} + \left(-\frac{5}{6} \right) \right) = \left(\left(-\frac{7}{2} \right) + \frac{3}{5} \right) + \left(-\frac{5}{6} \right)$$

Observación. Esta propiedad se puede generalizar para efectuar sumas de más de tres sumandos.

c. Modulativa

Para toda fracción $\frac{a}{b}$, se tiene que $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$

Ejemplo 3:

$$\text{a) } \frac{3}{7} + 0 = \frac{3}{7}$$

$$\text{b) } \left(-\frac{2}{5} \right) + 0 = -\frac{2}{5}$$

$$\text{c) } 0 + \left(-\frac{9}{2} \right) = \left(-\frac{9}{2} \right)$$

d. Invertiva

La suma de un número fraccionario $\frac{a}{b}$ y su opuesto $-\frac{a}{b}$ es siempre 0.

Así: $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b} \right) = 0$ para todo $\frac{a}{b} \in F$

Ejemplo 4:

a) $\frac{3}{7} + \left(-\frac{3}{7}\right) = 0$

b) $\left(-\frac{19}{6}\right) + \frac{19}{6} = 0$

c) $\frac{17}{10} + \left(-\frac{17}{10}\right) = 0$

Ejercicios 9

1. Escribir el nombre de la propiedad que ilustra cada ejemplo:

a) $\frac{7}{5} + \left(-\frac{7}{5}\right) = 0$ _____

b) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right)$ _____

c) $\left(-\frac{4}{3}\right) + 0 = -\frac{4}{3}$ _____

d) $\frac{3}{8} + \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{3}{8}$ _____

2. Hallar el opuesto de cada uno de los siguientes números

a) $\frac{3}{8}$ b) $-\frac{5}{6}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{11}{5}$ e) $-\frac{37}{45}$

3. Hallar el número correspondiente a n :

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \frac{3}{4} + n = 0 & \text{b) } \frac{11}{4} + n = 0 & \text{c) } n + \left(-\frac{7}{8}\right) = 0 \\
 \text{d) } 2 + n = 0 & \text{e) } \left(-\frac{2}{3}\right) + n = \left(-\frac{2}{3}\right) & \text{f) } \frac{7}{8} + \left(-\frac{7}{8}\right) = n \\
 \text{g) } \left(-\frac{5}{4}\right) + n = 0 & \text{h) } 1\frac{5}{6} + \left(-\frac{11}{6}\right) = 0 & \text{i) } (-4) + n = 0 \\
 \text{j) } \left(-\frac{13}{8}\right) + 1\frac{5}{8} = n & \text{k) } n + \frac{5}{2} = 0 & \text{l) } \frac{3}{4} + n = \frac{3}{4}
 \end{array}$$

4. Efectuar las siguientes sumas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \frac{1}{8} + \frac{5}{6} + \left(-\frac{1}{4}\right) & \text{b) } \frac{7}{11} + \frac{5}{9} + \frac{4}{11} \\
 \text{c) } \frac{3}{8} + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) & \text{d) } \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{1}{16} \\
 \text{e) } \left(-\frac{7}{5}\right) + \left(-\frac{8}{15}\right) + \frac{11}{60} & \text{f) } \left(-\frac{9}{10}\right) + \left(-\frac{13}{75}\right) + \left(-\frac{8}{15}\right) \\
 \text{g) } \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{3}{10}\right) & \text{h) } 5 + \frac{4}{5} + \left(-\left(6\frac{2}{5}\right)\right) + 8\frac{3}{5} \\
 \text{i) } 8\frac{1}{9} + 10\frac{7}{9} + \left(-\left(16\frac{1}{9}\right)\right) & \text{j) } 1\frac{1}{5} + \left(-\left(3\frac{1}{4}\right)\right) + 2\frac{1}{15} + \frac{65}{60} \\
 \text{k) } 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{6} & \text{l) } 7\frac{1}{90} + (-18) + \frac{45}{100}
 \end{array}$$

5. Resolver los siguientes problemas:

a) Un hombre camina $4\frac{1}{2}$ km el lunes, $8\frac{2}{3}$ km el martes, 10 km el miércoles y $\frac{5}{8}$ de km el jueves ¿Cuánto ha recorrido en los cuatro días?

b) El perímetro de un triángulo es $6\frac{3}{8}$ cm. La longitud de un lado es $2\frac{1}{2}$ cm y la de un segundo lado es $1\frac{1}{4}$ cm. Hallar la longitud del tercer lado.

2.9

Sustracción de fracciones

De la misma manera que en los enteros, para efectuar una sustracción en los fraccionarios sumamos al minuendo el opuesto del sustraendo, así:

$$\text{Si } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{F}, \text{ entonces } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$$

Ejemplo 1:

$$\text{a) } \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{4+(-1)}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{6} + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{3+(-1)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \frac{1}{10} - \frac{3}{5} = \frac{1}{10} + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{10} + \left(-\frac{6}{10}\right) = \frac{1+(-6)}{10} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d) } 8 - \frac{2}{3} = 8 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{24}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{22}{3} = 7\frac{2}{3}$$

$$\text{e) } 6\frac{5}{6} - \left(3\frac{1}{6}\right) = \frac{41}{6} - \frac{19}{6} = \frac{22}{6} = 3\frac{2}{3}$$

Ejercicios 10

1. Efectuar:

a) $\frac{9}{16} - \frac{5}{16}$

b) $\frac{24}{35} - \frac{10}{35}$

c) $\frac{7}{12} - \frac{1}{4}$

d) $\frac{11}{8} - \frac{7}{24}$

e) $\frac{3}{8} - \frac{1}{12}$

f) $\frac{7}{62} - \frac{3}{155}$

g) $\frac{7}{80} - \frac{1}{90}$

h) $\frac{7}{35} - \frac{1}{100} - \frac{11}{1000}$

i) $\frac{19}{36} - \frac{7}{80} - \frac{11}{90}$

j) $19\frac{5}{7} - \left(12\frac{8}{105}\right)$

2. Efectuar:

a) $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14}$

b) $80 - \left(3\frac{3}{5}\right) - \left(4\frac{3}{10}\right)$

c) $\frac{7}{20} + \left(3\frac{1}{16}\right) - \left(3\frac{1}{5}\right)$

d) $6 + 5\frac{3}{5} - \left(4\frac{3}{6}\right) - \left(4\frac{1}{2}\right)$

e) $25 - \frac{7}{30} + 4\frac{1}{20} - \frac{1}{50} - \frac{1}{6} - 3$

3. Un cable tiene $50\frac{2}{3}$ metros de longitud y otro $45\frac{5}{8}$ metros. ¿Cuántos metros tienen los dos cables y cuánto le falta a cada uno de ellos para tener 80 metros de largo?
4. La cuarta parte del día la emplea un niño en estudiar, la sexta parte en hacer ejercicios y la novena en divertirse. ¿Qué parte del día le queda libre?
5. Si restamos $\frac{7}{8}$ de un número, la diferencia es $\frac{11}{16}$. ¿Cuál es el número?

2.10 Ecuaciones con fracciones

Tal como sucede en los números enteros, en donde se tiene una propiedad que relaciona la igualdad y la adición de enteros, de forma similar se tiene en los números fraccionarios una propiedad que relaciona la adición y la igualdad llamada la propiedad uniforme de la suma de fracciones con respecto a la adición, así:

$$\text{Para todo } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \text{ y } \frac{e}{f} \in F; \text{ y si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{entonces } \frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

Esta propiedad es útil en la solución de ecuaciones, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1:

a) Hallar el valor de **n** en las siguiente ecuación:

$$n + \frac{2}{7} = \frac{3}{4}$$

$$\left(n + \frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{4} + \left(-\frac{2}{7}\right) \quad (\text{Propiedad de la uniformidad})$$

$$n + \left(\frac{2}{7} + \left(-\frac{2}{7}\right)\right) = \frac{3}{4} + \left(-\frac{2}{7}\right) \quad (\text{Propiedad asociativa})$$

$$n + 0 = \frac{3}{4} + \left(-\frac{2}{7}\right) \quad (\text{Propiedad invertiva de la adición})$$

$$n = \frac{3}{4} + \left(-\frac{2}{7}\right) \quad (\text{Propiedad modulativa de adición})$$

$$n = \frac{13}{28} \quad (\text{Propiedad clausurativa})$$

b) Hallar el valor de **n** en las siguiente ecuación:

$$n - \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$$

$$\left(n + \left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{3}{4} \quad (\text{Definición de sustracción})$$

$$\left(n + \left(-\frac{3}{5}\right)\right) + \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{5}\right) \quad (\text{Propiedad de la uniformidad})$$

$$n + \left(\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{5}\right) \quad (\text{Propiedad asociativa})$$

$$n + 0 = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{5}\right) \quad (\text{Propiedad invertiva de la adición})$$

$$n = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{5}\right) \quad (\text{Propiedad modulativa de la adición})$$

$$n = \frac{14}{15} \quad (\text{Propiedad clausurativa})$$

c) Hallar el valor de **n** en las siguiente ecuación:

$$n + 2 = \frac{14}{9}$$

$$(n + 2) + (-2) = \frac{14}{9} + (-2) \quad (\text{Propiedad de la uniformidad})$$

$$N + (2 + (-2)) = \frac{14}{9} + (-2) \quad (\text{Propiedad asociativa})$$

$$n + 0 = \frac{14}{9} + (-2) \quad (\text{Propiedad invertiva de la adición})$$

$$n = \frac{14}{9} + (-2) \quad (\text{Propiedad modulativa de adición})$$

$$n = -\frac{4}{9} \quad (\text{Propiedad clausurativa})$$

d) Hallar el valor de x en las siguiente ecuación:

$$\frac{7}{8} + X = -\frac{3}{4}$$

Solución

Teniendo en cuenta la expresiones encerradas en los recuadros en los ejercicios a), b) y c) entonces se ve que las ecuaciones de esta forma se pueden resolver fácilmente de la siguiente manera:

$$\frac{7}{8} + X = -\frac{3}{4}$$

$$x = \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{7}{8}\right)$$

$$x = -\frac{13}{8} = -\left(1\frac{5}{8}\right)$$

De manera similar:

$$e) \quad x + \left(-\frac{1}{6}\right) = 1$$

$$x = 1 + \frac{1}{6} = 1$$

$$x = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

$$f) \quad x - \frac{4}{5} = \left(-\frac{7}{15}\right)$$

$$x + \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{7}{15}\right)$$

$$x = \left(-\frac{7}{15}\right) + \frac{4}{5}$$

$$x = \left(\frac{7}{15}\right) = \frac{1}{3}$$

Ejercicios 11

1. Hallar el valor de y en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\left(-\frac{3}{4}\right) + y = \left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $y + \frac{1}{3} = (-1)$

c) $\left(\frac{4}{3}\right) + y = \left(-\frac{4}{5}\right)$ d) $\left(\frac{43}{70}\right) + y = \left(\frac{51}{40}\right)$

e) $y + \frac{81}{350} = \left(-\frac{77}{60}\right)$ f) $\left(-3\frac{5}{7}\right) + y = \left(-\frac{11}{15}\right)$

g) $y - \left(16\frac{2}{3}\right) = \left(9\frac{11}{8}\right)$

2. ¿Cuál es el número que sumado con $\frac{28}{105}$ nos da $\frac{32}{35}$?

3. La suma de dos números es $6\frac{1}{4}$. Uno de ellos es $\left(4\frac{1}{2}\right)$.
¿Cuál es el otro número?

4. Si restamos $\frac{2}{7}$ de un número, la diferencia es $\frac{32}{35}$. ¿Cuál es el número?

2.11 Multiplicación de fracciones

Definición

Aquellas fracciones cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es un entero positivo se llaman unidades fraccionarias.

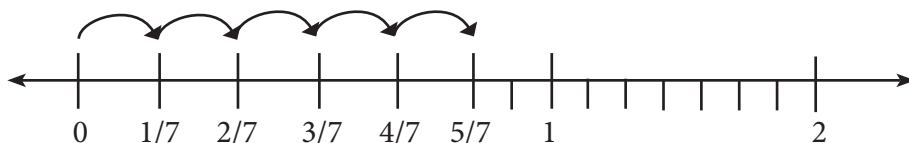
Así, por ejemplo:

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{11}$ son unidades fraccionarias.

2.11.1 Multiplicación de un entero por una unidad fraccionaria

Los siguientes ejemplos muestran como se multiplica un entero por una unidad fraccionaria.

a) $5 \times \frac{1}{7}$

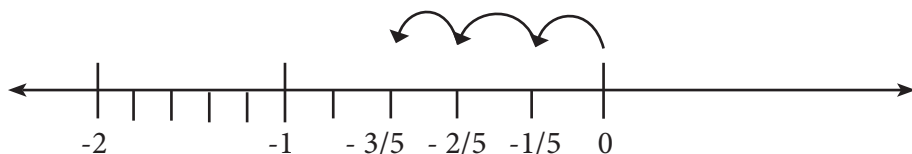


cinco saltos de $\frac{1}{7}$ cada uno hacia la derecha que corresponden a $\frac{5}{7}$.

Es decir que:

$$5 \times \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

b) $(-3) \times \frac{1}{5}$



tres saltos de $-1/5$ cada uno hacia a la izquierda corresponden a $-3/5$.

Es decir que:

$$(-3) \times \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}$$

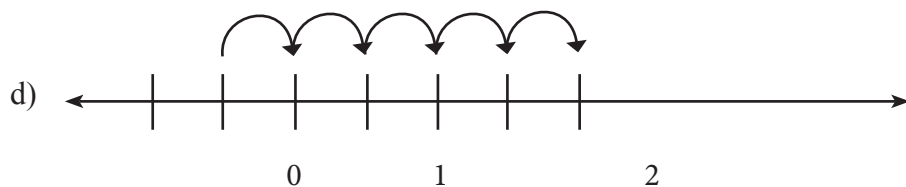
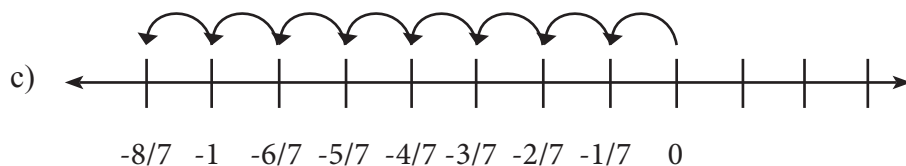
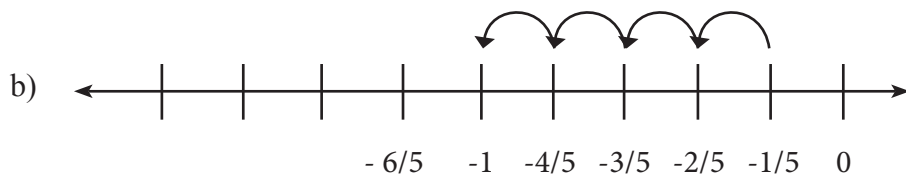
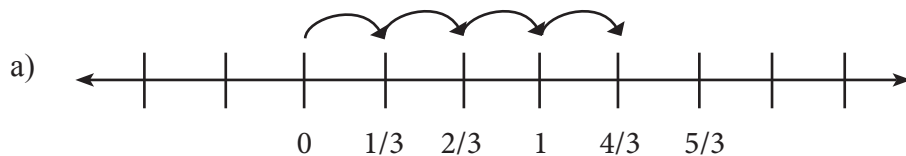
En general para multiplicar un número entero por una unidad fraccionaria se multiplica el número entero por el numerador y se deja como denominador el mismo.

Esto es:

$$\mathbf{n} \times \frac{1}{d} = \frac{n}{d}$$

Ejercicios 12

1. ¿Qué multiplicación se sugiere en cada recta numérica?



2. Efectuar la multiplicación que se sugiere en cada caso:

- a) Siete saltos de un tercio hacia la derecha.
- b) Tres saltos de un octavo hacia la izquierda.

3. Hallar los productos:

a) $3 \times \frac{1}{4}$ b) $(-12) \times \frac{1}{7}$ c) $10 \times \frac{1}{100}$

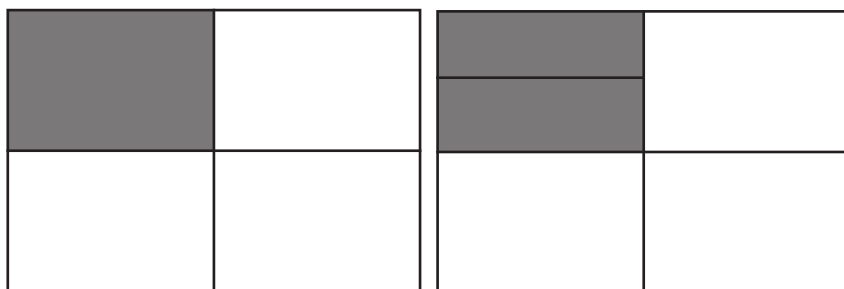
d) $5 \times \frac{1}{8}$ e) $(-7) \times \frac{1}{1000}$

2.11.2 Multiplicación de dos unidades fraccionarias

Los siguientes ejemplos muestran cómo se multiplican dos unidades fraccionarias y su significado geométrico.

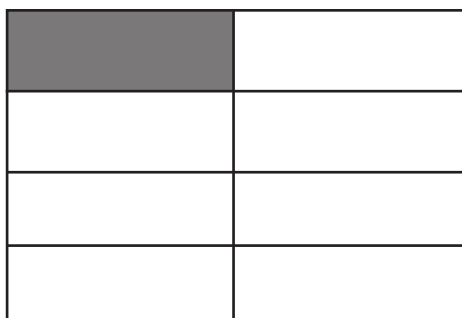
a) Multiplicar $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

Interpretamos esta multiplicación de la siguiente manera:



$\frac{1}{2}$ de la unidad

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$



$\frac{1}{8}$ de la unidad

Es decir $\frac{1}{8}$ de $\frac{1}{4}$ equivale a $\frac{1}{8}$ de la unidad; se escribe $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

b) $3 \times \frac{1}{4}$

Interpretamos esta multiplicación sobre una recta numérica de la siguiente forma:



$\frac{1}{8}$ de $\frac{1}{4}$ equivale a $\frac{1}{8}$ en la recta numérica, es decir: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

En general:

El producto de dos unidades fraccionarias es una unidad fraccionaria cuyo denominador es el producto de los denominadores.

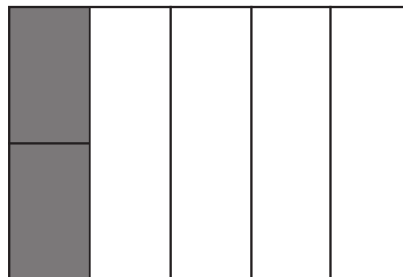
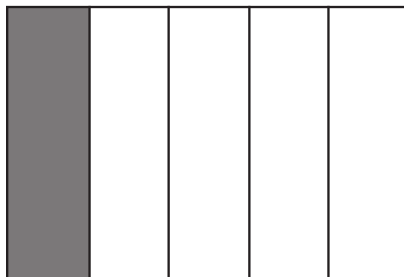
Es decir:

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$$

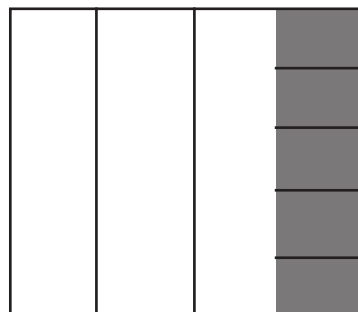
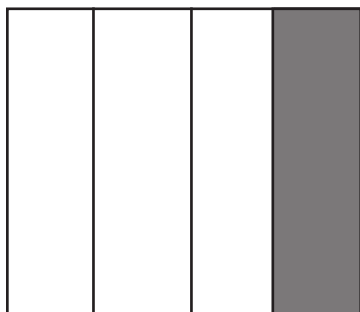
Ejercicios 13

1. Escribir la multiplicación que se sugiere en cada caso:

a)



b)



2. Hallar los productos:

a) $\frac{1}{8} \times \frac{1}{9}$

b) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}$

c) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{6} \times \frac{1}{10}$

Observe que toda fracción se puede expresar como el producto de un entero por una unidad fraccionaria, así:

$$\text{a) } \frac{2}{9} = 2 \times \frac{1}{9}$$

$$\text{b) } -\frac{13}{4} = (-13) \times \frac{1}{4}$$

En general:

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Luego, para multiplicar dos fracciones se procede como en los siguientes ejemplos:

$$\text{a) } \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \left(3 \times \frac{1}{4}\right) \times \left(5 \times \frac{1}{2}\right) = 15 \times \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$\text{b) } \frac{7}{6} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(7 \times \frac{1}{6}\right) \times \left((-3) \times \frac{1}{4}\right) = (-21) \times \frac{1}{24} = \frac{21}{24} = -\frac{7}{8}$$

$$\text{c) } \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \left((-1) \times \frac{1}{2}\right) \times \left((-3) \times \frac{1}{5}\right) = 3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

En general:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot \left(c \cdot \frac{1}{d}\right) = ac \cdot \frac{1}{bd} = \frac{ac}{bd}$$

Luego:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Es decir:

Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí

Ejemplos:

$$\text{a) } \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{7 \times 3} = \frac{10}{21}$$

$$\text{b) } \left(-\frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{(-3) \times 2}{4 \times 5} = -\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\text{c) } \frac{5}{3} \times (-4) = \frac{5}{3} \times \frac{-4}{1} = \frac{5 \times (-4)}{3 \times 1} = -\frac{20}{3}$$

$$\text{d) } \left(-\frac{7}{12}\right) \times \left(-\frac{7}{12}\right) = \frac{(-7) \times (-7)}{12 \times 12} = \frac{49}{144}$$

Ejercicios 14

1. Hallar los siguientes productos:

a) $\left(-\frac{3}{8}\right) \times \frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{7} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$

c) $\left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$

d) $\frac{3}{8} \times \frac{8}{3}$

e) $\frac{5}{2} \times (-1)$

f) $\left(-\frac{7}{8}\right) \times \left(-\frac{2}{7}\right)$

g) $5 \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

h) $(-4) \times \left(-\frac{5}{9}\right)$

i) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)$

j) $8\frac{1}{3} \times 5\frac{3}{4}$

2. Comí $\frac{3}{8}$ de $\frac{1}{2}$ pastel de naranja. ¿Cuánto comí del pastel?
3. Hay 12 libros en un estante. Cada libro tiene $3\frac{3}{4}$ centímetros del grosor.
¿Cuánto ocupan todos los libros?
4. Un automóvil viajó a 60 kilómetros por hora, durante $2\frac{3}{4}$ horas.
¿Qué distancia recorrió en ese tiempo?
5. Un reloj se adelanta $\frac{3}{7}$ de minuto en cada hora. ¿Cuánto se adelantará en 5 horas? ¿En medio día? ¿En una semana?

2.11.3 Propiedades de la multiplicación de las fracciones

En la sección anterior observamos que cada vez que multiplicamos dos fracciones obtenemos como resultado otro fraccionario, esto significa que la multiplicación en los fraccionarios es una operación binaria.

La multiplicación en $\mathbf{F}$ cumple propiedades similares a la de la multiplicación en $\mathbf{Z}$, así:

Conmutativa

$$\text{Para todo } \frac{c}{d}, \frac{a}{b} \in \mathbf{F}, \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

Ejemplo 1:

$$\text{a) } \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{6}{7} = \frac{6}{7} \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{c) } \left(-\frac{9}{8}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{9}{8}\right)$$

Asociativa

$$\text{Para todo } \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbf{F}, \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{5}$$

$$\frac{6}{7} \times \left(\left(-\frac{7}{8}\right) \times \left(-\frac{8}{9}\right)\right) = \left(\frac{6}{7} \times \left(-\frac{7}{8}\right)\right) \times \left(-\frac{8}{9}\right)$$

Modulativa

Para todo $\frac{a}{b} \in F$ se tiene que: $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$

Ejemplos 3:

a) $\frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times 1 = \left(-\frac{2}{3}\right)$

c) $\frac{8}{17} \times 1 = \frac{8}{17}$

Propiedad del cero

Para todo $\frac{a}{b} \in F$ se tiene que $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$

Ejemplos 4:

a) $\frac{7}{6} \cdot 0 = 0$

b) $0 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) = 0$

c) $\left(-\frac{5}{11}\right) \cdot 0 = 0$

Recordemos que en los números enteros no existe que x multiplicado por 3 de 1, es decir, la ecuación: $3 \cdot x = 1$ no tiene solución en $\mathbf{Z}$. Sin embargo, en $\mathbf{F}$ la ecuación $3 \cdot x = 1$ tiene solución porque existe:

$$\frac{3}{5} \in F \text{ tal que: } 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

De forma similar la ecuación:

$$\frac{2}{3} \cdot x = 1 \text{ tiene solución en } F \text{ porque existe } \frac{3}{2} \in F \text{ tal que } \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$\text{Así mismo } \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot x = 1 \text{ tiene solución en } F \text{ porque existe } -\frac{4}{3} \in F$$

$$\text{Tal que } \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 1$$

$$\text{A los números tales como } 3 \text{ y } \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \text{ y } \frac{3}{2}, \left(-\frac{4}{3}\right) \text{ y } \left(-\frac{4}{3}\right),$$

cuyo producto es, se dice que son recíprocos el uno del otro o inverso multiplicativo el uno del otro.

Propiedad invertiva

Para todo $\frac{a}{b} \in F$, $\frac{a}{b} \neq 0$, existe $\frac{b}{a} \in F$ (llamado su recíproco o inverso multiplicativo) tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Ejemplos 5:

a) El recíproco de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$ porque $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$

b) El recíproco de $\left(-\frac{7}{2}\right)$ es $\left(-\frac{2}{7}\right)$ porque $\left(-\frac{7}{2}\right) \times \left(-\frac{2}{7}\right) = 1$

c) El recíproco de (-4) es $-\frac{1}{4}$ porque $(-4) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 1$

Ejercicios 15

1. Hallar el recíproco de:

a) $\frac{2}{5}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{7}{8}$ d) $\frac{16}{15}$ e) $\frac{3}{7}$ f) $-\frac{11}{6}$

g) $7\frac{2}{5}$ h) 10 i) $\frac{1}{100}$ j) $3\frac{7}{10}$

2. Encontrar el valor de n:

a) $\frac{5}{11} \cdot n = 1$ b) $(-7) \cdot n = 1$ c) $\left(-\frac{4}{9}\right) \cdot n = 1$

d) $2\frac{1}{2} \cdot n = 1$ e) $n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Propiedad distributiva

Las fracciones tal como en los enteros, tiene una propiedad que relaciona la multiplicación con la adición, esta propiedad se llama propiedad distributiva.

Para todo $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in F$: $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$

O bien $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$

Ejemplo 6:

$$\text{a) } \frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{4} + \frac{8}{9} \right) = \left(\frac{3}{7} \times \frac{5}{4} \right) + \left(\frac{3}{7} \times \frac{8}{9} \right)$$

$$\text{b) } \frac{2}{5} \times \left(\left(-\frac{5}{4} \right) + \left(-\frac{6}{11} \right) \right) = \left(\frac{2}{5} \times \left(-\frac{5}{4} \right) \right) + \left(\frac{2}{5} \times \left(-\frac{6}{11} \right) \right)$$

$$\text{c) } \left(\frac{12}{13} \times \frac{7}{15} \right) + \left(\frac{12}{13} \times \left(-\frac{9}{17} \right) \right) = \frac{12}{13} \times \left(\frac{7}{15} + \left(-\frac{9}{17} \right) \right)$$

$$\text{d) } \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \times \frac{8}{21} \right) + \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \times \frac{16}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{8}{21} + \frac{16}{3} \right)$$

Ecuaciones de la forma $\frac{a}{b} \cdot x = 1 \frac{c}{d}$

En los fraccionarios, como en los enteros, hay una propiedad que relaciona multiplicación y la igualdad de fraccionarios, llamada **propiedad uniforme de la multiplicación**, así:

Para todo $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in F$ si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$

Esta propiedad es útil en la solución de ecuaciones, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6:

$$\text{a) } \frac{3}{5} \cdot x = \frac{1}{2}$$

Se multiplica a ambos lados de la igualdad por el recíproco de $3/5$, es decir, por $5/3$.

$$\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{5} \cdot x \right) = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} \quad (\text{Propiedad uniforme de la multiplicación})$$

$$\left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} \right) \cdot x = \frac{5}{3} \times \frac{3}{5} \quad (\text{Propiedad asociativa de la multiplicación})$$

$$1 \cdot x = \frac{5}{3} \times \frac{3}{5} \quad (\text{Propiedad modulativa de la multiplicación})$$

$$x = \frac{5}{3} \times \frac{3}{5} \quad (\text{Propiedad modulativa de la multiplicación})$$

$$x = \frac{5}{6} \quad (\text{Propiedad clausurativa de la multiplicación})$$

$$\text{b) } \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot x = \frac{3}{4}$$

Se multiplica a ambos lados de la igualdad por el recíproco de:

$$-\frac{2}{3}, \text{ es decir por } -\frac{3}{2}$$

$$\left(-\frac{3}{2} \right) \times \left(\left(-\frac{2}{3} \right) \cdot x \right) = \left(-\frac{3}{2} \right) \times \frac{3}{4} \quad (\text{Propiedad uniforme de la multiplicación})$$

$$\left(\left(-\frac{3}{2} \right) \times \left(-\frac{2}{3} \right) \right) \cdot x = \left(-\frac{3}{2} \right) \times \frac{3}{4} \quad (\text{Propiedad asociativa de la multiplicación})$$

$$1 \cdot x = \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{4} \quad (\text{Propiedad invertiva de la multiplicación})$$

$$x = \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{4} \quad (\text{Propiedad modulativa de la multiplicación})$$

$$x = - \quad (\text{Propiedad clausurativa de la multiplicación})$$

$$\text{c) } 2 \cdot x = -\frac{7}{5}$$

Se multiplica a ambos lados de la igualdad por el recíproco de 2, es decir por $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \times (2 \cdot x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{7}{5}\right) \quad (\text{Propiedad uniforme de la multiplicación})$$

$$\left(\frac{1}{2} \times 2\right) \cdot x = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{7}{5}\right) \quad (\text{Propiedad asociativa de la multiplicación})$$

$$1 \cdot x = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{7}{5}\right) \quad (\text{Propiedad invertiva de la multiplicación})$$

$$x = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{7}{5}\right) \quad (\text{Propiedad modulativa de la multiplicación})$$

$$x = \frac{7}{10} \quad (\text{Propiedad clausurativa de la multiplicación})$$

$$\text{d) } \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x = \frac{5}{6}$$

Teniendo en cuenta las expresiones encerradas en los recuadros, en cada una de las ecuaciones de los ejercicios anteriores, esta ecuación se puede resolver fácilmente de la siguiente manera:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x = \frac{5}{6}$$

$$x = \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$x = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

De manera similar:

$$5 \cdot x = \frac{8}{7}$$

$$x = \frac{1}{5} \times \frac{8}{7}$$

$$x = \frac{8}{35}$$

$$\text{e) } \left(-\frac{12}{17}\right) \cdot x = -\frac{17}{12}$$

$$x = \left(-\frac{17}{12}\right) \times \left(-\frac{17}{12}\right)$$

$$x = \frac{289}{144} = 2 \frac{1}{144}$$

Ejercicios 16

1. Hallar el valor de n en cada una de las siguientes ecuaciones.

$$\text{a) } \frac{1}{2} \cdot n = 1 \quad \text{b) } \frac{5}{8} \cdot n = \frac{8}{5} \quad \text{c) } \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot n = -\frac{9}{16}$$

$$\text{d) } \frac{8}{7} \cdot n = -\frac{9}{20} \quad \text{e) } \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot n = -\frac{10}{3}$$

2.11.4 División de números fraccionarios

Recordemos que en los enteros:

$$a \div b = c \quad \text{significa que} \quad b \cdot c = a$$

Es decir, el divisor por el cociente es igual al dividendo. De manera similar si

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \in F \quad \frac{c}{d} \neq 0 \quad \text{entonces:}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = x \quad \text{Significa que} \quad \frac{c}{d} \cdot x = \frac{a}{b}$$

Si resolvemos esta última ecuación se obtiene:

$$x = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Las dos expresiones encerradas en los recuadros indican que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Es decir:

Para dividir dos fracciones se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor

Ejemplo 1:

$$\text{a) } \frac{7}{8} \div \frac{4}{3} = \frac{7}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{21}{32}$$

$$\text{b) } \frac{11}{10} \div \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{11}{10} \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{55}{20} = -\frac{11}{4} = -\left(2 \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{c) } \left(-\frac{5}{8}\right) \div \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{5}{8}\right) \times \left(-\frac{4}{1}\right) = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \frac{3}{10} \div 6 = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

$$\text{e) } (-10) \div \frac{10}{3} = (-10) \times \frac{3}{10} = -\frac{30}{10} = -3$$

$$\text{f) } 33 \div 2 = 33 \times \frac{1}{2} = \frac{33}{2} = 16 \frac{1}{2}$$

Ejercicios 17

1. Hallar los cocientes:

$$\text{a) } \frac{8}{7} \div \left(-\frac{3}{4}\right) \quad \text{b) } \left(-\frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{4} \quad \text{c) } \frac{9}{24} \div \frac{3}{8}$$

$$\text{d) } -\frac{16}{5} \div \left(-\frac{4}{10}\right) \quad \text{e) } (-1) \div \left(-\frac{3}{2}\right) \quad \text{f) } \frac{3}{2} \div 2$$

$$\text{g) } (-348) \div (-21) \quad \text{h) } 17 \div (-4) \quad \text{i) } (-335) \div 5$$

$$\text{j) } 1622 \div 30$$

2. Si la notación $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ significa $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ entonces hallar los siguientes cocientes:

$$\text{a) } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} \quad \text{b) } -\frac{\frac{5}{9}}{\frac{1}{5}} \quad \text{c) } \frac{\frac{7}{6}}{\frac{7}{-3}} \quad \text{d) } 4\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{9}}$$

$$\text{e) } -\frac{\frac{3}{4}}{-\frac{9}{4}} \quad \text{f) } \frac{-\left(4\frac{2}{5}\right)}{-\left(2\frac{3}{4}\right)} \quad \text{g) } \frac{-7}{\frac{14}{3}} \quad \text{h) } 2\frac{\frac{1}{2}}{\frac{10}{10}}$$

$$\text{i) } 37\frac{\frac{1}{3}}{\frac{100}{100}} \quad \text{j) } \frac{3\frac{1}{3}}{12\frac{1}{3}}$$

3. Efectuar las siguientes operaciones:

$$\text{a) } \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{30}}{\frac{23}{30}}$$

$$\text{b) } \left(2 \times \frac{6}{5}\right) \div \left(2 + \frac{3}{8}\right)$$

$$\text{c) } \frac{\frac{\frac{2}{3}}{5} + \frac{4}{\frac{6}{7}}}{\frac{1}{\frac{1}{5}} - \frac{1}{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{d) } \left(150 \frac{1}{8} \div \frac{1}{8}\right) \div \left(4 \times 2 \frac{7}{8}\right)$$

4. Resolver:

a) Si una llave vierte $8\frac{1}{4}$ litros de agua por minuto, ¿Cuánto tiempo emplea-rá en llenar un depósito de $90\frac{3}{4}$ litros de capacidad?

b) ¿Por qué número hay que dividir a $32/5$ para obtener 3 de cociente?

2.11.5 Solución de ecuaciones de la forma

$$\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

En los fraccionarios, como en los enteros, hay una propiedad que relaciona la adición y la igualdad de fraccionarios, así:

$$\text{Para todo } \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in F; \text{ si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } \frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

Esta es la propiedad de la uniformidad de la suma, útil en la solución de ecuaciones como se ve a continuación.

a) Resolver la ecuación: $\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$

$$\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$$

$$\left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\text{Propiedad uniforme de la suma})$$

$$\frac{2}{3} \cdot x + \left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\text{Propiedad asociativa de la suma})$$

$$\frac{2}{3} \cdot x + 0 = \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\text{Propiedad invertiva de la suma})$$

$$\frac{2}{3} \cdot x = \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\text{Propiedad modulativa de la suma})$$

$$\frac{2}{3} \cdot x = -\frac{4}{3} \quad (\text{Propiedad clausurativa de la suma})$$

$$x = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \quad (\text{Propiedad uniforme de la multiplicación})$$

$$x = -2 \quad (\text{Propiedad clausurativa de la suma})$$

b) Resolver la ecuación:

$$-3 \cdot x + \frac{2}{5} = 7$$

$$-3 \cdot x + \frac{2}{5} = 7$$

$$\left(-3 \cdot x + \frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) = 7 + \left(-\frac{2}{5}\right) \quad (\text{Propiedad uniforme de la suma})$$

$$-3 \cdot x + \left(\frac{2}{5} + \left(-\frac{2}{5}\right)\right) = 7 + \left(-\frac{2}{5}\right) \quad (\text{Propiedad asociativa de la suma})$$

$$-3 \cdot x + 0 = 7 + \left(-\frac{2}{5}\right) \quad (\text{Propiedad invertiva de la suma})$$

$$-3 \cdot x = 7 + \left(-\frac{2}{5}\right) \quad (\text{Propiedad modulativa de la suma})$$

$$-3 \cdot x = \frac{33}{5} \quad (\text{Propiedad clausurativa de la suma})$$

$$x = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{33}{5} \quad (\text{Propiedad uniforme de multiplicación})$$

(Propiedad invertiva y modulativa de la multiplicación)

$$x = -\frac{11}{5} \quad (\text{Propiedad clausurativa de la multiplicación})$$

Ejercicios 18

1. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{3}{2} \cdot x = \frac{7}{8}$

b) $-\frac{1}{2} \cdot y + 5 = -\frac{4}{7}$

c) $\frac{1}{2} \cdot x + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$

d) $-\frac{4}{5} \cdot z + \frac{2}{7} = \frac{4}{9}$

2.12 La potenciación en los números fraccionarios

Como en el caso de los números enteros, productos en los que los factores son iguales, se pueden escribir en forma más abreviada de la siguiente manera:

$$\text{a) } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\text{b) } \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\text{c) } \frac{4}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$\text{d) } \left(-\frac{7}{6}\right) \times \left(-\frac{7}{6}\right) \times \left(-\frac{7}{6}\right) \times \left(-\frac{7}{6}\right) \times \left(-\frac{7}{6}\right) = \left(-\frac{7}{6}\right)^5$$

$$\text{e) } \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

Si **n** es un número natural diferente de cero y $\frac{a}{b}$ es cualquier número fraccionario, entonces:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

n - veces

$\frac{a}{b}$ Es la base, **n** el exponente y $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ la potencia **n** de $\frac{a}{b}$.

Observaciones:

a) De la definición se obtiene que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{b \cdot b \cdot \dots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$$

Luego:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

$$\text{Así: } \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{3^6}{4^6} = \frac{729}{4096}$$

b) Si el exponente es 1, entonces en lugar de escribir $\left(\frac{a}{b}\right)^1$ se escribe $\frac{a}{b}$.

$$\text{Así: } \left(-\frac{3}{4}\right)^1 = -\frac{3}{4}; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5}$$

c) Si $\frac{a}{b}$ es un número fraccionario diferente de cero, entonces se define:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

$$\text{Así: } \left(-\frac{5}{8}\right)^0 = 1; \quad \left(\frac{9}{7}\right)^0 = 1$$

Ejercicios 19

1. Hallar el resultado de:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2}\right)^7 \quad \text{b) } \left(\frac{5}{7}\right)^4 \quad \text{c) } \left(\frac{1}{3}\right)^8 \quad \text{d) } \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \quad \text{e) } \left(-\frac{3}{7}\right)^2$$

$$\text{f) } \left(1\frac{2}{5}\right)^4 \quad \text{g) } \left(4\frac{2}{3}\right)^0 \quad \text{h) } \left(-\frac{3}{2}\right)^6 \quad \text{i) } \left(\frac{6}{5}\right)^5 \quad \text{j) } \left(\frac{9}{4}\right)^3$$

2. Escribir como potencias de una fracción:

$$\text{a) } \frac{49}{100}$$

$$\text{b) } -\frac{125}{216}$$

$$\text{c) } \frac{64}{729}$$

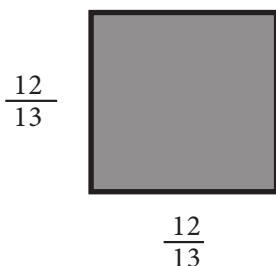
$$\text{d) } -\frac{729}{1000}$$

$$\text{e) } \frac{256}{625}$$

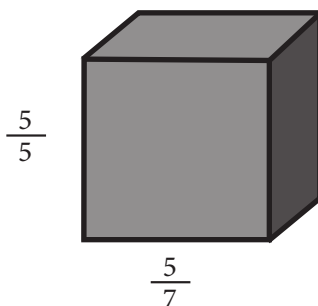
$$\text{f) } \frac{1}{27}$$

3. Resolución de problemas.

- a) Hallar el área de un cuadrado cuyo lado mide $\frac{12}{13}$ cm (recuerde que el área de un cuadrado de lado l es l^2).



- b) Hallar el volumen de un cubo de arista $\frac{5}{7}$ cm (recuerde que el volumen de un cubo de arista a es a^3).



2.12.1 Propiedades de la potenciación

2.12.1.1 Productos de potencias que tienen la misma base.

Ejemplo 1:

$$a) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} \times \frac{2^2}{3^2} = \frac{2^2 \times 2^2}{3^2 \times 3^2} = \frac{2^{2+2}}{3^{2+2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$b) \left(-\frac{4}{7}\right)^5 \times \left(-\frac{4}{7}\right)^4 = \frac{(-4)^5}{7^5} \times \frac{(-4)^4}{7^4} = \frac{(-4)^5 \times (-4)^4}{7^5 \times 7^4} = \frac{(-4)^{5+4}}{7^{5+4}} = \left(-\frac{4}{7}\right)^9$$

En general: si $\frac{a}{b} \in F$ y si $m, n \in N$, entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^m}{b^m} \cdot \frac{a^n}{b^n} = \frac{a^{m+n}}{b^{m+n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

Es decir: al multiplicar potencias que tienen la misma base, el resultado es una potencia de esta base y su exponente es la suma de los exponentes

Ejercicios 20

1. Expresar como una sola potencia:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^8 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5$ b) $\left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^5 \times \left(\frac{1}{10}\right)^4$

c) $(-3)^4 \times (-3)^7 \times (-3)^1$ d) $(5)^2 \times (5)^2 \times (5)^2 \times (5)^2 \times (5)^2$

e) $\left(-\frac{7}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{7}{3}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^6$

2.12.1.2 Potencia de una potencia

Ejemplo 2:

a) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{3^2}{4^2}\right)^3 = \frac{(3^2)^3}{(4^2)^3} = \frac{3^{2 \times 3}}{4^{2 \times 3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2 \times 3} = \left(\frac{3}{4}\right)^6$

b) $\left(\left(-\frac{2}{7}\right)^5\right)^4 = \left(\frac{(-2)^5}{7^5}\right)^4 = \frac{((-2)^5)^4}{(7^5)^4} = \frac{(-2)^{5 \times 4}}{7^{5 \times 4}} = \left(\frac{-2}{7}\right)^{5 \times 4} = \left(\frac{-2}{7}\right)^{20}$

En general:

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{F}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\left(\left(\frac{a}{b} \right)^m \right)^n = \left(\frac{a^m}{b^m} \right)^n = \frac{(a^m)^n}{(b^m)^n} = \frac{a^{m \cdot n}}{b^{m \cdot n}} = \left(\frac{a}{b} \right)^{m \cdot n}$$

Es decir, la potencia de una potencia es otra que tiene por base la misma y por exponente el producto de los exponentes dados

Ejercicios 21

1. Expresar las siguientes potencias con un solo exponente:

a) $\left(\left(\frac{3}{5} \right)^4 \right)^3$ b) $\left(\left(-\frac{2}{5} \right)^3 \right)^4$ c) $\left(\left(-\frac{1}{2} \right)^5 \right)^2$

d) $((-8)^2)^6$ e) $((2^2)^2)^2$

2.12.1.3 Productos de potencias que tienen el mismo exponente

Ejemplo 3:

a) $\left(\frac{5}{2} \right)^2 \times \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \frac{5^2}{2^2} \times \frac{7^2}{3^2} = \frac{(5 \times 7)^2}{(2 \times 3)^2} = \left(\frac{5 \times 7}{2 \times 3} \right)^2 = \left(\frac{5}{2} \times \frac{7}{3} \right)^2$

b) $\left(-\frac{4}{9} \right)^3 \times \left(\frac{3}{8} \right)^3 = \frac{(-4)^3}{9^3} \times \frac{3^3}{8^3} = \frac{((-4) \times 3)^3}{(9 \times 8)^3} = \left(\frac{(-4) \times 3}{9 \times 8} \right)^3$

$$= \left(\left(-\frac{4}{9} \right) \times \frac{3}{8} \right)^3$$

si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F$ y $m, \in N$, entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \cdot \frac{c^m}{d^m} = \frac{(a \cdot c)^m}{(b \cdot d)^m} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^m$$

Es decir: Al multiplicar potencias que tienen el mismo exponente, el resultado es una potencia que tiene por base el producto de las bases y por el exponente mismo.

Ejercicios 22

1. Expresar como una sola potencia y simplificar:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$

b) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times \left(\frac{49}{4}\right)^2 \times \left(-\frac{10}{98}\right)^2$

c) $(-6)^3 \times (3)^3$

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^7 \times (-3)^7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4$

2.12.1.4 Exponentes enteros

Recordemos que si $\frac{a}{b} \neq 0$, entonces existe una fracción en este caso tal $\frac{b}{a}$ que:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

y en este caso $\frac{b}{a}$ se llama el recíproco de $\frac{a}{b}$ y se nota por:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Así por ejemplo:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$, observe que: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$, observe que: $\frac{1}{5} \times 5 = 1$.

c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1} = -\frac{5}{2}$, observe que: $\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 1$

Este hecho permite entonces hablar de que sería un número fraccionario elevado a una potencia negativa, por ejemplo:

a) $\left(\frac{7}{8}\right)^{-3} = \left(\left(\frac{7}{8}\right)^{-1}\right)^3 = \left(\frac{8}{7}\right)^3 = \frac{8^3}{7^3} = \frac{512}{343}$.

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}\right)^4 = \left(-\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{(-4)^4}{(3)^4} = \frac{256}{81}$

En general podemos decir que:

si $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}, \neq 0$, **F** y si n es un entero positivo, entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

En particular:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$$

Todas las propiedades se dieron para los exponentes positivos, también se cumplen para los exponentes negativos.

Ejemplo 4:

1. Calcular las siguientes expresiones exponenciales:

a) $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \times \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 3^2 = 9$

c) $-\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = -\left(\frac{3}{2}\right)^4 = -\frac{3^4}{2^4} = -\frac{81}{16}$

d) $(-3)^{-2} = -\frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

Todas las propiedades antes mencionadas sobre los exponentes las podemos resumir en el siguiente cuadro:

Propiedades de los exponentes:

Para los números fraccionarios $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y enteros m y n , se tienen:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} & \text{b) } \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^m}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} \\ \text{c) } \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n & \text{d) } \left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n} \\ \text{e) } \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left(\frac{c}{d}\right)^n}\right) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{\left(\frac{c}{d}\right)^n}, \frac{a}{b} \neq 0 & \text{f) } \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1, \frac{a}{b} \neq 0. \\ \text{f) } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \frac{a}{b} \neq 0. \end{array}$$

Ejemplos 5:

1. Simplificar las siguientes expresiones:

$$\text{a) } 2((x^2)^{-2}) = 2x^{-4} = 2 \frac{1}{x^4} = \frac{2}{x^4} = \frac{2}{x^4}.$$

$$\text{b) } x^{-2} \cdot x^{-5} = x^{-2-5} = x^{-7} = \frac{1}{x^7} =$$

$$\text{c) } \frac{x^{-3}}{x^{-4}} = x^{-3-(-4)} = x^{-3+4} = x^1 = x$$

$$\text{d) } \left(\frac{2x^3}{3x^{-3}}\right)^{-2} = \left(\frac{2x^{3-(-3)}}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{2x^6}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2x^6}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2(x^6)^2} = \frac{9}{4x^{12}}$$

2. Simplifique las siguientes expresiones de modo que todos los exponentes sean positivos.

$$a) (2^3 x^{-4} y^5)^{-2} = (2^3)^{-2} (x^{-4})^{-2} (y^5)^{-2} = 2^{-6} x^8 y^{-10} = \frac{1}{2^6} x^8 \frac{2}{y^{10}} = \frac{x^8}{64y^{10}}$$

$$b) \frac{2x^3(x^{2y})^0}{(4x^{-2}y)^2} = \frac{2x^4 \cdot 1}{4^2 x^{-4} y^2} = \frac{2}{4^2} \cdot \frac{x^4}{x^{-4}} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{2}{16} \cdot \frac{x^4}{1} \cdot \frac{2}{y^2} = \frac{x^8}{8y^2}$$

Ejercicios 23

1. Evalúe la expresión y escriba su respuesta sin exponentes:

$$a) (-4)^3 \quad b) -5^3 \quad c) -2^4 \quad d) (-2)^5$$

$$e) 3^{-2} \quad f) 6^{-1} \quad g) -\left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad h) \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

2. Utilice las reglas de los exponentes para simplificar las siguientes expresiones. Escriba las respuestas con exponentes positivos.

$$a) 5^3 \cdot 5^3 \quad b) -\frac{6^8}{6^3} \quad c) \frac{11^8}{11^9} \quad d) \frac{5^4}{5^{-2} \cdot 5^3}$$

$$e) (3^3)^3 \quad f) (2^{-3})^{-2} \quad g) \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \quad h) \left(\frac{-2}{5}\right)^{-4}$$

3. Utilice las reglas de los exponentes para simplificar, de manera que sólo queden exponentes positivos.

a) $y^3 \cdot y^4$

b) $b^5 \cdot b^1$

c) $z^{-5} \cdot z^3$

d) $x^{-5} \cdot x^{-2}$

e) $\frac{y^8}{y^4}$

f) $\frac{b^5}{b^{-1}}$

g) $\frac{x^5}{x^{-7}}$

h) $\frac{x^{-3}}{x^{-4}}$

i) $(y^4)^3$

j) $(x^3)^{-2}$

k) $(x \cdot y)^3$

l) $(5m)^3$

4. Calcule y simplifique de manera que sólo queden exponentes positivos.

a) $(2x^2 \cdot x)^{-4}$

b) $(-64y^5)^{-3}$

c) $(-8b^{-3}a^2)(2b^5a^{-4})$

d) $(-3m^2x^{-1})(2m^{-3}x^{-1})$

e) $(4y^2) \div (y^{-1}x^2)$

f) $(-8x^{-3}y^2z) \div (2x^5y^4)$

g) $\left(\frac{y^2}{x^{-2}}\right)^3$

h) $\left(\frac{y^{-2}}{x}\right)^3$

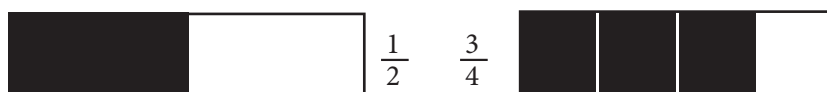
i) $\left(\frac{y^{-2}y^{-1}z^{-4}}{x^{-2}y^{-3}z^0}\right)^3$

k) $\left(\frac{4a^{-1}b^{-30}}{2^{-2}a^4b^{-10}}\right)^{-2}$

2.13 Orden en los números fraccionarios

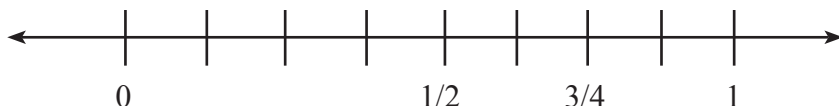
Las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ se pueden comparar de diferentes maneras:

Por ejemplo, gráficamente, comparando las regiones que representan de la unidad, así:



Se observa que la región correspondiente a $\frac{1}{2}$ es menor que la que le corresponde a $\frac{3}{4}$, es decir que $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$.

Sobre la recta numérica:



Se observa que el punto correspondiente a $\frac{3}{4}$ está a la derecha del punto correspondiente a $\frac{1}{2}$, es decir que:

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

Una forma de comparar dos fracciones es escoger fracciones equivalentes a las fracciones dadas, pero que tengan el mismo denominador, y comparar sus numeradores, así:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 8}{4 \times 8} = \frac{24}{32}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \times 4}{8 \times 4} = \frac{28}{32}$$

Se observa que $24 < 28$, luego:

$$\frac{3}{4} < \frac{7}{8}$$

Así: $\frac{3}{4} < \frac{7}{8}$ porque $3 \times 8 < 4 \times 7$

En general:

$$\text{Sean } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F; \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{si y sólo si, } a \cdot d < b \cdot c$$

Ejemplo 1:

- a) $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ porque: $2 \times 4 < 3 \times 3$
- b) $\frac{1}{6} < \frac{3}{8}$ porque: $8 \times 1 < 3 \times 6$
- c) $-\frac{7}{3} < -\frac{9}{4}$ porque: $(-7 \times 4 < 3 \times (-9))$
- d) $\frac{7}{16} > -\frac{5}{12}$ porque: $7 \times 12 > (-5) \times 16$
- e) $\frac{11}{15} > \frac{7}{12}$ porque: $11 \times 10 > 15 \times 7$

Observación:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad \text{significa que } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ejercicios 24

1. Colocar en el espacio el signo $>$, $<$, ó $=$ según corresponda.

a) $-\frac{3}{10}$ $-\frac{1}{3}$

b) $-\frac{2}{3}$ $-\frac{9}{4}$

c) $\frac{3}{16}$ $\frac{1}{6}$

d) $\frac{5}{12}$ $\frac{7}{16}$

e) $-\frac{11}{15}$ $-\frac{7}{10}$

f) $\frac{3}{8}$ $-\frac{2}{5}$

g) $\frac{11}{4}$ $\frac{22}{8}$

h) $-\frac{7}{3}$ $-\frac{5}{2}$

i) $\frac{11}{14}$ $\frac{11}{15}$

k) $-\frac{30}{100}$ $-\frac{3}{10}$

2. Hallar el fraccionario mayor y el fraccionario menor de cada conjunto de fracciones.

a) $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \right\}$ b) $\left\{ -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6} \right\}$

c) $\left\{ \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \frac{7}{12} \right\}$ d) $\left\{ \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5} \right\}$

e) $\left\{ -\frac{3}{5}, -\frac{3}{6}, -\frac{3}{7}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{9} \right\}$

3. Representar en una recta numérica las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}$$

¿Cuál es la fracción menor y cuál es la fracción mayor?

2.14 Expresión decimal de una fracción

Si añadimos 1 al numerador y 3 al denominador de $3/4$ ¿aumenta o disminuye la fracción? ¿En cuánto?

Otra forma de representar una fracción es la forma decimal, que consiste en una extensión de la ya vista en los números enteros.

Los números enteros se miden mediante unos patrones que contienen 1, 10, 100, etc. unidades. Su escritura decimal consiste en decir cuántos grupos de cada clase caben en un conjunto dado, pero esos patrones son muy grandes para medir porciones de la unidad. Por ello, se han inventado otros patrones más pequeños que siguen la misma regla: si se divide la unidad en diez partes iguales, se puede tomar como patrón la décima parte de la unidad. Si se divide la unidad en cien partes iguales, se puede tomar como patrón la centésima parte, y así sucesivamente.

Por ejemplo, la fracción $2/5$ representa la misma cantidad que $4/10$. Por lo tanto, se tendrá:

$$\begin{aligned}\frac{4}{10} &= 4 \cdot \frac{1}{10} \\ &= 4 \text{ grupos de una décima.}\end{aligned}$$

De igual manera, la fracción $17/25$ equivale a $68/100$, lo que puede interpretarse como:

$$\begin{aligned}\frac{68}{100} &= \frac{60 + 8}{100} \\ &= \frac{60}{100} + \frac{8}{100} \\ &= 6 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{8}{100} \\ &= 6 \text{ grupos de una décima y } 8 \text{ de una centésima.}\end{aligned}$$

Estas interpretaciones son semejantes a las del sistema decimal. La semejanza es todavía mayor si se adopta la notación siguiente:

La fracción $1 / 10$ se representa por 10^{-1}

La fracción $1 / 100$ se representa por 10^{-2}

La fracción $1 / 1000$ se representa por 10^{-3}

Etc.

De acuerdo con esta notación se escribirán:

$$\frac{2}{5} = 4 \cdot 10^{-1}$$

$$\frac{17}{25} = 6 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$$

Este sistema resulta análogo al sistema decimal para magnitudes enteras. Solamente se debe elegir un símbolo que permita saber qué parte corresponde a los enteros y cuál a la parte fraccionaria. Emplearemos la coma decimal (.) para lograr esta separación. Así, por ejemplo, el número 24,41 tiene parte entera 24, cuyo significado ya se conoce en forma de potencias de 10 como:

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \\ &= 2 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \end{aligned}$$

Y una parte fraccionaria 0,41 cuyo significado es:

$$\begin{aligned} 0,41 &= 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{100} \end{aligned}$$

La suma de estas dos partes es el número, así:

$$\begin{aligned} 24,41 &= 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} \\ &= 2 \cdot 10 + 4 \cdot 1 + 4/10 + 1/100 \end{aligned}$$

En palabras esto significa: tener 24,41 es la cantidad que resulta de tomar 2 grupos de 10 unidades, 4 grupos de una unidad, 4 grupos de una décima de unidad y 1 grupo de una centésima de unidad.

Ejemplo 1:

El símbolo 253,8 representa la cantidad:

$$253,8 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1}$$

Ejemplo 2:

El símbolo 3,524 es igual a:

$$\begin{aligned} 3,524 &= 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} \\ &= 1 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} + 4 \cdot \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

Se lee	Escritura fraccionaria	Escritura decimal
Una décima	1/10	0,1
Una centésima	1/100	0,01
Una milésima	1/1000	0,001

El algoritmo del cálculo de la expresión decimal de una fracción no es otro que el algoritmo de la división ya conocido. En particular, las primeras cantidades patrón se escriben así para $\frac{2}{5}$:

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 5} \\ \underline{20} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 \\ 0,4 \end{array}$$

Y para $17/25$, se tiene:

$$\begin{array}{r} 170 \overline{) 25} \\ \underline{150} \\ 200 \\ \underline{200} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 25 \\ 0,68 \end{array}$$

Sin embargo, no todas las expresiones decimales de las fracciones son tan simples como en los ejemplos anteriores. Se calcula la expresión decimal de la fracción $1/3$, resulta que la división no acaban nunca.

$$\begin{array}{r} 10 \quad \underline{3} \\ 10 \quad 0,3333... \\ 10 \end{array}$$

Es decir, la representación decimal de la fracción $1/3$ exige emplear infinitos decimales. Una solución es escribir:

$$\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$$

Donde los puntos suspensivos dan a entender que el número 3 se repite infinitas veces. Una mejor solución es emplear un rasgo especial, el acento circunflejo, para determinar la parte decimal que se repite indefinidas veces. Así:

$$\frac{1}{3} = 0,3333 \dots = 0,\overline{3}$$

La parte decimal que se repite indefinidas veces se llama período. A una expresión decimal que requiere del período para ser representada en el sistema decimal se le dice: periódico.

Algo semejante ocurre con la fracción $1031/330$. Al dividir resulta:

$$\begin{array}{r} 1031 \quad \underline{330} \\ 410 \quad 3,12424.... \\ 800 \\ 1400 \end{array}$$

Este ejemplo muestra el caso más complicado que puede darse, una fracción cuya expresión decimal tiene parte entera, parte decimal no periódica y parte decimal periódica:

$$\frac{1031}{330} = 3,1242424 \dots = 3,1\overline{24}$$

En resumen podemos decir:

Todo número racional puede escribirse en forma decimal.
La parte decimal puede ser finita o infinita periódica.
El periodo es la secuencia de cifras que se repiten indefinidas veces, se indica con acento circunflejo.

2.14.1 Paso de la expresión fraccionaria a la decimal

Tal como se vio en la sección anterior, para hallar la expresión decimal de un número fraccionario, basta dividir el numerador de la fracción por el denominador de la misma.

Ejemplo 1:

La fracción $10/6$ se escribe en forma decimal como $1,6$. En efecto, al efectuar la división, resulta:

$$\begin{array}{r} 10 \quad | \quad 6 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 40 \quad 1,6666\dots \\ 40 \end{array}$$

Ejemplo 2:

Se tiene que:

$$\frac{271}{90} = 3,0\bar{1}$$

En efecto:

$$\begin{array}{r} 271 \quad | \quad 90 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 010 \quad 3,01111\dots \\ 100 \\ 1 \end{array}$$

Ejemplo 3:

Se tiene que: $\frac{239}{33} = 7,2\overline{4}$

Ya que:

$$\begin{array}{r}
 239 \quad \overline{) 33} \\
 080 \quad 7,2424... \\
 140 \\
 080 \\
 140
 \end{array}$$

2.14.2 Paso de la expresión decimal a la fraccionaria

Para hallar la expresión fraccionaria de un número dado en su forma decimal se deben distinguir dos casos:

a) Si la parte decimal del número es finita.

Para este caso basta multiplicar y dividir por 10, 100, 1000, etc., según la parte decimal tenga una, dos, tres, etc., cifras.

Ejemplo 1:

El número 56,97 recordemos que significa:

$$56,97 = 5.10 + 6.1 + 9. \frac{1}{10} + 7. \frac{1}{100}$$

Luego, si se multiplica y divide por 100, resulta:

$$\begin{aligned}
 56,97 &= \frac{100.(5.10+6.1+9. \frac{1}{10} +7. \frac{1}{100})}{100} \\
 &= \frac{5697}{100}
 \end{aligned}$$

Este procedimiento es general.

Ejemplo 2:

Los siguientes ejemplos ilustran el paso de la forma decimal a la fraccionaria, cuando el número de decimales es finito.

$$1,43 = 1,43 \cdot \frac{100}{100} = \frac{143}{100}$$

$$1.8 = 1,8 \cdot \frac{10}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$$1.168 = 1,168 \cdot \frac{1000}{1000} = \frac{1168}{1000} = \frac{146}{125}$$

b) Si la expresión decimal es periódica el problema es algo más complicado, y es este caso, la manera de encontrar la fracción sirve de introducción a los métodos de las ecuaciones. La dificultad aparece en el momento de manejar la parte decimal infinita del número. la clave de la solución está en poder suprimir esta parte infinita. Veamos con un ejemplo como lo podemos hacer.

Ejemplo 3:

Hallar la expresión fraccionaria del número 1,3.

Como no conocemos de que fracción proviene, llamamos x a dicha fracción, es decir que:

$$x = 1,33333....$$

Si se resta a $10x$ el número x se obtendrá $9x$ por una parte y, por otra, desaparecerá la parte decimal infinita, así:

$$\begin{array}{r} 10x = 13,3333.... \\ \underline{x = 1,3333....} \end{array}$$

Restando se tiene

$$9x = 12$$

De donde:

$$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto: $\frac{4}{3} = 1,3333 \dots$

Ejemplo 4:

Hallar la fracción correspondiente a $\overline{1,23}$.

Hacemos $x = 1,232323\dots$

Como el periodo tiene 2 dígitos que se repiten, entonces multiplicamos por 100 a ambos lados y se tiene:

$$100x = 123,232323\dots$$

Se hace la resta de x a $100x$, desapareciendo la parte decimal, así:

$$\begin{array}{r} 100x = 123,232323\dots \\ x = 1,232323\dots \\ \hline 99x = 122 \end{array}$$

Por lo tanto: $x = \frac{122}{99}$

Ejemplo 5:

Hallar la expresión fraccionaria del número $0,\overline{135}$.

De nuevo hacemos $x = 0,1353535\dots$

Como el periodo tiene 2 dígitos que se repiten, pero dicho periodo no empieza inmediatamente después del punto, entonces multiplicamos por 1000 a ambos lados y se tiene:

$$1000x = 135,353535\dots$$

Pero ahora no basta restar x para eliminar la parte decimal, ya que los decimales de $1000x$ y de x no son iguales. Lo más conveniente es restar a $1000x$ el número $10x$ que sí tiene su misma parte decimal:

$$10x = 1,353535....$$

Restando se tiene,

$$1000x = 135,353535.....$$

$$10x = 1,35135135...$$

$$\hline 990x = 134$$

Luego:

$$x = \frac{122}{99} = \frac{67}{495}$$

Ejercicios 25

1. Hallar la expresión decimal de la fracción $2/5$.
2. Hallar la expresión decimal de la fracción $25/4$.
3. Hallar la expresión decimal de la fracción $70/15$.
4. Hallar la expresión decimal de la fracción $6/11$.
5. Hallar la expresión decimal de la fracción $226/405$.
6. Hallar la expresión decimal de la fracción $1/55$.
7. Hallar la expresión decimal de la fracción $29/9$.
8. Hallar la expresión fraccionaria del número $1,73$.
9. Hallar la expresión fraccionaria del número $41,7$.
10. Hallar la expresión fraccionaria del número $0,1701$.
11. Hallar la expresión fraccionaria del número $3,7$.
12. Hallar la expresión fraccionaria del número $15,4$.
13. Hallar la expresión fraccionaria del número $5,\overline{13}$.
14. Hallar la expresión fraccionaria del número $8,9\overline{12}$.
15. Hallar la expresión fraccionaria del número $0,\overline{056}$.

2.15 Otro modo de definir una fracción

2.15.1 Porcentajes

Una manera frecuente de utilizar una fracción es mediante porcentajes o tantos por ciento.

Una expresión como “el estudiante ha contestado el sesenta por ciento de las preguntas” significa que ha contestado en una fracción igual $\frac{60}{100}$

La expresión “por ciento” se representa por el símbolo %. Así, en lugar de sesenta por ciento, se escribe 60%.

El porcentaje $b\%$ equivale a la fracción $b/100$.

$$B\% = \frac{b}{100}$$

Para expresar la fracción

$$\frac{a}{b}$$

Como porcentaje, basta hallar la expresión decimal de la fracción y multiplicar por cien

Ejemplo 1:

Las siguientes igualdades muestran la equivalencia entre fracciones, decimales y porcentajes.

$$\frac{21}{20} = 1.05 = 105\%$$

$$\frac{1}{3} = 0.\bar{3} = 33.\bar{3}\%$$

Los porcentajes tienen muchas aplicaciones en nuestra vida cotidiana y se emplean sobre todo para dar razón de los aumentos o disminuciones de una cantidad. Esto es así ya que en numerosas ocasiones importa más el aumento relativo que el aumento absoluto.

Por ejemplo, si el barril de petróleo aumenta su precio en \$1 y pasa de costar \$20 a costar \$21, el efecto que tal subida produce en la economía será menor que si pasa de costar \$2 a costar \$3, siendo en ambos casos el aumento absoluto igual.

El porcentaje de aumento o disminución de una cantidad es igual a:

$$\frac{\text{medida actual} - \text{medida anterior}}{\text{medida anterior}} \times 100$$

Si la diferencia:

$$\text{medida actual} - \text{medida anterior}$$

es positiva, el porcentaje será de aumento, si es negativa, será de disminución.

Ejemplo 2:

Si el barril de petróleo pasa de costar \$20 a costar \$21, el porcentaje de aumento es:

$$\frac{\text{medida actual} - \text{medida anterior}}{\text{medida anterior}} \times 100 = \frac{21-20}{20} \times 100 = 5\%$$

Ejemplo 3:

Si el valor de una acción pasa de \$500000 a \$400000, el porcentaje de disminución es de:

$$\frac{\text{medida actual} - \text{medida anterior}}{\text{medida anterior}} \times 100 = \frac{400000 - 500000}{50000} \times 100 = -20\%$$

Ejemplo 4:

Si un producto que costaba 1400 pesos pasa a valer 1610 pesos, el porcentaje de aumento de precio es de:

$$\frac{\text{medida actual} - \text{medida anterior}}{\text{medida anterior}} \times 100 = \frac{1610 - 1400}{1400} \times 100 = 15\%$$

Ejemplo 5:

Cuando el barril de petróleo pasó de costar \$2 a costar \$5, el porcentaje de aumento fue de:

$$\frac{\text{medida actual} - \text{medida anterior}}{\text{medida anterior}} \times 100 = \frac{5 - 2}{2} \times 100 = 150\%$$

Ejemplo 6:

Si al lavar un hilo de algodón de 10 metros de longitud se encoge y pasa a medir 8.5 metros, el porcentaje de disminución fue de:

$$\frac{\text{medida actual} - \text{medida anterior}}{\text{medida anterior}} \times 100 = \frac{8.5 - 10}{10} \times 100 = -15\%$$

Con frecuencia, los impuestos que pagamos son porcentajes fijos de ciertas cantidades denominadas bases gravables, por ejemplo, el impuesto sobre el valor añadido conocido como el IVA.

Ejemplo 7:

Si en la carta de un restaurante se lee el mensaje: “Los precios no incluyen el impuesto IVA del 4%”

Debe entenderse que por un plato que sirven de un valor de \$12000 pesos, se pagará un 4% más. Es decir que el valor a pagar sería:

$$12000 + 12000 \times \frac{4}{100} = 12000 \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 12000 \times 1.04 = 12480 \text{ pesos.}$$

Ejemplo 8:

Al contrario, si en la lista de precios del restaurante aparece el aviso: IVA incluido debe entenderse que por un jugo que vale \$3120 según la carta, este precio se repartirá de la siguiente manera:

$3120 = p(1.04)$, es decir que el valor que recibe el dueño del restaurante será:

$p = \frac{3120}{1.04} = \3000 y \$120 es el 4% sobre los \$3000 correspondiente al IVA.

En todo caso, al hablar de porcentajes se está haciendo referencia a una fracción respecto de un total. Cuando se desea conocer una cantidad por un porcentaje, es preciso conocer la cantidad total de la que es una parte.

Ejemplo 9:

Si el porcentaje de declaraciones de renta positiva (que son aceptadas por el estado) es del 47%, entonces, será preciso saber el número total de declaraciones. Así si hay 2'475.000 declaraciones, habrá para conocer el número de declaraciones positivas.

$$2'475'000 \times \frac{47}{100} = 1'632'500 \text{ declaraciones positivas}$$

Ejemplo 10:

Si un jugo envasado tiene un porcentaje del 88% de agua, en 400 litros de zumo habrá:

$$400 \times \frac{88}{100} = 400 \times 0.88 = 352 \text{ litros de agua.}$$

Al ser los porcentajes fracciones de un total, el cálculo del porcentaje de un porcentaje es inmediato. El a% del b% es igual a una fracción del total que es equivalente a:

$$\frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} = \frac{a \cdot b}{1000}$$

Por lo tanto, el a% del b% es igual a:

$$\frac{a \cdot b}{1000} \cdot 100\% = \frac{a \cdot b}{100} \%$$

El a% del b% es igual al $a \cdot b / 100\%$

Ejemplo 11:

Si el 87% de los trabajadores de una fábrica son asalariados por una empresa de servicio y el 60% de los asalariados son mujeres, entonces el porcentaje de mujeres asalariadas por la empresa de servicio, del total de los trabajadores es igual a:

$$\frac{60}{100} \cdot \frac{87}{100} = \frac{a \cdot b}{1000} \cdot 100\% = 52,2\% \text{ de mujeres}$$

Ejemplo 12:

Si el 12% del peso de un alimento son azúcares y el 30% de los azúcares es glucosa, el porcentaje de glucosa respecto del peso total, es igual a:

$$\frac{12}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot 100\% = 3,6\%$$

Ejemplo 13:

Una fábrica produce dos tipos de productos, digamos A y B. El 60% de los productos es de tipo A y el 40% restantes de tipo B. El 2% de los productos A y el 5% de los productos B son defectuosos. Entonces el porcentaje de la producción total que es defectuoso será:

El porcentaje de productos defectuosos del producto A con respecto del total, será:

$$\frac{60}{100} \cdot \frac{2}{100} \cdot 100\% = 0.6 \cdot 0.02 \times 100\% = 1,2\%$$

Por otra parte, el porcentaje de productos B defectuosos respecto del total es:

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{5}{100} \cdot 100\% = 0.4 \cdot 0.05 \times 100\% = 2\%$$

$$(0.60 \times 0.02 + 0.4 \times 0.05) \times 100\% = (1.2 + 2)\% = 3,2\%$$

Ejemplo 14:

Si una bebida consiste en un 70% de zumo y el resto es licor, y el 90% del zumo y el 20% del licor son agua, el porcentaje de agua en la bebida es:

$$(0.7 \times 0.9 + 0.3 \times 0.2) \cdot 100\% = 68\%$$

Ejemplo 15:

Si una persona tiene colocada la tercera parte de su capital a un interés del 12% y el resto a un interés del 13.5%, por la totalidad del capital obtiene un interés del:

$$\left(\frac{1}{3} \times 0.12 + \frac{2}{3} \times 0.135 \right) \cdot 100\% = 13\%$$

2.16 Expresiones literales

Hay dos expresiones de uso muy común, que sirven también para definir fracciones. La primera expresión es:

Para cada x individuos (u objetos) de cierto colectivo, hay, y que tiene una cualidad

Si se tiene, de una totalidad de individuos u objetos x , una cierta cantidad, y tienen una cierta propiedad, entonces es claro que $x - y$ no la tienen, y la fracción que representa el hecho de tener la propiedad de la totalidad será:

$$\frac{y}{x} \text{ y de no tenerla sería: } \frac{x-y}{x}$$

Ejemplo 1:

Si por cada diez colombianos hay tres que han viajado al extranjero, la fracción del total de colombianos que ha viajado al extranjero es $3/10$.

Ejemplo 2:

Si por cada siete cerdos de una granja hay cuatro enfermos de peste porcina, la fracción del total de cerdos enfermos es $4/7$.

Ejemplo 3:

Si de cada 100 carros en circulación hay 40 con más de cinco años de antigüedad, la fracción de carros en circulación con más de cinco años de antigüedad es $40/100$ o $2/5$.

La otra clase de expresiones es de la forma:

Por cada x individuos u objetos que tienen cierta cualidad, hay y que no la tienen.

Las siguientes oraciones indican la posibilidad de subdividir el grupo total de tamaño $x + y$, que corresponden a x individuos que tienen la propiedad y , y que no la tienen. Por lo tanto, la fracción que representa los que tienen la propiedad del total sería:

$$\frac{x}{x + y}$$

Ejemplo 4:

Si por cada tres hogares que tienen teléfono hay 14 que no lo tienen, la fracción del total de hogares que tienen teléfono es:

$$\frac{3}{3+14} = \frac{3}{17}$$

Si por cada cuatro alumnos de matemáticas básicas que aprueban el examen hay uno que pierde, la fracción de alumnos que aprueban es $4/5$.

Ejercicios 26

1. Exprese en forma de fracción los porcentajes: 30%, 55%, 26%, 75%, 230%.
2. Expresar en forma de porcentaje las fracciones: $7/10$, $2/3$, $9/16$, $3/5$.
3. Si uno de cada cuatro niños tiene caries, ¿cuál es el porcentaje de niños con caries?
4. Si por cada accidente de automóvil con muertos hay 20 accidentes sin muertos, ¿cuál es el porcentaje de accidentes de automóvil con muertos?
5. Si por cada seis declaraciones de renta positivas hay siete negativas, ¿cuál es el porcentaje de declaraciones positivas?

6. En una elección se dieron los resultados que muestra la tabla, donde aparece el candidato elegido en función del sexo del elector:

	Ramírez	Pérez	Blanco
Hombres	120	140	40
Mujeres	60	80	10

- a) ¿Cuál es el porcentaje de los hombres entre los votantes?
 - b) ¿Cuál es el porcentaje de los votos en blanco respecto de los votos emitidos?
 - c) ¿Cuál es el porcentaje de votos del señor Ramírez entre los hombres que votaron?
 - d) ¿Cuál es el porcentaje de mujeres que votaron por el señor Pérez?
7. Si el 80% de los alumnos matriculados en matemáticas básicas se presentan al examen de junio y por cada tres estudiantes que aprueban hay uno que pierde. ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes aprobados respecto del total matriculados?
8. Si una persona tiene 25% de su capital al 11% de interés, el 35% al 12.5% y el resto al 15% ¿cuál es la tasa de interés que recibe por la totalidad de su capital?
9. La Caja Social de Ahorros ofrece una cuenta al 11% de interés. Si el interés ofrecido por el Banco de Colombia es un 0.5% mayor que la ofrecida por la Caja Social de Ahorros ¿qué interés ofrece el Banco de Colombia?

2.2 Evaluación 2

Conocimientos básicos sobre los números fraccionarios, sus operaciones y aplicaciones

1. La fracción $117/63$ representa al mismo número decimal que la fracción:

- a) $13/7$
- b) $13/9$
- c) $9/7$
- d) $11/3$

2. El cociente $2 \div \frac{a}{b}$ es igual a:

- a) $\frac{2a}{b}$
- b) $\frac{a}{2b}$
- c) $\frac{2b}{a}$
- d) $\frac{b}{2a}$

3. El resultado de la suma de $\frac{1}{2} + \frac{a}{2}$ es:

- a) $\frac{a+1}{4}$
- b) $\frac{a+2}{3}$
- c) $\frac{a+1}{2}$
- d) $\frac{2}{a+1}$

4. El producto $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{6}$ es igual:

a) $\frac{18}{4}$

b) $\frac{4}{18}$

c) $\frac{4}{8}$

d) $\frac{2}{1}$

5. El producto $1 \div \frac{a}{b}$ es igual a:

a) $\frac{14}{8}$

b) $\frac{4}{18}$

c) $\frac{4}{8}$

d) 2

6. El cociente $1 \div \frac{a}{b}$ es igual a:

a) $\frac{a}{b}$

b) $\frac{b}{a}$

c) $\frac{1}{ab}$

d) AB

7. El resultado de sumar 2 a la fracción $a/2$ es igual a:

a) $\frac{a+2}{2}$

b) $\frac{a+4}{2}$

c) a

d) $\frac{2}{a}$

8. El resultado de la operación $1,5 + 3 \cdot (1/2 - 1/6)$ es igual a:

a) $2,5$

b) $3,5$

c) $\frac{14}{6}$

d) $\frac{6}{14}$

9. La diferencia $\frac{7}{8} - 2$ es igual a:

a) $-\frac{7}{8}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $-\frac{1}{4}$

d) 4

10. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2$ es igual a:

a) $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$

b) $\frac{a^2 + b^2}{ab}$

c) $\frac{(a + b)^2}{ab}$

d) $\frac{a^2 b^2}{(a+b)}$

11. La fracción $75/6$ representa al número decimal:

a) 11,3

b) 12,5

c) 12,(05)

d) 12,(005)

12. La fracción $7/5$ representa al mismo número decimal que la fracción:

a) $42/35$

b) $35/30$

c) $91/65$

13. El número 0,23 es igual a:

a) $2/9$

b) $21/99$

c) $7/30$

d) $8/99$

14. El 20% de \$100000 pesos es:

- a) \$20000
- b) \$2000
- c) \$200.
- d) \$20.

15. ¿Cuál de las desigualdades siguientes es correcta?

- a) $-5/11 < -7/13 < 2/3$
- b) $-7/13 < -6/11 < 2/3$
- c) $-7/13 < 2/3 < -6/11$

16. Un vaso se llena hasta los $2/3$ de su capacidad con zumo de naranja. ¿Si las $9/10$ partes del zumo son agua, qué fracción del vaso ocupa el agua?

- a) $16/30$
- b) $20/27$
- c) $3/5$
- d) $4/5$

17. Del precio de un artículo, los $2/9$ corresponden al costo de planificación, $2/5$ al costo de producción y el resto, al costo de comercialización. ¿qué fracción del precio se destina a pagar la comercialización?

- a) $17/45$
- b) $10/14$
- c) $1/3$
- d) $3/18$

18. Se reparte un pastel entre tres niños, si el primero recibe la mitad del pastel y el segundo, la mitad que el primero ¿qué parte del pastel recibe el tercero?

- a) Nada
- b) $\frac{1}{4}$ de paste
- c) $\frac{3}{8}$ del pastel
- d) $\frac{3}{4}$ del pastel

19. Una dieta alimenticia se compone de $\frac{2}{3}$ de proteínas, $\frac{1}{6}$ de lípidos y el resto de hidratos de carbono. ¿Qué fracción de la dieta está compuesta de hidratos de carbono?

- a) $\frac{8}{11}$
- b) $\frac{1}{15}$
- c) $\frac{3}{18}$
- d) $\frac{5}{18}$

20. Un abogado recupera el 90% de una demanda de \$20'000.000 de pesos y cobra, por concepto de servicios, el 20% de la cantidad recuperada. ¿Cuánto dinero recibe su cliente?

- a) \$18'000.000
- b) \$3'600.000
- c) \$1'440.000.
- d) \$16'000.000.

21. Un plano está hecho a una escala tal que una distancia de 1 milímetro sobre el plano, equivale a 2 metros en la realidad. ¿Qué área tiene una parcela que sobre el plano mide 5 centímetros?

- a) 200 metros
- b) 2000 metros
- c) 20000 metros
- d) 200000 metros

22. Si por cada tres colombianos que han leído El Quijote hay 12 que no lo han leído y cinco de cada seis colombianos que lo han hecho usan gafas ¿qué fracción de los colombianos usan gafas y han leído El Quijote?

- a) $1/12$
- b) $5/14$
- c) $1/6$
- d) $3/14$

23. Si cuatro de cada cinco colombianos se declaran partidarios de la conservación de la naturaleza ¿qué porcentaje de colombianos son partidarios de conservar la naturaleza?

- a) 40%
- b) 60%
- c) 80%
- d) 90%

24. Al examen de matemáticas, en junio se presentan tres de cada cinco estudiantes matriculados, y por cada 5 alumnos que aprueban hay dos que pierden. ¿qué fracción de los alumnos matriculados aprueban en junio?

- a) $3/7$
- b) $10/15$
- c) $6/25$
- d) $8/15$

25. Una persona invierte \$1'500.000 en acciones de Ecopetrol. Al cabo de un año vende las acciones y recibe \$1'800.000. ¿qué tanto por ciento de beneficio ha obtenido?

- a) 20%
- b) 16,66%
- c) 30%
- d) 10%

26. El banco Davivienda ofrece una cuenta de ahorros de la siguiente manera. Por los primeros \$100.000 de saldo se paga un 2% anual de interés; por el resto del saldo, un interés del 9% anual. Si un señor tiene un millón de pesos durante un año en dicha cuenta ¿qué interés recibe por todo su capital?

- a) 11%
- b) 7%
- c) 8,3%
- d) 9%

27. Una botella contiene medio litro de zumo de limón. El 80% del zumo de limón es agua. Si añadido medio litro de agua ¿cuál es el porcentaje de agua en la mezcla?

- a) 160%
- b) 90%
- c) 40%
- d) 30%

28. Una empresa gasta \$1'470.000 en gas para la calefacción a un precio de \$140 el litro de gas. ¿Cuánto gastaría si comprase la misma cantidad de gas a \$160 el litro?

- a) \$1'490.000
- b) \$1'470.000
- c) \$1'680.000
- d) \$1'700.000

29. Si por cada siete colombianos que trabajan hay tres que no trabajan ¿cuál es la fracción de los colombianos que no trabajan?

- a) $\frac{3}{7}$
- b) $\frac{7}{10}$
- c) $\frac{3}{10}$
- d) $\frac{4}{10}$

30. Un padre reparte su herencia entre sus tres hijos. Si deja las $\frac{4}{9}$ partes al mayor y las $\frac{2}{7}$ partes al mediano ¿qué porción recibió el hijo menor?

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{17}{63}$
- c) $\frac{3}{8}$
- d) $\frac{5}{9}$

31. Si un dólar pasa de valer \$1.850 pesos a valer \$1820 pesos, se devalúa frente al peso:

- a) 1,162 %
- b) 11,625
- c) 0,621 %
- d) 0,01162 %

32. Jaime Márquez recibió hace tres meses una cuantiosa herencia. El primer mes gastó el 40% de la herencia. El segundo mes gastó la quinta parte de la herencia y el tercer mes gastó la mitad de lo que le quedaba. ¿Qué fracción de la herencia le queda?

- a) $\frac{3}{10}$
- b) $\frac{1}{5}$
- c) $\frac{1}{10}$
- d) $\frac{3}{5}$

33. ¿Qué cantidad se paga por concepto de IVA de 3500 gramos de una mercancía, si por un kilo se pagan \$1200 pesos?

- a) \$4.200 pesos
- b) \$420 pesos
- c) \$42.000 pesos
- d) \$420.000 pesos

34. Un avión de la empresa Avianca tiene un quinto de los asientos de clase preferencial, y el resto, de clase turista. Si el 75% de los asientos de clase preferencial están vacíos y el 85% de los de clase turista están ocupados ¿cuál es el porcentaje de asientos ocupados en el avión?

- a) 75%
- b) 55%
- c) 70%
- d) 75%

35. Si compro cuatro ruedas por el precio de tres, ¿cuál es el tanto por ciento de rebaja en el precio de cada rueda?

- a) 30%
- b) 20%
- c) 25%
- e) 35%

36. Un teatro sube el precio de la entrada a cine en un 10%. Como consecuencia disminuye el número de entradas vendidas en un 5% ¿cuál es el porcentaje de aumento de la recaudación?

- a) 5%
- b) 4,5%
- c) 15%
- d) 5,5%

37. Entro a un almacén a comprar un artículo. Regateo y el comerciante me ofrece una rebaja del 10% sobre el precio marcado. Me pongo serio y me hace otra rebaja del 2% sobre el precio ya rebajado. ¿cuál es la rebaja que he conseguido sobre el precio marcado?

- a) 12%
- b) 8%
- c) 11,8%
- d) 12,5%

38. Un equipo de trabajadores tarda $10/3$ de hora en realizar un trabajo y todos trabajan por igual. ¿Cuánto tardarán si sólo están presentes $5/6$ de los trabajadores del equipo?

- a) $25/9$ de horas
- b) $15/4$ de hora
- c) 4 horas
- d) 5 horas

39. Un grifo completamente abierto tarda $9/2$ de hora en llenar un depósito. ¿Cuánto tardará en llenarlo si sólo se abre hasta los $3/4$ de su máximo caudal?

- a) 6 horas
- b) $27/8$ de hora
- c) $15/2$ de hora
- d) 7 horas

40. Un vaso tiene sus $4/5$ partes ocupadas con zumo de limón y el resto con vodka. Si el 90% del zumo y el 40% del vodka es agua ¿qué fracción del vaso ocupa el agua?

- a) $17/50$ partes
- b) El 80%
- c) El 65%
- d) $23/50$ partes

41. Si la producción colombiana de miel durante 1990 fue de 1,5 veces la de 1989, ¿cuál ha sido el porcentaje de incremento de la producción de miel de 1990 respecto de 1989?

- a) 150%
- b) 15%
- c) 50%
- d) 30%

42. ¿Cómo se gana más: trabajando 25 horas a razón de \$1.500 pesos la hora o trabajando 30 horas y cobrando un 10% menos la hora trabajada?

- a) Trabajando 25 horas a \$1500 la hora.
- b) Trabajando 30 horas y cobrando un 10% menos la hora.
- c) Se gana igual en ambos casos.
- d) No es conveniente ninguna de las dos formas.

43. Juan, el valiente, es un muchacho con muy buena pinta. Hace unos meses compró un potente carro de marca extranjera para poder presumir entre sus amistades. De entrada, pagó la tercera parte del precio del carro y el primer mes el 30% de la cantidad que le restaba por pagar. Desde entonces no ha vuelto a pagar nada. ¿Cuál es la fracción del precio del carro que adeuda?

- a) $\frac{7}{5}$
- b) $\frac{8}{5}$
- c) $\frac{1}{3}$
- d) $\frac{5}{3}$

44. Se informa que en 1989 fallecieron 3500 personas en Colombia a causa de accidentes en motocicleta, y que el número de fallecidos por esta causa, en 1990, se incrementó en un 20% respecto de 1989. Según estos datos ¿cuántas personas murieron por accidente en Colombia durante 1990?

- a) 4200 personas
- b) 3520 personas
- c) 7000 personas
- e) 5200 personas

45. En un colegio el 40% de los estudiantes son niños. Si el 70% de las niñas y el 20% de los niños votan por Pedro Pérez para delegado ¿qué porcentaje de votos sobre el total de alumnos recibe Pedro Pérez?

- a) 90%
- b) 50%
- c) 30%
- d) Faltan datos para poder calcularlo.

46. Si una persona gasta $\frac{1}{3}$ de lo que gana en el alquiler de una vivienda y las $\frac{3}{4}$ partes del dinero restante las emplea en su manutención, ¿a qué dedica más dinero?

- a) A su manutención.
- b) Al alquiler de la vivienda.
- c) Gasta lo mismo en manutención que en su alquiler.
- d) Falta información.

47. En una finca $\frac{2}{5}$ de su superficie se dedican al cultivo de cereales, $\frac{3}{11}$ a girasol y el resto a pastos. ¿Cómo se ordenan las tres actividades por la superficie dedicada a cada una?

- a) Cereales > girasol > Pastos
- b) Girasol > Pastos > Cereales
- c) Pastos > Cereales > Girasol
- d) Cereales > Girasol > Pastos

48. ¿Qué pesa más, el 15% de un queso de 2.5 kilos, la tercera parte de un queso de 2.1 kilos o las cuatro quintas partes de un queso de 750 gramos?

- a) El 15% del queso de 2.5 kilos.
- b) La tercera parte del queso de 2.1 kilos.
- c) Las cuatro quintas partes de los 750 gramos.
- d) Falta información.

49. ¿Qué contiene más cerveza, cuatro botellas de $\frac{1}{3}$ de litro cada una o nueve botellines de $\frac{1}{5}$ de litro cada una?

- a) Las cuatro botellas.
- b) Los nueve botellines.
- c) Tienen la misma capacidad.
- d) Faltan datos.

50. Si el kilo de cebada sube en 1990 un 1% con respecto de 1989, y en 1991 sube un 2% con respecto de 1990 ¿cuál es el porcentaje de incremento del precio de 1991 con respecto de 1989?

- a) 3%
- b) 2,5%
- c) 3,02%
- d) 2,05%

51. Los gemelos Jaime y Antonio reciben dos pasteles iguales, uno para cada uno, el día de su cumpleaños. Por la tarde, Jaime se come la mitad de su pastel y Antonio la tercera parte del suyo. Por la noche, Jaime se come la tercera parte de lo que le queda y Antonio la mitad de lo que le queda. ¿Cuál de los dos conserva más pastel?

- a) Jaime
- b) Antonio
- c) Tienen la misma cantidad.
- d) Falta información.

52. Se tienen dos toneles, uno lleno de agua y el otro lleno de vino. Se llena un balde con el agua del tonel de agua y se vierte en el de vino. Luego, se llena el mismo balde con el vino del tonel de vino y se vierte en el de agua. ¿Qué hay más, agua en el tonel del vino o vino en el tonel del agua?

- a) Agua en el tonel del vino.
- b) Vino en el tonel del agua.
- c) Hay tanta agua en el tonel del vino como vino en el tonel del agua.
- d) Falta información.

53. Isabel y Diego son dos enamorados que quieren sellar su pasión con dos anillos que se fabricarán fundiendo sus anillos actuales. El anillo de Isabel pesa 10 gramos y tiene una riqueza de oro del 60%, el anillo de Diego pesa 15 gramos y tiene una riqueza de oro del 50%, ¿cuál será el porcentaje de oro de los nuevos anillos?

- a) 55%
- b) 54%
- c) 56%
- d) 57%

CAPÍTULO

3

LOS NÚMEROS REALES

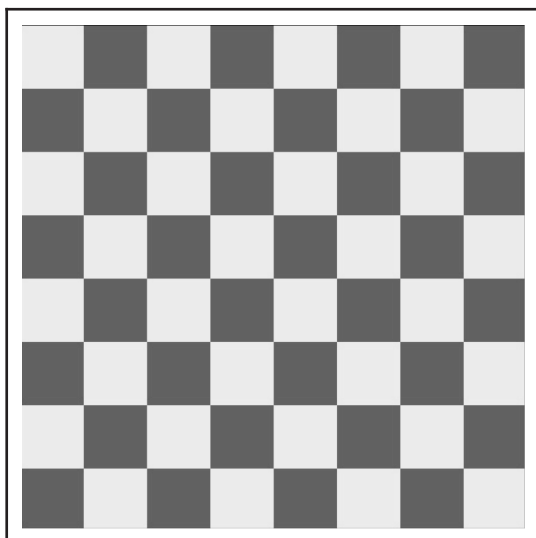
Competencias cognitivas

- ♦ Identificar el sistema numérico de los números reales.
- ♦ Aplicar las diferentes propiedades de los números reales en la solución de problemas que involucran dicho sistema numérico.
- ♦ Operar correctamente con los números reales.
- ♦ Identificar los diferentes subconjuntos de los números reales.

3.1 Radicación

El cuadrado de la siguiente figura representa un tablero de ajedrez (Figura 3.1).

Figura 3.1 Resultados primera semana de estudios 2010 - 2012.



Fuente. Elaborado por el autor.

Para saber el número de cuadrados que hay en el tablero de ajedrez, se puede contar el número de filas y columnas que hay en el tablero; se tiene que hay 8 filas y 8 columnas, luego el número de cuadrados es $8 \times 8 = 64$. Ahora, si se sabe el número total de cuadrados pero se quiere saber cuántos cuadrados hay por lado, teniendo en cuenta que este número es igual por lado, entonces lo que se quiere hallar es un número n tal que $n \times n = 64$. Es claro por el proceso inverso, que $n = 8$ ya que $8 \times 8 = 64$. Este número $n = 8$ se dice que es la raíz cuadrada de 64.

Si ahora se tuviera un cuadrado formado por 36 cuadrados pequeños, el cuadrado tendría 6 cuadrados pequeños por lado, ya que $6 \times 6 = 36$. Luego 6 es la raíz cuadrada de 36.

De manera similar una raíz cuadrada de 9 es 3 ya que $3^2 = 9$. Observe que -3 también es una raíz cuadrada de 9 ya que $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$.

Una raíz cuadrada de 16 es 4 ya que $4^2 = 16$, de manera similar -4 también es una raíz cuadrada de 16 ya que $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$.

En general:

La raíz cuadrada de un número positivo **a**, en un número **n** cuyo cuadrado es el número **a**, es decir: $n^2 = a$

Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa. La raíz cuadrada positiva de un número **n** se denota $\sqrt{n}$, así:

Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa. La raíz cuadrada positiva de un número **n** se denota $\sqrt{n}$, así:

$\sqrt{36}=6$; la raíz cuadrada positiva de 36 es 6.

$$\sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{10.24} = 3.2$$

En esta notación el símbolo $\sqrt{}$ se llama signo radical, el número dentro del signo se llama el radicando y un signo radical y un radicando juntos se llama: un radical.

Ejercicios 1

1. Encontrar la raíz cuadrada de los siguientes números:

- a) 4 b) 64 c) 1 d) 100 e) 225
- f) $4 \times 1 \times 25$ g) $25 \times 16 \times 4$ h) 47×4 i) 625×4 j) 27.04

2. Encontrar la raíz cuadrada de los siguientes números:

- a) $\frac{121}{25}$ b) $\frac{36}{81}$ c) $\frac{100}{9}$ d) $\frac{1}{36}$ e) $\frac{289}{144}$
- f) $\frac{121}{100000}$ g) $\frac{64}{25}$ i) $\frac{169}{324}$ j) $\frac{81}{225}$ k) $\frac{49}{169}$

3. Encontrar un número positivo **n** tal que:

- a) $n \cdot n = 64$ b) $n^2 = 1$ c) $n \cdot n = 0.25$
- d) $n \cdot n = \frac{1}{4}$ e) $n^2 = \frac{256}{441}$

4. a) ¿Qué número real multiplicado por sí mismo da -4 ?

b) ¿Qué número real multiplicado por sí mismo da -36 ?

c) ¿Existen raíces de números negativos? ¿por qué?

3.2

Propiedades de las raíces cuadradas

Ejemplos:

a. Para extraer la raíz del producto 9×100 , se puede proceder de dos formas:

$$\sqrt{9 \times 100} = \sqrt{900} = 30, \text{ porque } 30^2 = 900 \text{ o,}$$

$$\sqrt{9 \times 100} = \sqrt{9} \times \sqrt{100} = 3 \times 10 = 30$$

De manera similar, para extraer la raíz del producto de $25 \times 16 \times 4$ se puede proceder de la siguiente manera:

$$\sqrt{25 \times 16 \times 4} = \sqrt{1600} = 40$$

$$\sqrt{25 \times 16 \times 4} = \sqrt{25} \times \sqrt{16} \times \sqrt{4} = 5 \times 4 \times 2 = 40$$

En general, se puede decir que:

La raíz cuadrada del producto de los dos números positivos es el producto de las raíces cuadradas de esos números, es decir, si a, b son números positivos:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

b. Para extraer la raíz del cociente $\frac{64}{25}$ se puede proceder de dos formas:

$$\sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5} \text{ porque } \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25} \text{ de otra forma para extraer la raíz}$$

del cociente $\frac{64}{25}$ se puede proceder de la siguiente manera:

$$\sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5}$$

De manera similar, para extraer la raíz del cociente de $\frac{121}{49}$ se puede proceder de la siguiente manera:

$$\sqrt{\frac{121}{49}} = \frac{11}{7}, \text{ ya que } \left(\frac{121}{49}\right)^2 = \frac{121}{49}$$

O de otra manera:

$$\sqrt{\frac{121}{49}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{49}} = \frac{11}{7}$$

En general:

La raíz cuadrada del cociente de dos números positivos es el cociente de las raíces cuadradas de esos números, es decir, si a y b son números positivos:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Ejercicios 2

1. Efectuar:

a) $\sqrt{196 \times 25}$

b) $\sqrt{625 \times 16}$

c) $\sqrt{\frac{361}{81}}$

d) $\sqrt{\frac{169}{64 \times 9}}$

e) $\sqrt{\frac{4 \times 25 \times 36}{121 \times 49}}$

e) $\sqrt{\frac{64 \times 81 \times 100}{361 \times 169}}$

2. Decir si son verdaderas o falsas cada una de las afirmaciones y justificar con ejemplos.

Sean **a** y **b** números positivos:

a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

3. Utilizar la descomposición en factores primos y las propiedades anteriores para calcular:

a) $\sqrt{1296}$

b) $\sqrt{2304}$

c) $\sqrt{\frac{4624}{5625}}$

4. Los 2024 alumnos de un colegio se quieren colocar formando un cuadrado ¿cuántos alumnos habrá en cada lado?

3.3

Extracción de la raíz cuadrada

Sabemos que cualquier número compuesto se puede descomponer en un producto de factores primos. Este producto se llama: descomposición del número en factores primos.

Para encontrar la raíz cuadrada de un número, se descompone el número en sus factores primos, se agrupan en potencias pares y se encuentra la raíz cuadrada de cada par, como se muestra en los siguientes ejemplos:

a. Calcular $\sqrt{1296}$

1296	2	es decir, $1296 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ $= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$ $\sqrt{1296} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$ $= \sqrt{(2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)}$ $= \sqrt{(2 \times 2)} \times \sqrt{(2 \times 2)} \times \sqrt{(3 \times 3)} \times \sqrt{(3 \times 3)}$ $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$
648	2	
324	2	
162	2	
81	3	
27	3	
9	3	
3	3	
1		

b. Calcular $\sqrt{450}$

450	2	es decir, $450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$
225	3	
75	3	
25	5	
5	5	
1		

$$\sqrt{450} = \sqrt{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5} = \sqrt{2} \times \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{5 \times 5} = \sqrt{2} \times 3 \times 5 = 15\sqrt{2}$$

Observación: cuando el radicando contiene factores primos que no se pueden agrupar en pares, se dice que el radical está en forma simplificada y la raíz no es exacta, así: $15\sqrt{2}$ es la forma simplificada de $\sqrt{450}$. En caso contrario, como en el ejemplo **a**, la raíz cuadrada es exacta.

$$c) \sqrt{196} = \sqrt{2 \times 2 \times 7} = \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{7 \times 7} = 2 \times 7 = 14$$

$$d) \sqrt{2352} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7} = \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{7 \times 7} \\ = 2 \times 2 \times \sqrt{3 \times 7} = 28\sqrt{3}$$

$$e) \sqrt{80} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5} = \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{5} = 2 \times 2 \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

Ejercicios

1. Simplificar

- a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt{120}$ c) $\sqrt{1000}$ d) $\sqrt{340}$
 e) $\sqrt{1056}$ f) $\sqrt{2187}$ g) $\sqrt{11979}$ h) $\sqrt{972}$
 i) $\sqrt{3750}$ j) $\sqrt{39800}$ k) $\sqrt{256}$ l) $\sqrt{2304}$

2. Simplificar

- a) $\sqrt{\frac{289 \times 49}{169 \times 4}}$ b) $\sqrt{\frac{64 \times 25}{125 \times 9}}$ c) $\sqrt{\frac{64}{25}}$
 d) $\sqrt{\frac{625}{10000}}$ e) $\sqrt{\frac{125}{49}}$ f) $\sqrt{\frac{256}{225}}$

3.4 Raíces cúbicas y de índice superior

La raíz cúbica de 125 es 5, porque $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

La raíz cúbica de -8 es -2, porque $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

La raíz cúbica de 27 es 3, porque $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

La raíz cúbica de -343 es -7 porque $(-7)^3 = (-7) \times (-7) \times (-7) = -343$

En general:

La raíz cúbica de un número, es otro número cuyo cubo (o tercera potencia) es el número dado.

La notación para la raíz cúbica de un número a es $\sqrt[3]{a}$. En esta notación el símbolo $\sqrt{}$ se llama signo radical, el número bajo el signo radical se llama el radicando y el número 3 se llama el índice del radical. Recordemos que en la notación para la raíz cuadrada de un número, el índice del radical no se escribió.

Por otro lado, el índice 2 se sobreentiende, si un radical se escribe sin índice se entiende que significa raíz cuadrada. Todos los otros índices deben escribirse, así:

$$\sqrt[3]{216} = 6, \text{ porque } 6^3 = 216$$

$$\sqrt[3]{-\frac{512}{27}} = -\frac{8}{3}, \text{ porque } \left(-\frac{8}{3}\right)^3 = -\frac{512}{27}$$

$$\sqrt[3]{0,000729} = 0,09, \text{ porque } (0,09)^3 = -\frac{512}{27}$$

Las raíces cuartas, raíces quintas, etc., se definen de forma similar. Por ejemplo, la raíz cuarta de 16 es 2, porque $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, y se escribe $\sqrt[4]{16} = 2$.

La raíz quinta de 243 es 3, porque $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ y se escribe:

La raíz quinta de 243 es 3, por que $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ y se escribe:

$$\sqrt[5]{243} = 3 \quad \text{así también:}$$

$$\sqrt[4]{81} = 3, \text{ porque } 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}, \text{ porque } \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} = -\frac{2}{3}, \text{ porque } \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) =$$

$$\sqrt[7]{-1} = -1, \text{ porque } (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$$

$$\sqrt[4]{0,0081} = 0,3 \text{ porque } (0,3)^4 = (0,3) \times (0,3) \times (0,3) \times (0,3) = 0,0081$$

En general:

Sea **A** un número cualquiera. Si **a** es un número que cumple la condición $a^n = A$, se dice que **a** es una raíz **n** – ésima de **A** y se denota por

$$a = \sqrt[n]{A}.$$

Si **n** es par y **A** > 0, el número **A** tiene dos raíces **n** – ésimas, una positiva y la otra negativa. Además, la una es opuesta a la otra. Los números negativos no tienen raíz **n** – ésima si **n** es par.

Las propiedades de las raíces **n** – ésimas son las mismas que las raíces cuadradas, así:

$$\text{a) } \sqrt[n]{A : B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}. \quad \text{b) } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejercicios 4

1. Calcular:

a) $\sqrt[3]{1000}$

b) $\sqrt[3]{-0.027}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{512}}$

d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{343}}$

e) $\sqrt[3]{8 \times 216}$

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{216} \times 125 \times 64}$

g) $\sqrt[3]{0.001}$

h) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$

2. Encontrar:

a) $\sqrt[5]{-32}$

b) $\sqrt[4]{256}$

c) $\sqrt[10]{1024}$

d) $\sqrt[10]{1}$

e) $\sqrt[3]{-\frac{3125}{343}}$

f) $\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{\frac{216}{343}}$

g) $\sqrt[7]{-1}$

h) $\sqrt[4]{625}$

3. Utilizar la descomposición en factores primos y las propiedades dadas anteriormente para calcular:

a) $\sqrt[3]{1728}$

b) $\sqrt[3]{3375}$

c) $\sqrt[5]{-0.00243}$

d) $\sqrt[5]{-\frac{3126}{1024}}$

e) $\sqrt[8]{-\frac{256}{6561}}$

f) $\sqrt[4]{0.0626}$

4. a) ¿Qué número real elevado a la 4 da -81 ?b) ¿Qué número real elevado a la 6 da -64 ?

- c) ¿Existe la raíz cuarta de -81?
- d) ¿Existe la raíz sexta de - 64?
- e) ¿Existen raíces de índice par de números reales negativos?
¿por qué?

3.5 Simplificación de radicales

Para encontrar la raíz cúbica de un número este se descompone en sus factores primos, y luego, se agrupan estos factores primos en grupos de tres se saca la raíz cúbica de cada grupo tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

- a) Calcular

$$\sqrt[3]{2744}$$

$$\begin{array}{r|l} 2744 & 2 \\ 1372 & 2 \\ 686 & 2 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

es decir: $2744 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7$

$$\sqrt[3]{2744} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2} \sqrt[3]{7 \times 7 \times 7} = 2 \times 7 = 14$$

b) Calcular $\sqrt[3]{257250}$

257250	2	
128625	3	
42875	5	
8575	5	es decir: $257250 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$
1715	5	
343	7	
49	7	
7	7	
1		

$$\sqrt[3]{257250} = \sqrt[3]{2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7} = \sqrt[3]{2 \times 3} \times \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5} \times \sqrt[3]{7 \times 7 \times 7} = \sqrt[3]{2 \times 3 \times 5 \times 7} = 35\sqrt[3]{6}$$

Luego, $\sqrt[3]{257250} = 35\sqrt[3]{35}$

c) Calcular $\sqrt[4]{1296}$

1296	2	
648	2	
324	2	
162	2	es decir: $1296 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
81	3	
27	3	
9	3	
3	3	
1		

$$\sqrt[4]{1296} = \sqrt[4]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = 2 \times 3 = 6$$

Luego, $\sqrt[4]{1296} = 6$

d) Calcular $\sqrt[5]{5120}$

5120	2
2560	2
1280	2
640	2
320	2
160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

es decir: $5120 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$$\sqrt[5]{5120} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5} =$$

$$\sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} \sqrt[5]{5} = 2 \times 2 \times \sqrt[5]{5} = 4\sqrt[5]{5}$$

e) Calcular $\sqrt[3]{36}$

36	2
18	2
9	3
1	

Es decir: $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$, no se pueden formar grupos de tres, luego, $\sqrt[3]{36}$ está en forma simplificada.

Ejercicios 5

Simplificar:

a) $\sqrt[3]{8000}$

b) $\sqrt[4]{15625}$

c) $\sqrt[5]{54432}$

d) $\sqrt[3]{216000}$

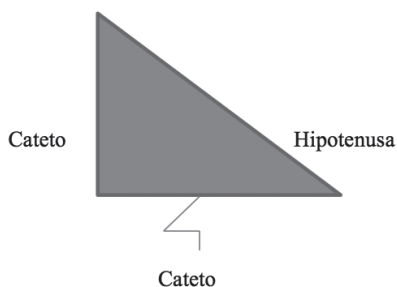
e) $\sqrt{405}$

3.6

Teorema de Pitágoras

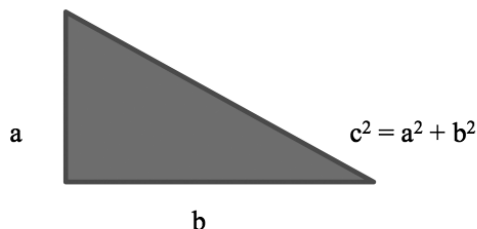
El teorema de Pitágoras hace referencia a los lados de un triángulo rectángulo. Estos lados son: los catetos, que forman el ángulo recto, y la hipotenusa opuesta a dicho ángulo.

El teorema establece la siguiente relación entre las longitudes de los lados, la siguiente relación que permite calcular uno de los lados, teniendo conocimiento de los otros dos.



El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

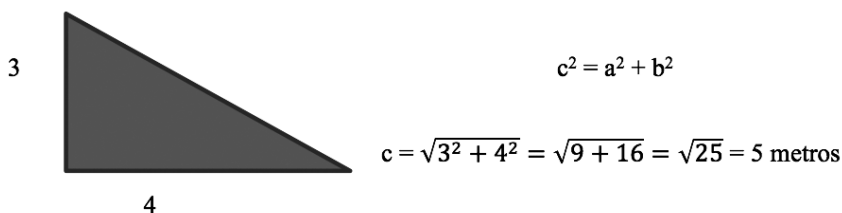
Así, si **a** **b** son las longitudes de los catetos, y **c** la longitud de la hipotenusa, entonces:



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

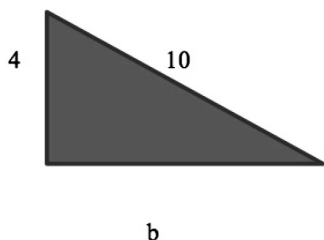
Ejemplos:

a) ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados tienen de longitud 3 y 4 metros, respectivamente.



$$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ metros}$$

b) Si la hipotenusa tiene 10 metros de longitud y uno de los lados tiene 4 metros de longitud, ¿cuál es la longitud del tercer lado?



$$\text{Como } c^2 = a^2 + b^2$$

$$10^2 = 4^2 + b^2$$

$$100 = 16 + b^2$$

$$100 - 16 = b^2$$

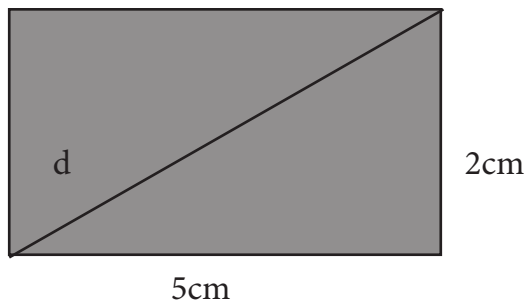
$$84 = b^2$$

$$\sqrt{84} = b$$

Luego: $b = 9,17$ metros.

- c) Encuentre la longitud **d** de la diagonal de un rectángulo cuyo largo es 5 centímetros y su ancho es 2 centímetros.

Usando el teorema de Pitágoras (ya que los ángulos de un rectángulo son rectos), tenemos:



$$d^2 = 2^2 + 5^2$$

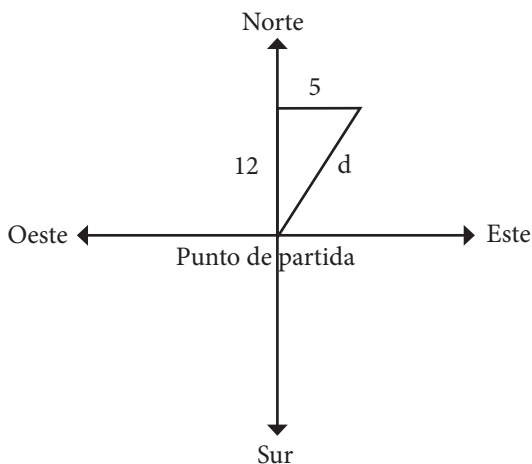
$$d^2 = 4 + 25$$

$$d^2 = 29$$

$$d = \sqrt{29}$$

$$d = 5,38 \text{ cm}$$

- d) Una persona camina 12 kilómetros hacia el norte y después 5 kilómetros hacia el este, ¿a que distancia está del punto de partida?



Lo que se pide es hallar la hipotenusa **d** del triángulo rectángulo que se observa en la figura.

$$d^2 = 12^2 + 5^2$$

$$d^2 = 144 + 25$$

$$d^2 = 169$$

$$d = \sqrt{169}$$

$$d = 13 \text{ km}$$

Luego la persona está a 13 kilómetros del punto de partida.

Ejercicios 6

1.Cuál es la longitud de la hipotenusa **c** de un triángulo rectángulo, como el de la figura:

Si:

a) $a = 1$, $b = 1$

b) $a = 36$, $b = 15$

C) $a = 1/12$ $b = 1/8$

2. ¿Cuál es la longitud del cateto **a**, en el rectángulo del ejercicio anterior, si?:

a) $c = 15$, $b = 12$

b) $c = 39$, $b = 15$

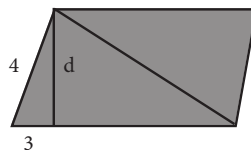
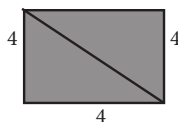
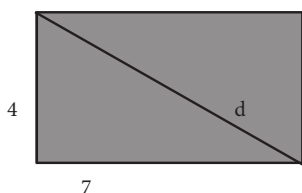
3. Con respecto a la misma figura del ejercicio 1, ¿cuál es la longitud del cateto **b**?

a) $c = 15$, $a = 9$.

b) $c = 2/3$, $a = 1/6$

c) $c = 39$, $a = 36$

4. ¿Cuáles son las longitudes de las diagonales **d** en las figuras siguientes?



5. Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo con su ángulo recto opuesto al lado más largo.

De acuerdo con este enunciado ¿cuáles de los siguientes conjuntos de números podrían ser las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo?

a) 30; 40; 60

b) $\frac{3}{4}$; 1; $\frac{11}{4}$

c) 1.4; 4.8; 5

d) $\frac{12}{3}$; $\frac{22}{3}$; $\frac{31}{3}$

3.7 Números irracionales

Como se ha visto cualquier número racional se puede expresar como un decimal infinito periódico, esta es la característica más importante para identificar números racionales en el mundo de los decimales. Pero hay números como $\sqrt{2}$, que en su forma decimal se expresa como:

$$\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$$

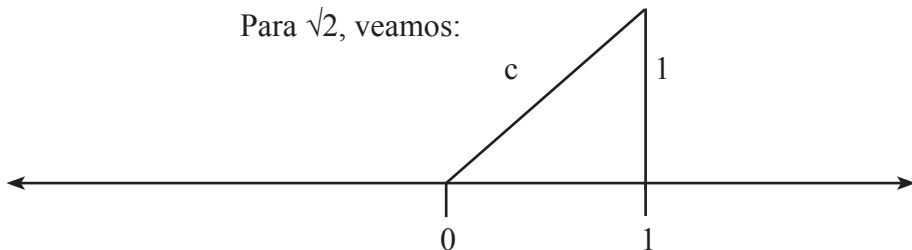
Se observa, que este número decimal, a diferencia de los decimales que representan racionales, no tiene una expresión decimal finita ni infinita periódica; esta es la característica de los irracionales, son decimales no finitos y no infinitos periódicos. Demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional, es decir que no es el cociente de dos números enteros, es un hecho que se demuestra en cursos superiores. Otros ejemplos de números irracionales son: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$. En general, toda raíz no exacta. Existen también otros números irracionales como π , $e = 2,7182\ldots$, $\sqrt[3]{2}$, ...

$\sqrt{9}$ no es un número irracional porque es el cociente de dos números enteros:

$$\sqrt{9} = 3 = \frac{3}{1}$$

¿Cómo se pueden representar algunos números irracionales en la recta numérica? El teorema de Pitágoras nos permite localizar algunos de ellos, así por ejemplo:

Para $\sqrt{2}$, veamos:

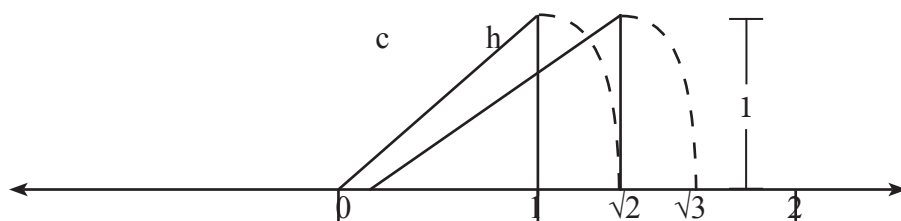


$$C^2 = 1^2 + 1^2$$

$$C^2 = 1 + 1$$

$$C^2 = 2 \quad \text{luego, } C = \sqrt{2}$$

Para localizar $\sqrt{3}$, primero se localiza $\sqrt{2}$, como se hizo anteriormente y después se hace el siguiente esquema:



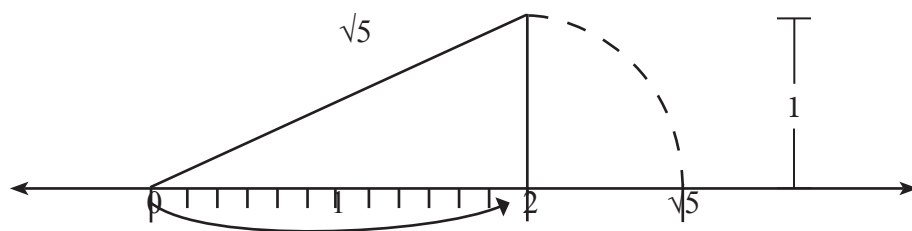
$$h^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$h^2 = 2 + 1$$

$$h^2 = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$

Usando de nuevo el teorema de Pitágoras, se puede localizar $\sqrt{5}$ de la siguiente manera:



$$h^2 = 2^2 + 1^2$$

$$h^2 = 4 + 1$$

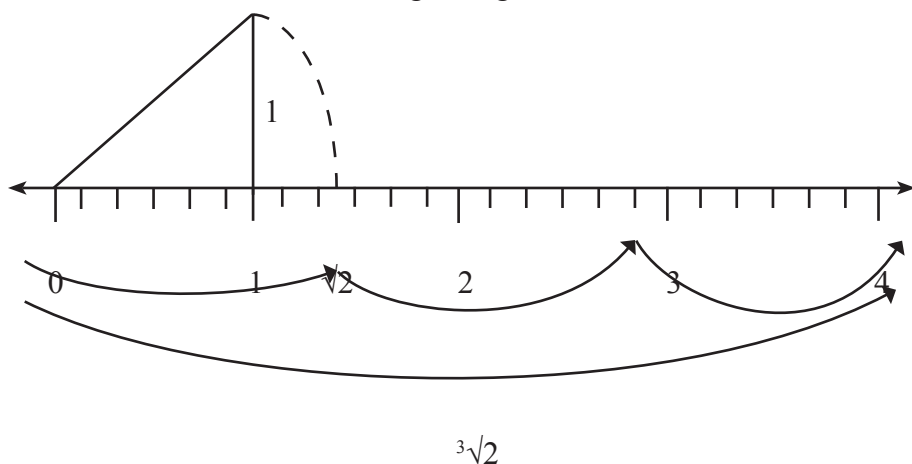
$$h^2 = 5$$

$$h = \sqrt{5}$$

Para localizar $-\sqrt{5}$, se ubica y se toma el punto simétrico a la izquierda de 0, como se ve en la figura anterior ya que $-\sqrt{5}$ es el opuesto de $\sqrt{5}$.

Para representar $\sqrt{18}$, se procede de la siguiente manera:

Como $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, se representa a $\sqrt{2}$ y se toma tres veces dicho número, como se indica en la figura siguiente:



Ejercicios 7

- De la siguiente serie de raíces cuadradas diga cuáles representan números racionales y cuáles números irracionales.

$\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$,
 $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{21}$,
 $\sqrt{21}$, $\sqrt{22}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{52}$, $\sqrt{26}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{30}$,

- Cuál es el opuesto de:

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{3}$ c) $-3\sqrt{5}$ d) $\sqrt{112}$

- Localizar en la recta numérica cada uno de los números del ejercicio anterior y sus opuestos.

4. Teniendo en cuenta las propiedades de los radicales vistos en la sección 3.4 y 3.5 hallar:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

b) $(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})$

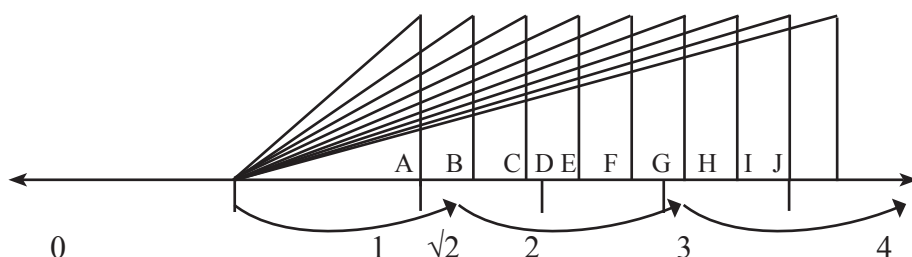
c) $\sqrt{5}$

d) $(\sqrt{11})^2$

e) $(\sqrt{7})^3$

f) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a} \quad (n > a)$

5. Aplicando el teorema de Pitágoras y teniendo en cuenta la figura, ¿qué número corresponde a cada punto A, B, C, D, E, F, G, H, I, J?



3.8 Los números reales y la recta real

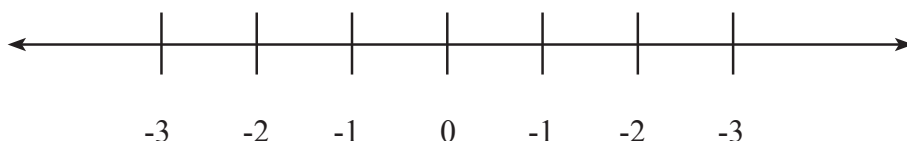
Hasta el momento se ha visto que los números racionales se pueden expresar como decimales infinitos periódicos o decimales finitos. Así mismo, los números irracionales se pueden expresar como decimales infinitos no periódicos, lo cual lleva a decir que los números reales se pueden escribir como decimales. Es decir, que los números reales la unión de los números racionales y los números irracionales.

Las magnitudes físicas como el tiempo, la distancia, el peso, etc, se miden en la práctica con los números racionales, por ejemplo, se habla de $\frac{3}{4}$ de hora o de 1.4 metros de longitud. Esta manera de medir permite alcanzar el grado de precisión que se desee, por el sencillo procedimiento de considerar fracciones decimales de la unidad. Es decir, se puede medir casi todo lo que se quiera con los números racionales o fraccionarios, pero hay ciertas longitudes como la hipotenusa de un triángulo rectángulo en donde es necesario emplear un número irracional. En consecuencia, no bastan los números racionales, también necesitamos de los números reales para poder medir.

En definitiva, se puede definir a los números reales como la unión de los decimales infinitos periodicos o decimales finitos unidos, con los decimales infinitos no periodicos, es decir que los números reales es cualquier forma decimal.

Examinemos ahora la biyección entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los puntos de una recta, así:

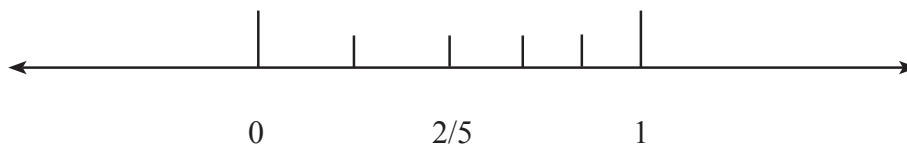
Si se selecciona un punto arbitrario de la recta numérica para representar el 0 y otro cualquiera a la derecha del 0 para representar el 1, el punto 0 se llama el origen, y el segmento determinado por el punto 0 y 1, se denomina unidad de la escala. Por repetición de la unidad a derecha e izquierda, comenzando desde el 0, se pueden representar los números enteros, como puntos de la recta, tal como se muestra en la figura:



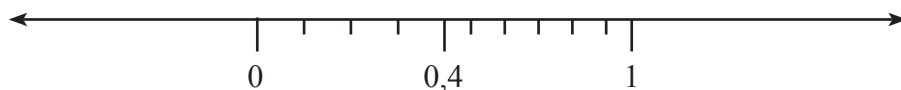
Los otros números reales pueden ser situados o intercalados en la recta usando la representación decimal de los números reales, o bien, utilizando una representación geométrica, de la siguiente forma:

a) Localizar $\frac{2}{5}$

Se divide la unidad en cinco partes y se toman 2 partes a partir de 0 hacia la derecha, tal como se muestra a continuación:

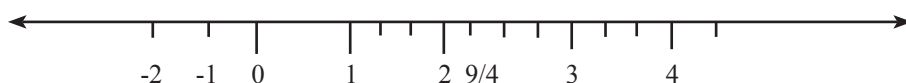


O como decimal $= 0,4$, se divide el segmento entre 0 y 1 en 10 partes iguales; luego, se toman 4 partes iguales hacia la derecha a partir de 0 y en ese punto se situa $2/5 = 0,4$.

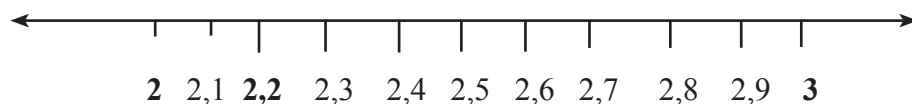


b) Localizar $\frac{9}{4}$

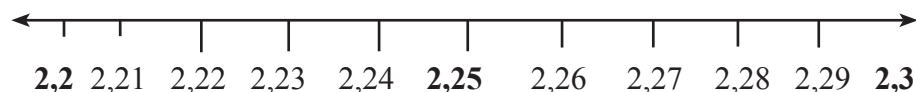
Se divide la unidad en 4 partes y se toman 9 partes a partir de 0 hacia la derecha, así:



Como $9/4 = 2,25$, primero se localiza 2,2, como se hizo en el ejemplo anterior; es decir, se divide la porción de recta entre 2 y 3 en 10 partes iguales, luego se toman 2 partes iguales hacia la derecha de lo y en este punto se situa 2,2, así:



2,25 se puede situar dividiendo el segmento entre 2,2 y 2,3 en 10 partes iguales y tomando 5 de esas partes a la derecha a partir de 2,2, como se muestra en la siguiente figura:

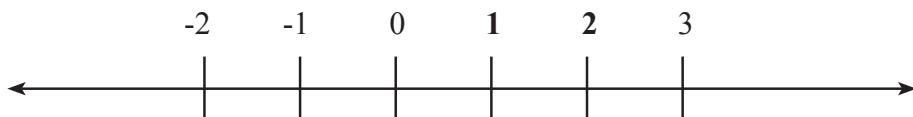


c) Localizar $\sqrt{2}$

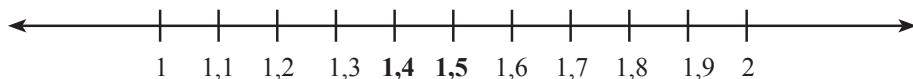
La localización exacta de $\sqrt{2}$ fue dada anteriormente mediante el uso geométrico del teorema de Pitágoras.

Se ha visto que $\sqrt{2}$ es un número irracional, por lo tanto, tendrá una expresión decimal infinita no periódica. Por ello, si se intenta situar $\sqrt{2}$ utilizando la representación decimal, se llegaría a un proceso interminable por medio del cual se podría aproximar pero nunca situar exactamente el punto. Tal localización se puede hacer con el grado de aproximación que se quiera, por ejemplo si $\sqrt{2}$ es aproximado por 1,414, entonces:

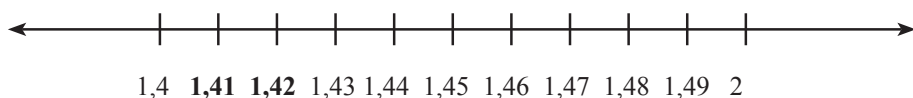
Paso 1: $\sqrt{2}$ está entre 1 y 2.



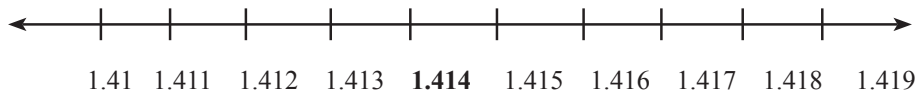
Paso 2: $\sqrt{2}$ entre 1,4 y 1,5



Paso 3: $\sqrt{2}$ entre 1,41 y 1,42

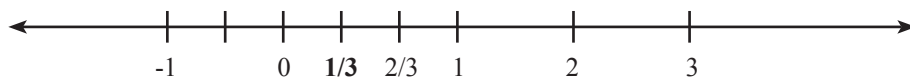


Paso 4: $\sqrt{2} = 1.4.14$ (aproximadamente)



d) Localizar $\frac{1}{3}$

Se divide la unidad en 3 partes y se toma una parte a partir de cero, hacia la derecha, así:



Si se intenta situar $1/3$ utilizando la representación decimal 0.333 , se llegará a un proceso interminable por medio del cual se podría aproximar pero nunca situar exactamente el punto.

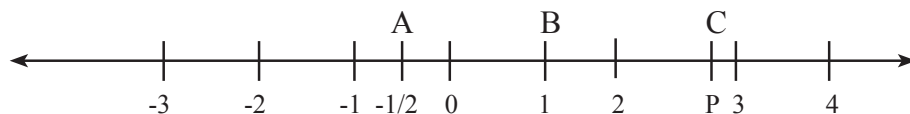
La localización de números negativos se hace de la misma manera, pero a la izquierda de cero.

Postulado de la regla

Como todo decimal periódico (número racional) o no periódico (número irracional) determina un punto en la recta numérica y como todo punto en la recta numérica está asociado a un decimal, se dice que existe una biyección entre el conjunto de los puntos de una recta y el conjunto de los números reales; de tal forma que a cada número real le corresponde un único punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un único número real, llamado su coordenada. La recta numérica que resulta se denomina recta real.

Ejemplo:

Considere la recta numérica, dada:



La coordenada de A es $-\frac{1}{2}$

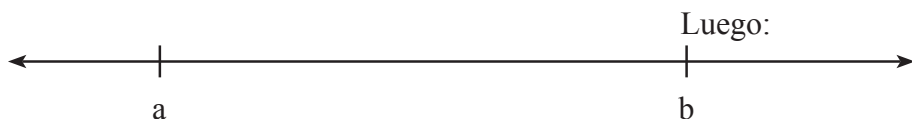
La coordenada de B es 1

La coordenada de C es P

- **Desigualdad en los números reales**

Geométricamente, un número real **a** es menor que un número real **b**, si en la recta numérica el punto asociado a **a** está a la izquierda del punto asociado a **b**.

Es decir:



a es menor que b ($a < b$)

Luego:

Así, por ejemplo:

$-3 < 7$ ya que en la recta numérica, el punto correspondiente a -3 está a la izquierda del punto correspondiente a 7 .

Ejercicios 8

a) $3\frac{2}{5}$

b) $-2\frac{1}{7}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\frac{15}{7}$

e) $-\sqrt{5}$

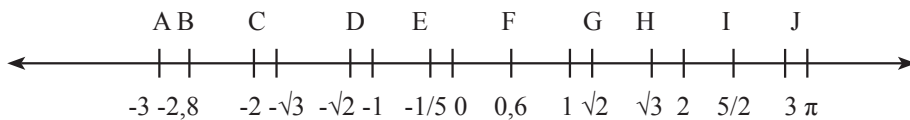
f) $-\frac{7}{3}$

g) 1.7

h) 1.732

i) π (aproximadamente) = 3.141 j) e (aproximadamente) = 2.718

2. Hallar las coordenadas de cada uno de los puntos indicados en la figura por las letras.



3. a) ¿Cuál es la coordenada del punto medio entre 2.7 y 2.8?

b) Localizar en la recta real dicho punto medio.

4. Dibujar una recta numérica y hallar por construcción geométrica un punto para $\sqrt{2} + 1$.

5. **P**, **Q**, y **R** son tres puntos de una recta con coordenadas respectivas.

a) -3; -11; 100.

b) $\sqrt{11}$; 3.32 ; π

c) -5; $-\sqrt{4}$; $-\sqrt{12}$

d) $1/2$; $5/11$; $9/17$

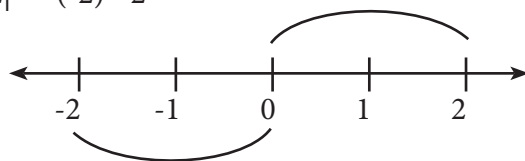
e) $-1/3$; $-1/4$; $-1/5$

¿Qué punto está entre los otros dos en cada caso? Escriba aquí la ecuación.

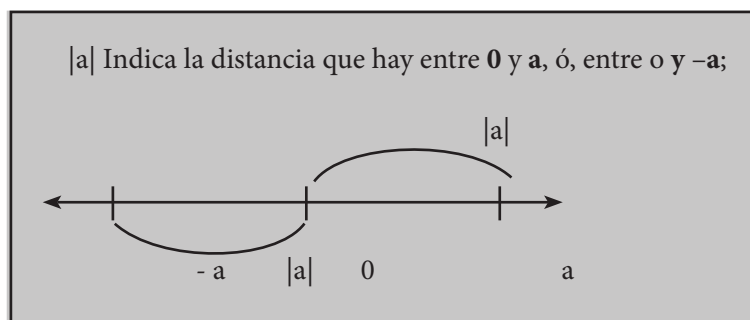
3.9 El valor absoluto

El valor absoluto de un número real significa geométicamente, la distancia que hay de un número real al origen, es decir al 0. Este valor se denota para un número real a con el símbolo $|a|$, así por ejemplo:

$$|2|=2 \text{ y } |-2| = -(-2)=2$$



En general:



Veamos otros ejemplos:

a) $|2|=2$

b) $|-7|=-(-7)=7$

c) $|-3| = -(-3)$

d) $|3/4|= 3/4$

e) $|2/3|= 2/3$

f) $|\sqrt{2}|= \sqrt{2}$

g) $|0|=0$

h) $|\sqrt{5}|=-(-\sqrt{5})= \sqrt{5}$

i) $|-1/2|= 1/2$

j) $|3|=3$

k) $|2-7|= |-5|= -(-5)=5$

Matemáticamente, se puede decir que:

El valor absoluto de un número, si el número es positivo o cero, es el mismo número; y si el número es negativo, el valor absoluto es el opuesto del número. Esto es:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejercicios 9

1. Calcular:

a) $|9|$

b) $|(-8)-2|$

c) $|3/4| - |1/2|$

d) $|-6|$

e) $|-4|+|-4|$

f) $|0,5| - |0,3|$

g) $|- \pi|$

h) $|-1.5| - |1.5|$

i) $|1/5|$

j) $|4|+|4|$

k) $|1/2| - |1/4| + |3/4|$

l) $\sqrt{|11|}$

m) $|-4| - |-4|$

n) $|(-7)-5|+|-4|$

o) $|8-3|$

p) $|4| - |-4|$

q) $|(-7)-5|+|-10|$

r) $|7-9|$

s) $|-1/2| + |3/4|$

t) $|(-5)-1| - |-3|$

2. Encontrar el valor o los valores de x en cada caso:

a) $|x|=2$

b) $|x| = 3$

c) $|x-2|=1$

d) $|x-7|=0$

3. Calcular:

a) $|3-7|$ y $|7-3|$

$|1/2 - 1/3|$ y $|1/3 - 1/2|$

$|0.75-0.25|$ y $|0.25-0.75|$

b) En general ¿qué puede concluir de $|a-b|$ y $|b-a|$?

c) ¿En qué caso $|a-b|=0$?

4. Escribir el símbolo $<$, $>$, $=$ según corresponda, entre los siguientes pares de números:

a) $|6|$; $|4|$ b) $|7|$; $|-8|$

c) $|-6|$; $|4|$ d) $|-9|$; $|-2|$

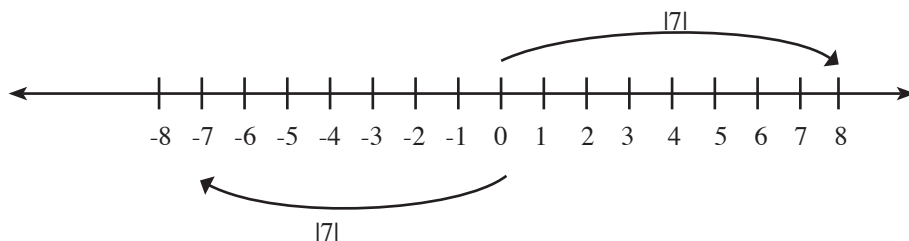
e) $|-6|$; $|-4|$ f) $|3|$; $|5|$

g) $|2|$; $|-3|$ h) $|4|$; $|2|$

i) $|2|$; $|1|$ j) $|-2|$; $|2|$

3.10 Distancias entre puntos

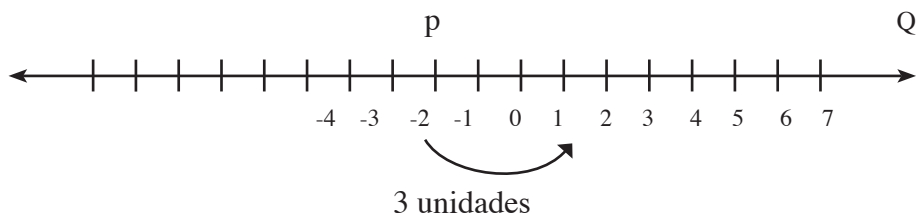
Indica la distancia que hay entre 0 y 7 o entre 0 y -7



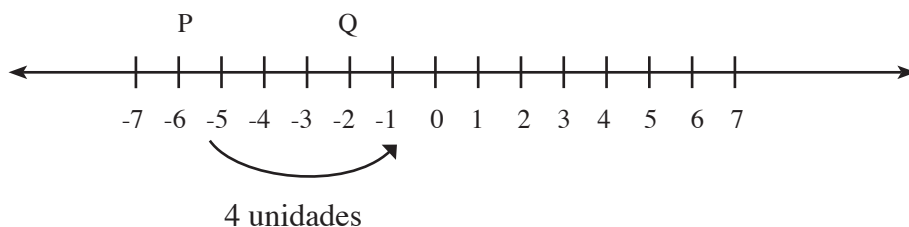
Pero en muchos casos es necesario encontrar la distancia entre dos puntos de la recta cuando ninguno de ellos es el punto cero.

Ejemplos:

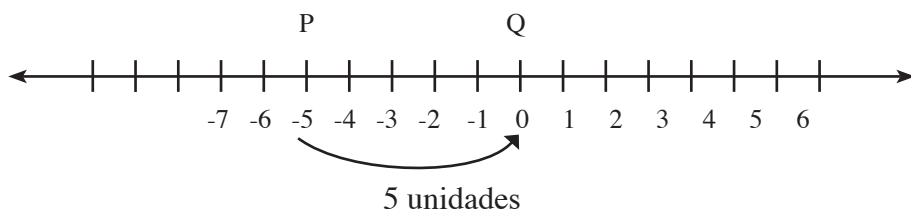
a) Se observa que la distancia entre **P** y **Q** es de tres unidades.



b) La distancia para este ejemplo entre P y Q es de dos unidades.



c) La distancia entre los puntos **P** y **Q** es de cinco unidades



Es posible, en general, encontrar la distancia entre dos puntos, restando las coordenadas de los puntos en cualquier orden y tomando el valor absoluto del número resultante, ya que la distancia siempre es positiva, así:

- En el ejemplo a), la coordenada de **P** es 2, la coordenada de **Q** es 5 y la distancia de **P** a **Q** = $|5-2| = |3| = 3$

$$\text{o} = |2-5| = |-3| = 3$$

- En el ejemplo b), la coordenada de **P** es -6, la coordenada de **Q** es -2 y la distancia de **P** a **Q** = $|-2-(-6)| = |4| = 4$

$$\text{o} = |-6-(-2)| = |-4| = 4$$

- En el ejemplo c), la coordenada de **P** es -2, la coordenada de **Q** es 3 y la distancia de **P** a **Q** = $|3-(-2)| = |5| = 5$

$$\text{o} = |-2-3| = |-5| = 5$$

En general, se tiene:

La distancia entre los puntos A y B en una recta numérica, con coordenadas a y b pueden representarse, ya sea por $d(A,B) = |b - a|$, o, por $d(B,A) = |a - b|$

La distancia entre dos puntos de la recta real, se expresa por el valor absoluto de sus coordenadas.



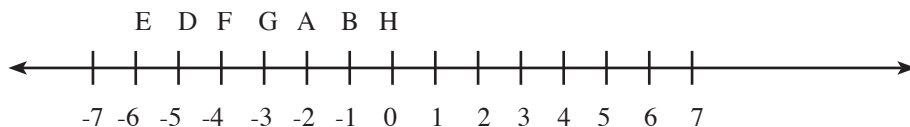
$$|a-b| = |b-a|$$

Ejercicios 10

1. Encuentre la distancia, en la recta numérica, entre los pares de puntos cuyas coordenadas son:

- | | |
|-----------|-------------------------------------|
| a) 0 y 8 | b) $2\frac{1}{2}$ y $-3\frac{1}{2}$ |
| c) -5 y 0 | d) $-\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ |
| e) -3 y 2 | f) $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{9}$ |
| g) 2 y -3 | h) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ |
| i) -1 y 1 | j) $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{5}$ |

2. De acuerdo con la figura, responda las siguientes preguntas:



- ¿Cuál es la coordenada de B y de H?
- ¿Cuál es la coordenada de D?
- Hallar las siguientes distancias: $d(G,C)$; $d(D,B)$; $d(A,E)$; $d(D,E)$

- d) ¿Qué punto está situado a la mitad de la distancia entre A y E?
- e) ¿Cuál es la coordenada del punto situado a $1/5$ de la $d(G,H)$?
- f) ¿Qué punto está situado a una distancia de 6 a la derecha de E?
- g) ¿Qué punto está situado a una distancia de 4 a la izquierda de B?
- h) ¿Qué punto está situado a una distancia de 2 de B?
- i) ¿Puede ocurrir que la distancia entre puntos de la recta real, sea un número negativo?

3. A, B y C son tres puntos de una recta; $d(A,C) = d(B,C) = 5$. La coordenada de C es 8 y la coordenada de A es mayor que la coordenada de B. ¿Cuáles son las coordenadas de A y B?

4. Los pueblos A, B y C están en línea, aunque no necesariamente en este orden. La distancia de A a B es 8 kilómetros y la distancia de B a C es 14 kilómetros.

- a) ¿Será posible decir qué pueblo está entre los otros dos?
¿Qué pueblo no está entre los otros dos?
- b) Determine la distancia de A a C mediante un dibujo.
¿Habrá más de una posibilidad?
- c) Si sabemos, además, que la distancia de A a C es de 6 kilómetros ¿qué pueblo estará entonces entre los otros dos?

3.11

Potencias y raíces

De acuerdo con lo visto anteriormente, dentro del conjunto de los números reales tiene ya sentido hablar de $\sqrt{2}$ o del número cuyo cubo es 5. Antes de estudiar sistemáticamente la cuestión conviene repasar las reglas de cálculo con potencias.

Si **a** es un número real y **n** es un número natural no nulo, el producto:

$$\begin{array}{c} a.a....a \\ (n - \text{veces}) \end{array}$$

Se representa por a^n y se denomina potencia n –ésima de **a** ó potencia de base **a** y exponente n ó, simplemente, **a** elevado a **n**. Si $n = 0$, se interpreta $a^0 = 1$.

Ejemplo 1:

$$3^4 = 3.3.3.3$$

Ejemplo 2:

$$(5.2)^3 = (5.2).(5.2).(5.2)$$

Ejemplo 3:

$$(2/3)^2 = 2/3.2/3.2/3.2/3$$

Ejemplo 4:

$$\pi^2 = \pi.\pi$$

Recordemos las siguientes propiedades de la potenciación:

Propiedades de la potenciación: si a, b son números reales y n y m son números naturales, se cumplen:

$$\text{a) } a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\text{b) } a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\text{c) } (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplo 5:

$$7^2 \cdot 7^3 = (7 \cdot 7)(7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^5$$

$$4^3 \cdot \pi^3 = (4 \cdot 4 \cdot 4)(\pi \pi \pi) = (4\pi)(4\pi)(4\pi) = (4\pi)^3$$

$$(5^2)^3 = (5 \cdot 5)(5 \cdot 5)(5 \cdot 5) = 5^6$$

$$2^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$(2^3 3^4 4)^2 = (2^3 3^4 2^2)^2 = (2^5 3^4)^2 = (2^3)^2 (3^4)^2 = 2^{10} 3^8$$

$$\frac{3^6}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

Este último caso no ejemplifica ninguna de las tres reglas anteriores, sino una nueva propiedad que puede enunciarse:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Es importante recordar que:

Si **a** es un número entero distinto de cero y **n** es un número natural no nulo, se tiene:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Entonces, las tres propiedades anteriores se conservan para expresiones enteras.

Ejemplo 6:

$$2^3 \cdot 2^{-4} = \frac{2^3}{2^4} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$7^2 7^{-3} 7^5 = 7^{2-3+4} = 7^4$$

$$2^3 3^{-3} = 2^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$(4^2)^{-1} = \frac{1}{4^2} = 4^{-2}$$

$$(11^{-2})^3 = \left(\frac{1}{11^2}\right)^3 = \frac{1}{11^6} = 11^{-6}$$

$$(5^2)^{-2} = \left(\frac{1}{5^2}\right)^2 = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$$

$$\frac{(a^3)^{-2}}{(a^{-5})^3} = \frac{a^{-6}}{a^{-15}} = a^{15} a^{-6} = a^9$$

Dado un número natural **n** no nulo y un número real positivo **a**, siempre existe un número real positivo **b** tal que:

$$b^n = a$$

Se dice que **b** es la raíz n – ésima de **a** y se escribe:

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \text{ó} \quad a^{\frac{1}{n}}$$

Las notaciones $b = \sqrt[n]{a}$ ó $a^{\frac{1}{n}}$ son equivalentes, pero es preferible la segunda representación, porque se presta a un manejo más sencillo. Salvo en casos muy simples, es aconsejable abandonar la primera notación y utilizar sólo la segunda. En los casos más usuales, con $n = 2$ ó $n = 3$ se habla de raíz cuadrada (que se representa simplemente por **b**) y cúbica respectivamente.

Las demás son raíces cuartas, quintas, etc.

Ejemplo 7:

$\sqrt[3]{7}$ es un número real positivo que cumple que $(\sqrt[3]{7})^3 = 7$ mientras no se trate de conocer su valor, la especificación anterior es suficiente. Si se desea su valor aproximado, lo mejor es disponer de una calculadora para tantear aproximaciones.

Ejemplo 8:

El número $4^{\frac{1}{5}}$ es un número real positivo tal que $\left(4^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 4$

Ejemplo 9:

La solución de la ecuación $x^4 = 8$ es, por definición $8^{\frac{1}{4}}$

De acuerdo con la notación propuesta es conveniente escribir abreviadamente:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

Lo que define, en el término central, el valor de cualquier potencia de exponente racional m/n , siempre que la base sea positiva.

Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 10:

El número $x = \left[\left(2^{\frac{1}{4}} \right)^3 \right]^4 = \left[\left(2^{\frac{1}{4}} \right)^4 \right]^3 = 2^3$ debido a que $\left(2^{\frac{1}{4}} \right)^4 = 2$
Luego efectivamente

$$\left(2^{\frac{1}{4}} \right)^3 = \left(2^3 \right)^{\frac{1}{4}}$$

Ejemplo 11:

$$\left(3^8 \right)^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{8}{12}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(2^{\frac{1}{3}} \right)^9 = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3$$

$$125^{\frac{1}{6}} = \left(5^3 \right)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(3^{-4} \right)^{\frac{1}{2}} = 3^{-2}$$

$$\left(5^8 \right)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{-3}{6}} = 5^{-\frac{1}{2}}$$

No es necesario nombrar nuevas propiedades de las potencias, basta interpretar en las propiedades dadas anteriormente que **n** y **m** pueden ser números racionales y se sigue cumpliendo que:

$$\text{a) } a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{b) } (a^n \cdot b^n) = (a \cdot b)^n \quad \text{c) } (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplo 12:

Se cumple:

$$2^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 13:

$$3^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = 2^{\frac{5}{4}}$$

Ejemplo 14:

$$\pi^{\frac{9}{10}}.\pi^{\frac{3}{5}} = \pi^{\frac{15}{10}} = \pi^{\frac{3}{2}}$$

Ejemplo 15:

$$3^2.3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{6}}$$

Ejemplo 16:

$$(3.5)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 17:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}}$$

Ejemplo 18:

$$5^{-\frac{3}{4}}.10^{\frac{3}{4}} = (5^{-3}.10^3)^{\frac{1}{4}} = \left[\left(\frac{10}{5}\right)^3\right]^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

Ejemplo 19:

$$8^{\frac{5}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{5}{3}} = 2^5$$

Ejemplo 20:

$$\frac{5^2 \sqrt[3]{5}}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^2 5^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{2}{3}} = 5^3$$

Ejemplo 21:

$$3^{\frac{1}{4}} \left(3^{\frac{3}{4}} - 3^{\frac{7}{4}} \right) = 3 - 3^2 = -6$$

Ejemplo 22:

$$5^{\frac{3}{5}} \left(5^{\frac{7}{5}} + 5^{\frac{2}{5}} \right) = 5^{\frac{10}{5}} + 5^{\frac{5}{5}} = 5^2 + 5 = 30$$

Ejemplo 23:

$$\sqrt{5^3} + \sqrt{5^5} = \sqrt{5^3} (1 + \sqrt{5^2}) = 5\sqrt{5} \cdot 6 = 30\sqrt{5}$$

Ejemplo 24:

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32} = \sqrt{2^3} + \sqrt{3^2 \cdot 2} - \sqrt{4^2 \cdot 2} = (2 + 3 - 4)\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Ejercicios 11

1. Simplificar los productos siguientes:

a) $3^3 9^4$

b) $(5^2 5^3)^3$

c) $(6^4 \cdot 36)^2$

d) $(3^2)^3 (4^3)^2$

2. Simplificar las expresiones siguientes:

a) $(10^{-1})^3 \cdot (10^2)^3$

b) $(2^3)^{-2} (5^6)^{-1}$

c) $(x^2)^{-3} (x^{-1})^{-5}$

d) $(x^3 y^2)^{-2} \cdot x^8 y^2$

3. Simplificar las expresiones siguientes:

a) $\frac{9^2 3^{-2}}{(9^{-2}) 3^{-2}}$

b) $\frac{2^5 3^2 5^4}{3^{-1} 10^4}$

c) $\frac{(a^3)^{-1} (b^{-1})^3 a^{-2}}{\left(\frac{1}{a}\right)^6 b^4}$

d) $\frac{(4^{-3})^{-2} + 16^3}{4^4}$

4. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $x^{-\frac{5}{3}} (x^2)^{\frac{1}{6}} \left(x^{-\frac{1}{12}}\right)^{-16}$

b) $3^{-1} (3^2)^5$

c) $\left(\pi^{\frac{5}{6}} - \pi^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{5}}$

d) $\sqrt[4]{\sqrt[4]{4\sqrt[3]{\sqrt{2}}}}$

5. Simplificar las expresiones siguientes:

$$\text{a) } \frac{3^{-\frac{2}{3}} 9^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{1}{6}}}$$

$$\text{b) } \frac{a^{\frac{3}{4}} b^2}{a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}}}$$

$$\text{c) } \frac{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{7}{6}}}{x^{-1} y^{13}}$$

$$\text{d) } \left(a^{\frac{1}{2}} a a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

6. Simplificar

$$\text{a) } \sqrt{28} + \sqrt{63} - 5\sqrt{7}$$

$$\text{b) } \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$$

$$\text{c) } \sqrt{2}(\sqrt{10} + \sqrt{40})$$

$$\text{d) } \sqrt{540} - \sqrt{135} - \sqrt{60}$$

3.12

Ecuaciones de segundo grado

Teniendo los números reales como la unión de los números racionales e irracionales, entonces se puede conseguir que una amplia gama de ecuaciones se resuelvan en el conjunto de los números reales. Así, en la sección anterior, vimos que todas las ecuaciones de la forma $x^n = a$, tiene solución si $a > 0$.

Una de las ecuaciones más útiles que se pueden resolver por métodos elementales es la ecuación de segundo grado, es decir las ecuaciones de la forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

Donde **A**, **B**, y **C** son números reales, con $A \neq 0$.

Antes de analizar esta ecuación conviene ver la mas sencilla de todas las de este tipo como es:

$$x^2 = p$$

Según p , caben tres situaciones:

a) Si p es un número positivo, la ecuación tiene dos posibilidades:

$$x = \sqrt{p}, \text{ y } x = -\sqrt{p}, \text{ puesto que:}$$

$$(\sqrt{p})^2 = (-\sqrt{p})^2 = p$$

b) Si $p = 0$, no hay más que una solución, que es $x = 0$.

c) Si $p < 0$, es decir negativo, como el cuadrado de cualquier número real es siempre positivo, no existe solución en este caso de la ecuación.

En resumen:

La ecuación $x^n = p$ cumple:

- a. Si $p > 0$, tiene dos soluciones $x = \sqrt[n]{p}$ y $x = -\sqrt[n]{p}$
- b. Si $p = 0$, tiene una única solución $x = 0$.
- c. Si $p < 0$, no tiene solución real.

En resumen: $x = \sqrt{p}$, y $x = -\sqrt{p}$

a) Si $p > 0$, tiene dos soluciones

b) Si $p = 0$, tiene una única solución $x = 0$.

c) Si $p < 0$, no tiene solución real.

Por lo tanto, debemos esperar que al resolver la ecuación general de segundo grado, $Ax^2 + Bx + C = 0$ ocurra algo similar y que las soluciones puedan ser dos, una o ninguna según sean los coeficientes **A, B, C**.

Siempre suponemos $A > 0$, ya que si fuese cero, la ecuación se reducirá a una ecuación de primer grado:

$Bx + C = 0$, ya vista en los números reales; y si $A < 0$ se puede multiplicar a $Ax^2 + Bx + C = 0$ por -1 se podría multiplicar toda la ecuación por -1 para pasar a considerar la ecuación $-Ax^2 - Bx - C = 0$ en la cual el coeficiente de x^2 es positivo.

Luego, se tiene:

$$Ax^2 + Bx + C = \left(\sqrt{Ax} + \frac{B}{2\sqrt{A}} \right)^2 - \frac{B^2}{4A} + C$$

Esta igualdad se comprueba desarrollando el segundo miembro y simplificando. Entonces, poniendo la ecuación en la forma:

$$\left(\sqrt{Ax} + \frac{B}{2\sqrt{A}} \right)^2 - \frac{B^2}{4A} + C = 0$$

Esta ecuación puede reducirse a la forma $X^2 = p$ si se hace:

$$x = \left(\sqrt{Ax} + \frac{B}{2\sqrt{A}} \right)$$

y

$$p = \frac{B^2}{4A} - C = \frac{B^2 - 4AC}{4A}$$

Por la discusión anterior acerca de la ecuación $X^2 = p$, se permiten dos soluciones de la ecuación original:

a) Si $B^2 - 4AC > 0$ que son:

$$X = \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A}} \text{ y, } X = -\sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A}}$$

La ecuación $X^2 = p$ permite obtener dos soluciones de la ecuación original resolviendo:

$$\sqrt{A} x + \frac{B}{2\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2\sqrt{A}}$$

$$\sqrt{A} x + \frac{B}{2\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2\sqrt{A}}$$

Y obteniendo las soluciones:

$$X_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$X_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

b) Si $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación $X^2 = 0$ sólo tiene la solución $X = 0$ y, por consiguiente, la ecuación $-Ax^2 + Bx + C = 0$ tiene como solución:

$$X = -\frac{B}{2A}$$

c) Si $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación $X^2 = p$ no tiene solución real.

En resumen:

La ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$

a) $B^2 - 4AC > 0$ tiene dos soluciones:

$$X_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$X_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

b) Si $B^2 - 4AC < 0$ tiene una única solución: $X = -\frac{B}{2A}$

c) Si $B^2 - 4AC = 0$, no tiene ninguna solución real.

Es importante observar que para aplicar esta ecuación, la **A** es el coeficiente de x^2 ; la **B** el de x ; y la **C** es el término independiente. Así, si tenemos la ecuación $7x - 9 - x^2 = 0$, se tiene que $A = -1$, $B = 7$ y $C = -9$.

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación: $x^2 + 5x + 6 = 0$.

En esta ecuación tenemos:

$A = 1$, $B = 5$ y $C = 6$. Entonces $B^2 - 4AC = 5^2 - 4(1)(6) = 1$ es positivo, existiendo dos soluciones:

$$X_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad X_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación: $x^2 - 2x + 1 = 0$

En esta ecuación se tiene:

$A = 1$, $B = -2$ y $B^2 - 4AC = 1$, entonces $B^2 - 4AC = 4 - 4(1)(1) = 0$

Luego, la única solución es:

$$X = -\frac{-2}{2 \cdot (1)} = 1$$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$

Como $A = 1$, $B = 1$ y $C = 1$, se tiene $B^2 - 4AC = 1^2 - 4(1)(1) = -3$.

Entonces esta ecuación no tiene solución real.

Es bueno observar que, si existen, la suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es:

$$x_1 + x_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} + \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -\frac{B}{A}$$

Mientras que su producto recuerde que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ es igual a:

$$\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \cdot \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B^2 - B^2 + 4AC}{4A^2} = \frac{C}{A}$$

Ejemplo 4:

Para encontrar dos números x_1 , y x_2 cuya suma sea 7 y cuyo producto sea 10, basta observar que según, dichos números deben ser la solución de la ecuación: $x^2 - 7x + 10 = 0$. Las soluciones son:

$$\frac{-7 + \sqrt{7^2 - 4(10)}}{2} = 5 \qquad \frac{-7 - \sqrt{7^2 - 4(10)}}{2} = 2$$

Y efectivamente, $2 + 5 = 7$ y $2 \cdot 5 = 10$.

Ejercicios 12

1. Resolver la ecuación $12x^2 - 5x - 2 = 0$
2. Resolver la ecuación $3x^2 - 5x + 3 = 0$
3. Resolver la ecuación $4x^2 + 4x + 1 = 0$
4. Halle la suma y el producto de las soluciones de la ecuación.
Resolver la ecuación $10x^2 + 10x + 6 = 0$
5. Resuelva la ecuación $x^4 + x^2 - 6 = 0$

6. En un rato de ocio, Juan recuerda que hace 20 años fue a la primaria y observa que si multiplica la edad que entonces tenía por su edad actual, su producto es 684. ¿Qué edad tiene Juan?
7. Un rectángulo cuya área es 198 cm^2 tiene lados que se diferencian en 7 cm. Halle las longitudes de sus lados.
8. Halle las longitudes de los lados de un rectángulo de 38 metros de perímetro y 84 m^2 de área.
9. El plano de un tesoro indica que este se encuentra enterrado bajo la recta que une la puerta de una casa con un árbol, en un punto tal que el producto de la distancia a la casa por la distancia al árbol (en metros) es 52. Medida la distancia de la casa al árbol, resulta que hay 17 m. ¿En qué lugar hay que cavar?
10. Varios compañeros de una empresa quieren hacer un regalo de bodas a un amigo y han pensado comprar un electrodoméstico que cuesta \$1260000. Convencen a dos compañeros más de que participar en el regalo, con el fin de pagar \$4000 menos cada uno. ¿Cuánto tiene que pagar finalmente cada uno de los participantes en el regalo?

3.13

Exponenciales y logaritmos

3.13.1 Exponencial

En la sección 3.7 y 3.8 se ha definido para cualquier base $a > 0$ y cualquier exponente racional r . No hay nada que impida seguir adelante y considerar potencias de exponente irracional. Por ejemplo, para dar sentido a expresiones como $\pi^{\sqrt{2}}$, basta considerar la sucesión de aproximaciones racionales:

$$3,14^{1,41} \approx 5,0 < \pi^{\sqrt{2}} < 5,1 \approx 3,15^{1,42}$$

$$3,14^{1,414} \approx 5,04 < \pi^{\sqrt{2}} < 5,05 \approx 3,142^{1,415}$$

$$3,1415^{1,4142} \approx 5,047 < \pi^{\sqrt{2}} < 5,048 \approx 3,1416^{1,4143}$$

$$3,14159^{1,41421} \approx 5,0474 < \pi^{\sqrt{2}} < 5,0475 \approx 3,1416^{1,41422}$$

Las potencias que aparecen en los extremos de cada fila no dan resultados racionales, pero se truncan en la primera cifra decimal que no coincida en ambas para obtener aproximaciones racionales. Aunque lentamente, el esquema se cierra hacia un valor que define **a**.

Este mismo procedimiento se puede usar en cualquier caso para definir:

El símbolo a^x , donde $a > 0$ es un número real y x es un número real cualquiera, se denomina *a elevado a x, potencia de base a exponente x o exponencial de x con base a*

Observe que las funciones exponenciales son de la forma:

Base constante ^{exponente variable}

Así, por ejemplo:

$$2^x, 3^x, 5^x, 10^x$$

Es natural que si $a^x > 0$, se cumplen también las propiedades de los exponentes:

$$\text{a) } a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{b) } a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \quad \text{c) } (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

El nombre de exponencial de x para a^x se debe a que su uso más frecuente es manteniendo una base fija mientras que el exponente varía, es decir que lo importante es entonces el exponente. Es muy común usar la base con el número 10 (base de nuestro sistema decimal) y es

por esto que en la calculadora encontramos la tecla 10^x ; por razones que más adelante en el su curso de precálculo se justificará, también se usa como base el número irracional $e = 2,71828184\dots$. Por esta razón encontramos en la calculadora la tecla e^x .

Ejemplo 1:

Recordemos la célebre historia según la cual, el inventor del ajedrez pidió al rey como pago de su invención 1 grano de trigo por el primer cuadro, 2 por el segundo cuadro, 4 por el tercer cuadro, 8 por el cuarto, etc., hasta cubrir los 64 cuadros del tablero. Al rey, poco hábil en matemáticas, le pareció justo; pero cuando fue a pagar su contador descubrió que la cosecha del reino durante numerosos años no le permitiría cubrir su deuda. El número de granos necesarios es:

$$18446744073709551615$$

Y aunque cada grano pesa 0,1 gramos, harían falta tres billones de toneladas para cubrir el precio.

En este ejemplo se puede precisar el comportamiento exponencial de la petición del inventor, mediante la siguiente tabla:

1 cuadro	2 cuadro	3 cuadro	4 cuadro	5 cuadro	6 cuadro	7 cuadro
1 grano	2 granos	4 granos	8 granos	16 granos	32 granos	64 granos
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

Es decir, que si se quiere saber el número de granos en términos de cuadro correspondiente, este será:

$$N = 2^{n-1}$$

Ejemplo 2:

Para ver la utilidad del concepto de exponencial, podemos imaginarnos una población biológica, por ejemplo de alces. Es natural pensar que el tamaño de la población se multiplica cada año por un cierto factor y que se desarrolla de acuerdo con la población inicial; así, si se introducen 100 alces, cada uno de un año de edad, en una bioreserva, el número N de alces vivos después de t años se predice mediante $N = 100(0,9)^t$.

Calcule el número de animales vivos después de:

- a) Un año b) Cinco años c) Diez años

a) Para saber la población después de un año, basta reemplazar t por uno en la expresión $N = 100(0,9)^t$ con una calculadora. Se obtiene que $N = 100(0,9)^1 = 100(0,9) = 90$.

b) Para cinco años, reemplaza t por cinco en $N = 100(0,9)^5 = 100(0,59049) = 59$

c) Para diez años, se procede de la misma forma pero con t igual a 10, luego $N = 100(0,9)^{10} = 100(0,3486784) = 35$.

Se puede elaborar una tabla que muestre el comportamiento de la población de alces.

Ejemplo 3:

Consideremos ahora una población de seres humanos que crece de acuerdo con el factor 1,05. Entonces, al cabo de un año el tamaño de la población se ha multiplicado por 1,1; al cabo de 3 años, por 1,15; en general, al cabo de un tiempo t se ha multiplicado por $1,05^t$.

En la siguiente tabla podemos ver algunos valores.

T	10	30	50	100	150	200	250
$1,05^t$	1,628	4,32	11,467	131,5	1507,9	17292,6	198301

Se ve claramente, que si la población crece a un ritmo del 5% anual, en sólo 150 años la población inicial se multiplica por 1507,9; y en 200 años, por 17292,6. Esto es lo que se llama un crecimiento exponencial y resulta evidente que es insostenible a mediano plazo.

3.13.2 Logaritmos

Cuando se tiene un exponente siempre aparecen tres expresiones importantes:

$$3^4 = 81$$

La base, que es tres, el exponente que es cuatro y la potencia que es 81. El conocer dos de estas expresiones nos permite siempre generar una operación matemática, así:

Si se conoce la base y el exponente y se quiere hallar la potencia, entonces aparece la operación anteriormente estudiada: la potenciación. Es decir, que 81 es la potencia 4 de 3.

De manera similar, si se conoce el exponente 4 y la potencia 81, se puede hallar la base mediante una operación llamada radicación es decir:

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

Ahora bien, si se conoce la base 3 y la potencia 81 y queremos averiguar el exponente, entonces aparece el logaritmo de un número. Esto es ¿a qué número debo elevar 3 para obtener 81?

Este número es 4 y $4 = \log_3 81$.

En resumen, el problema consiste en determinar, a partir de una base $a > 0$, y de un resultado $y > 0$, el número real x tal que $a^x = y$.

Esto es:

Para $a > 0$, $y > 0$, el número real x tal que

$$a^x = y$$

se denomina a x , el logaritmo de base a de y , y se representa:

$$x = \log_a y$$

Por consiguiente:

$$a^{\log_a y} = y$$

$$\log_a a^x = x$$

Los logaritmos se pueden considerar como una operación inversa a la exponenciación de base **a**. Para cálculos prácticos, se usan casi exclusivamente los logaritmos de base 10 y de base **e** los cuales se encuentran en la calculadora, rotulados por **log** y **ln**, respectivamente.

Ejemplo 4:

$\log_{10} y$ es el número al que hay que elevar 10 para obtener **y**. Así:

$$\log_{10} 1000 = 3 \text{ ya que } 10^3 = 1000$$

$$\log_{10} 1000000 = 6 \text{ ya que } 10^6 = 1000000$$

$$\log_{10} 1013 = 3 \text{ Ya que } 10^3 = 1000$$

El crecimiento de los logaritmos en base 10, es decir, $\log_{10} y$, es muy lento, más precisamente si **y** tiene como parte entera $n - 1$. Por ejemplo:

Ejemplo 5:

$$\log_{10} 213 = 2,3283796....$$

$$\log_{10} 2130 = 3,3283796....$$

$$\log_{10} 500 = 2,69897$$

$$\log_{10} 999 = 2,9995655....$$

Si tomamos ahora logaritmos de números cerca de cero, se tiene:

$$\text{Log}_{10} 0,1 = -1$$

$$\text{Log}_{10} 0,001 = -3$$

$$\text{Log}_{10} 10^{-7} = -7.$$

El decrecimiento de $\log_{10} y$ cerca de cero es, concretamente, si y tiene n ceros después del punto decimal y antes de las primeras cifras significativas, $\log_{10} y$ tiene como parte entera $-n$, así:

Ejemplo 6:

$$\text{Log}_{10} 0,0213 = -1,67162033\dots$$

$$\text{Log}_{10} 0,00213 = -2,6716703\dots$$

$$\text{Log}_{10} 0,05 = -1,301032\dots$$

$$\text{Log}_{10} 0,005 = -2,301032\dots$$

Las cifras decimales que proporciona la calculadora para los números considerados muestran una curiosa coincidencia: las de 0,0213 son las mismas que las de 0,00213. Esto se debe a las siguientes propiedades generales que se exponen a continuación.

3.13.3 Propiedades de los logaritmos

Para cualquier base $a > 0$ y siempre que x, y sean números positivos se cumple:

$$1) \text{Log}_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$2) \text{Log}_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$3) \text{Log}_a x^y = y \log_a x$$

En efecto:

$$\log_a(xy) = \log_a(a^{\log_a x} a^{\log_a y}) = \log_a a^{(\log_a x + \log_a y)} = \log_a x + \log_a y$$

Análogamente:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = \log_a a^{(\log_a x - \log_a y)} = \log_a x - \log_a y$$

y

$$\log_a x^y = \log_a \left(a^{(\log_a x)^y}\right) = \log_a a^{y \log_a x} = y \log_a x$$

Ejemplo 7:

- a) $\log_{10} 213 = \log_{10} (2,13 \cdot 100) = \log_a 2,13 + \log_a 100 = 2 + \log_{10} 2,13$
- b) $\log_{10} 2130 = \log_{10} 2,13 \cdot 10000 = 3 + \log_{10} 2,13$
- c) $\log_{10} 0,0213 = \log_{10} (2,13 \cdot 10^{-2}) = -2 + \log_{10} 2,13$
- d) $\log_{10} 0,00213 = -3 + \log_{10} 2,13$

Esto es la justificación de los ejemplos dados en 6.

Ejemplos 8:

Para calcular $100^{1/5}$ se puede hacer de la siguiente forma:

$$\log_{10} 100^{1/5} = 1/5 \log_{10} 10^2 = 2/5 \log_{10} 10 = 2/5$$

$$\text{Luego } 100^{1/5} = 10^{0.4} = 2,51188 \dots$$

Ejemplo 9:

Para calcular:
$$\frac{5^{12} \cdot 7^{\frac{3}{4}}}{2^{26} \cdot 11^{\frac{5}{3}}}$$

Por las propiedades anteriores, el logaritmo en base 10 es:

$$\log_{10} \left(\frac{5^{12} \cdot 7^{\frac{3}{4}}}{2^{26} \cdot 11^{\frac{5}{3}}} \right) = 12 \log_{10} 5 + \frac{3}{4} \log_{10} 7 - 26 \log_{10} 2 - \frac{5}{6} \log_{10} 11 = 12.0,69897 +$$

$$\frac{3}{4} \cdot 0,845098 - 26.0,30103 - \frac{5}{3} \cdot 1,04139278 = -0,5409707$$

Luego, el valor buscado es:

$$\frac{5^{12} \cdot 7^{\frac{3}{4}}}{2^{26} \cdot 11^{\frac{5}{3}}} \approx 10^{-0,5409707} \approx 0,2877592$$

Ejemplo 10:

Observe que no hay manera operativa de expresar logaritmos de una suma o una diferencia. Así, si se trata de calcular $67^{\frac{1}{7}} + 31^{\frac{3}{5}}$ no hay más remedio que calcular cada sumando y luego efectuar la suma:

$$67^{\frac{1}{7}} = 10^{\log_{10} 67^{\frac{1}{7}}} = 10^{\frac{1}{7} \log_{10} 67} \approx 10^{0,2028972} \approx 1,5955014$$

$$31^{\frac{3}{5}} = 10^{\frac{3}{5} \log_{10} 31} \approx 10^{0,894817} \approx 7,8490486$$

Luego,

$$67^{\frac{1}{7}} = 10^{\log_{10} 67^{\frac{1}{7}}} = 10^{\frac{1}{7} \log_{10} 67} \approx 10^{0,2028972} \approx 1,5955014$$

Hay una fórmula sencilla que relaciona los logaritmos de diferente base. De hecho, como $x = a^{\log_a x}$, si se toman logaritmos en cualquier otra base b, se tiene:

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \log_b a$$

O bien:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Esta fórmula permite calcular logaritmos en una base arbitraria a partir de los calculados en una base determinada; por ejemplo, $b = 10$.

Ejemplo 11:

$$\log_{12} 27 = \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 12} \approx \frac{1,431363}{1,079181} \approx 1,326342$$

$$\log_2 1000 = \frac{\log_{10} 1000}{\log_{10} 2} \approx \frac{3}{0,30103} \approx 9,965784$$

Esta fórmula justifica por qué las calculadoras no necesitan diversas teclas para distintos $\log_a x$; sencillamente porque los resultados que se quieren calcular serían:

$$\frac{\log_{10} x}{\log_{10} a}$$

Los logaritmos permiten expresar la relación que liga las diversas exponenciales entre sí:

Si a y b son dos números reales positivos, se cumple:

$$a^x = b^{x \log_b a}$$

Ejemplo 12:

$$1.05^t = 2^{t \log_2 1.05} \approx 2^{0,07t} \approx 2^{\frac{t}{14,2}} \quad \text{ya que } \log_2 1,05 \approx \frac{1}{14,2}$$

$$2^x = 10^{x \log_{10} 2} \approx 10^{0,030103x} \quad \text{ya que } \log_{10} 2 \approx 0,030103$$

$$10^x = e^{x \log_e 10} \approx e^{2,302585x} \quad \text{ya que } \log_e 10 \approx 2,302585$$

Ejercicios 13

1. Calcule $\log_a 1$, $\log_a a$, $\log_a a^2$

2. Escriba en forma logarítmica la expresión dada:

a) $4^2=64$

b) $12^2=144$

c) $5^4=625$

3. Evalúe los siguientes logaritmos:

a) $\log^2 8$

b) $\log_3 9$

c) $\log_5 (1/25)$

4. Use la propiedad de los logaritmos para calcular:

a) $\log_4 4^3$

b) $\log_e e^x$

c) $2\log^2 4$

d) $e^{\log_e x}$

e) $\log_2 (4.16)$

f) $\log_{10} (100.10^3)$

g) $\log_3 (9/27)$

h) $\log_{10} (10/1000)$

5. Con la ayuda de una calculadora, calcular el logaritmo en base 10 aproximadamente.

a) $\frac{7^{\frac{5}{3}} \cdot 10^{\frac{3}{7}}}{3^{\frac{1}{4}}}$

b) $9^{-3,8} 11^{5,21}$

c) $4^{7,53} + 5^{-0,49}$

d) $0,32^{2,3} - 0,18^{-4,65}$

6. Como se sabe $\log_a (x+y)$ no coincide con $\log_a x + \log_a y$. Sin embargo dado que $x > 0$, ¿se puede determinar y para que sea $\log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$?

7. Simplificar:

$$\text{a) } a^{\log_b (\log_b a) / \log_b a} \quad \text{b) } x^{\log_a y} y^{\log_a \frac{1}{x}} \quad \text{c) } \log_a \left[\log_a a^{(a^2)} \right]$$

8. Dados a y b hallar el valor de x que verifica:

$$\text{a) } \log_x a + \log_x b = 1 \quad \text{b) } \log_a x + \log_b x = 1$$

9. Resolver la ecuación $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

10. Resolver la ecuación $4 \cdot 2^{(x^2)} = 8^x$

3.14 Evaluación 3

Conocimientos básicos sobre los números reales, sus operaciones y aplicaciones

1. ¿Cuál de los siguientes números es irracional?

- a) 3,1415
- b) $\sqrt{3}$
- c) 2,13333...
- d) 0,353535...

2. ¿Cuál de los siguientes números es irracional?

- a) 3,414424443444444444444444544...
- b) 4,4141414141414...
- c) 1.414241424141424141...
- d) 202,02020202...

3. Si x e y son números reales tales que $x < y$, la desigualdad $x - 1/5 < y - 2/5$:

- a) Es cierta.
- b) Es falsa.
- c) Depende de los valores de x .
- d) Depende de los valores de y .

4. Si x e y son números reales tales que $x < y$, la desigualdad $x - 1/5 < y - 2/5$

- a) Es cierta.
- b) Es falsa.
- c) Depende de los valores de x e y .
- d) Depende de los valores de x .

5. Si x e y son números reales tales que $x < y$ la desigualdad $x - 2/5 < y - 1/5$

- a) Es cierta.
- b) Es falsa.
- c) Depende de los valores de x e y .
- d) Depende de los valores de y .

6. Si $x < y$ son números reales tales que $x < y$ la desigualdad $x + 1/2 < y + 1/4$

- a) Es cierta.
- b) Es falsa.
- c) Depende de los valores de x e y .
- d) Depende de los valores de y .

7. Si x e y son números reales tales que $x < y$, la desigualdad $-2x < -2y$

- a) Es cierta.
- b) Es falsa.
- c) Depende de los valores de x e y .
- d) Depende de los valores de x .

8. a^3a^4 es igual a:

- a) a^{12}
- b) a^7
- c) a^{-1}
- d) a^1

9. $x^{-2}x^5$ es igual a:

- a) x^3
- b) x^{-10}
- c) $(x^{-2})^5$
- d) $(x^{-5})^2$

10. $x^{-3}x^{-2}$ es igual a:

- a) x^2x^3
- b) x^{-5}
- c) x^6
- d) x^{-6}

11. $3k7k$ es igual a:

- a) 10^k
- b) 212^k
- c) 21^k
- d) 102^k

12. $6^n.3^n$ es igual a:

- 18^{2n}
- 2^n3^{2n}
- 2.3^n
- $2^n.3^n$

13. 4^p6^p es igual a:

- a) $2^{3p}.3^p$
- b) 10^p
- c) 3.23^p
- d) 2.32^p

14. 32^n es igual a:

- a) 2^{5n}
- b) $4^{n/2}8^{n/2}$
- c) 4.8^n
- d) 8.4^n

15. $36^p/9^p$ es igual a:

- a) 4^{2p}
- b) 2^{2p}
- c) 22^p
- d) 2^{-2p}

16. $18^r/3^r$ es igual a:

- a) $6^r/3^{r-1}$
- b) $2^r 3^r$
- c) 6
- d) $1/6$

17. $15^{-r} 5^r$ es igual a:

- a) 3^r
- b) 3^{-r}
- c) 3
- d) 5

18. $(a^2)^3$ es igual a:

- a) a^5
- b) a^6
- c) a^8
- d) a

19. $(x^5)^{-2}$ es igual a:

- a) x^{-10}
- b) x^{10}
- c) x^3
- d) x^2

20. $(x^{-4})^3$

- a) x^1
- b) x^{-7}
- c) x^{-12}
- d) x^{-1}

21. $(a^6)^2$ es igual a:

- a) $(a^4)^3$
- b) a^8
- c) a^{-12}
- d) a^7

22. $(b^2)^{-2} (b^3)^2$ es igual a:

- a) b^2
- b) b^{10}
- c) b^5
- d) b^6

23. $a^5/(a^2)^4$ es igual a:

- a) $1/a^2$
- b) a^{-3}
- c) $1/a$
- d) $1/a^2$

24. $(x^{-2})^{-3}/(x^3)^{-2}$ es igual a:

- a) x^{13}
- b) x^6
- c) 1
- d) x

25. $3^2/(3^4)^2$ es igual a:

- a) 3^6
- b) $1/3^6$
- c) 3^{-4}
- d) 3

26. $(4^2)^2/2^6$ es igual a:

- a) 1
- b) 8
- c) 2^2
- d) 2

27. $6^3/(2^4 3^2)$ es igual a:

- a) 2.3
- b) 1
- c) $3/2$
- d) $2/3$

28. $12^4/18^4$ es igual a:

- a) $1/6^2$
- b) $2^4 3^{-4}$
- c) $2/3$
- d) $3/2$

29. Si $0 < a < 1$, entonces se cumple:

- a) $a^2 > a$
- b) $a^2 < a$
- c) $a^2 > 1$
- d) $a^2 < 1$

30. Si $x^n = y$, entonces $y^{1/n}$ es igual a:

- a) y^{-n}
- b) x
- c) $x^{1/n}$
- d) x^n

31. $9^{1/3}$ es igual a:

- a) $3^{2/3}$
- b) 3
- c) 9^{-3}
- d) $3^{1/3}$

32. $12^{1/2}$ es igual a:

- a) $2^{1/4} 6^{1/4}$
- b) $4.3^{1/2}$
- c) $2.3^{1/2}$
- d) $2^{1/2}.3$

33. $2^{9/12}$ es igual a:

- a) $8^{1/4}$
- b) $2^9/2^{12}$
- c) 2^{-3}
- d) 4^2

34. $9^{5/2}$ es igual a:

- a) 9^3
- b) $9^5/9^2$
- c) 3^5
- d) 3^2

35. $(a^{2/3})^{3/4}$ es igual a:

- a) $a^{1/2}$
- b) $a^{17/12}$
- c) a^{-6}
- d) a

36. $x^{5/3}x^{1/6}$ es igual a:

- a) $x^{5/18}$
- b) $x^{1/3}$
- c) x^{1176}
- d) $x^{5/6}$

37. $a^{3/4}/a^{1/2}$ es igual a:

- a) a
- b) $a^{1/4}$
- c) $a^{3/2}$
- d) a^4

38. $(a^3)^{-5/6}$

- a) $a^{-5/2}$
- b) $a^{13/6}$
- c) $1/a^{10}$
- d) $a^{1/2}$

39. $27^{1/2} - 12^{1/2} + 75^{1/2}$ es igual a:

- a) $90^{1/2}$
- b) $\sqrt{102}$
- c) $6.3^{1/2}$
- d) $5^{1/2}$

40. $128^{1/3} + 2.54^{1/3} - 4.16^{1/3}$ es igual a:

- a) $300^{1/3}$
- b) $2 \cdot 2^{1/3}$
- c) $1584^{1/2}$
- d) $3 \cdot 3^{1/2}$

41. Si **a**, **b**, y **c** son números reales, la propiedad:

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

Se cumple:

- a) Cualquiera que sea **c**.
- b) Sólo cuando **c** es positivo.
- c) Sólo cuando **c** es negativo.
- d) Sólo cuando **c** sea cero.

42. La ecuación $-5x + 3x^2 = 12$ tiene:

- a) Dos soluciones reales distintas.
- b) Una única solución real.
- c) Ninguna solución real.
- d) Dos soluciones racionales diferentes.

43. La ecuación $-5 - 2x^2 + 6x = 0$ tiene:

- a) Dos soluciones reales enteras distintas.
- b) Una única solución real.
- c) Ninguna solución real.
- d) Dos soluciones reales irracionales diferentes.

44. La ecuación $8x^2 + 4 = x$ tiene:

- a) Dos soluciones reales enteras distintas.
- b) Una única solución real.
- c) Ninguna solución real.
- d) Dos soluciones reales irracionales diferentes.

45. La ecuación $36x^2 + 25 - 66x = 0$ tiene:
- a) Dos soluciones reales enteras distintas.
 - b) Una única solución real.
 - c) Ninguna solución real.
 - d) Dos soluciones reales irracionales diferentes.
46. La ecuación $x^2 + x = 6$ tiene dos soluciones cuyo cociente es:
- a) $-3/2$
 - b) $3/2$
 - c) -2
 - d) 2
47. La ecuación $-16x + 15 + 4x^2 = 0$ tiene dos soluciones cuyo diferencia es:
- a) $3/4$
 - b) 3
 - c) 1
 - d) -1
48. La suma de las soluciones de las ecuaciones $-3x + 8 = 2x^2$ es igual a:
- a) $3/2$
 - b) 3
 - c) 1
 - d) -1
49. El producto de las soluciones de la ecuación $3x^2 = 5x - 2$ es igual a:
- a) 2
 - b) $-1/3$
 - c) $2/3$
 - d) -2

50. $\sqrt[3]{16+36}$ es igual a:

- a) $(\sqrt[3]{4+6})^2$
- b) $2\sqrt[3]{13}$
- c) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{6}$
- d) 10

51. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$ es igual a:

- a) $\sqrt[5]{3}$
- b) $\sqrt[6]{3}$
- c) $3^{3/2}$
- d) $3^{1/3}$

52. $\sqrt[3]{0.0025}$ es igual a:

- a) $5 \cdot 10^{-1}$
- b) $5 \cdot 10^{-2}$
- c) $5 \cdot 10^{-3}$
- d) $5 \cdot 10^{-4}$

53. $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}$ es igual a:

- a) $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{3}}$
- b) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{6}}$
- c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$
- d) $\sqrt[3]{6}$

54. La ecuación $(x-1)^2+3=0$, tiene:

- a) Dos soluciones enteras distintas.
- b) Dos soluciones racionales distintas.
- c) Una única solución real.
- d) Ninguna solución.

55. La suma de las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$ es igual a:

- a) $-3 + \sqrt{17}$
- b) 3
- c) -3
- d) 2

56. Si **a**, **b** y **c** son números reales, la propiedad:
Si $a > b$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$

Se cumple:

- a) Para todo valor de c .
- b) Sólo cuando c es positivo.
- c) Si c es igual a cero.
- d) Ningún número real.

57. ¿Cuánto vale la mayor de las soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

58. Si **a** es un número real, la desigualdad:
 $a^2 > a$

se cumple:

- a) Cualquiera que sea a .
- b) Sólo cuando $a > 0$.
- c) Sólo cuando $a < 0$ ó $a > 1$.
- d) $a > 1$.

59. Si a y b son dos números reales tales que:

$$0 < a < b$$

Se cumple:

$$a^2 > b^2$$

$$a^2 < b^2$$

$$a^2 \geq b^2$$

$$a^2 \leq b^2$$

60. El número $\sqrt{125} - \sqrt{20}$ es igual a:

a) $\sqrt{105}$

b) $3\sqrt{5}$

c) $(125-20)^{1/2}$

d) $\sqrt{5}$

61. El producto $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$ es igual a:

a) 1

b) $2\sqrt{2}$

c) -1

d) $\sqrt{2}$

62. El número $\sqrt{216} - \sqrt{150}$ es igual a:

a) $\sqrt{6}$

b) 6

c) $6\sqrt{6}$

d) - 1

63. El producto $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ es igual a:

a) 1

b) -1

c) $2\sqrt{3}$

d) $-2\sqrt{3}$

64. El número $(1 - \sqrt{2})^2$ es igual a:

- a) 1
- b) 3
- c) $3 - 2\sqrt{2}$
- d) 2

65. Al simplificar dejando los exponentes positivos, la expresión

$$\left[\left(\frac{x^{-2}y^3t}{x^{-3}y^{-2}t^2} \right)^2 \right]^{-1} \text{ es igual a:}$$

- a) $\frac{t^3}{x^2y^{10}}$
- b) $\frac{t^4}{x^2y^{10}}$
- c) $\frac{t^2}{x^2y^{10}}$
- d) $\frac{t^3}{x^2y^8}$

66. Al simplificar dejando los exponentes positivos, la expresión

$$\left(\frac{2^2x^2y^0}{8x^{-1}} \right)^{-2} \left(\frac{x^{-3}}{x^{-5}} \right)^3 \text{ es igual a:}$$

- a) 4
- b) x
- c) -4
- d) -x

67. Al simplificar dejando los exponentes positivos, la expresión

$$\left(\frac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}} \right)^{-1} \text{ es igual a:}$$

a) $\frac{x-y}{y}$

b) $\frac{x-y}{x}$

c) $\frac{y-x}{y}$

d) $\frac{x}{y}$

68. El valor de la expresión $\log_3 9=2$ en forma exponencial es:

a) $3^2=9$

b) $2^3=9$

c) $9^2=81$

d) $2^9=512$

69. Al reescribir la expresión exponencial $25 = 5^2$ en forma logarítmica es igual a:

a) $5 = \log_2 25$

b) $2 = \log_5 25$

c) $25 = \log_2 5$

d) $2 = \log_{25} 5$

70. El valor exacto de x en la expresión $\log 3x^2 - \log 9x = 2$ es:

a) 200

b) 100

c) 300

d) 400

Solución a los Ejercicios del Capítulo

Ejercicios 1

1. El número 132 es divisible por 3, ya que las sumas de sus cifras $1 + 2 + 3 = 6$ es divisible por 3.
2. No es divisible; al dividir 239 entre 13 la división no es exacta, $239 = 18 \cdot 13 + 5$
3. El número 143 es compuesto; en efecto $143 = 11 \times 13$.
4. El número 111 es compuesto, en efecto, $111 = 3 \times 37$.
5. Una factorización no trivial de 91 es $7 \cdot 13$.
6. Un número es divisible por 2 si la última cifra es par; por lo tanto, son divisibles por 2 los números 126, 210, 476, 764, 68, y 538.
7. Para que un número sea divisible por 3 la suma de sus cifras debe ser divisible por 3; por lo tanto, son divisibles por 3 los números 129, 210, 1035, 201, 219, 231, 126, y 63.
8. Los números divisibles por 5 los números: 210, 1035 y 125.
9. Son divisibles por 4 los números: 560, 80, 200, 68, 212 y 48.
10. Son divisibles por 6, los números: 126, 210, 102, 48.

11. (Solución de problemas)

- a) $72 \times 5 = 360$ veces
 b) $72 \times 60 = 4320$
 c) $72 \times 1440 = 103680$ veces
 d) $72 \times 103680 = 37324800$ veces
 e) $37324800 \times 80 = 2985984000$ veces

Ejercicios 2

1. Los factores primos de 252 son 2 (dos veces), 3 (dos veces) y 7.

$$\begin{array}{r|l}
 252 & 2 \\
 126 & 2 \\
 63 & 3 \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 &
 \end{array}$$

Luego, la descomposición es $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

2. Los factores primos de 2002 son 2, 7, 11 y 13.

$$\begin{array}{r|l}
 2002 & 2 \\
 1001 & 7 \\
 143 & 11 \\
 13 & 13 \\
 1 &
 \end{array}$$

3. Los factores primos de 323 son 17 y 19.

$$\begin{array}{r|l}
 323 & 17 \\
 19 & 19 \\
 1 &
 \end{array}$$

4. Los factores primos de 672 son 2 (cinco veces), 3 y 7.

$$\begin{array}{r|l}
 672 & 2 \\
 336 & 2 \\
 168 & 2 \\
 84 & 2 \\
 42 & 2 \\
 21 & 7 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

5. Los factores primos de 1210 son 2, 5, 11 (dos veces)

$$\begin{array}{r|l}
 1210 & 2 \\
 605 & 5 \\
 121 & 11 \\
 11 & 11 \\
 1 &
 \end{array}$$

Ejercicios 3

1. Si se aplica el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{r}
 51 \quad \overline{)34} \\
 - \underline{34} \\
 17
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 34 \quad \overline{)17} \\
 - \underline{34} \\
 0
 \end{array}$$

Se tiene $m.c.d(51, 34) = m.c.d(34, 17) = 17$

2. Si se aplica el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{r}
 242 \quad \overline{)110} \\
 - \underline{220} \\
 22
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 110 \quad \overline{)22} \\
 - \underline{110} \\
 0
 \end{array}$$

Se tiene: $m.c.d(242,110) = m.c.d(110,22) = 22$

3. Si se aplica el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{r} 306 \quad \overline{)126} \\ -252 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 126 \quad \overline{)54} \\ -108 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \quad \overline{)18} \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$$

Si tiene $m.c.d(306,126) = m.c.d(126,54) =$
 $m.c.d(54,18) = 18$

4. Si se aplica el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{r} 65 \quad \overline{)25} \\ -50 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \quad \overline{)15} \\ -15 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \quad \overline{)10} \\ -10 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \quad \overline{)5} \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$$

5. Si se aplica el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{r} 64 \quad \overline{)32} \\ 64 \\ \hline 0 \end{array}$$

6. Si a y b son primos el único factor común es 1, luego $m.c.d(a,b) = 1$
7. Se pueden dividir en pedazos de 4 cm si $m.c.d(20,24,30) = 4$, y efectivamente 4 es el máximo común divisor de dichos números.
8. El $m.c.d(80,75,60) = 5$, es decir a cada estudiante le toca 5 esferos. Ahora el número de esferos repartidos es: $80 + 75 + 60 = 215$, luego el total de estudiantes es 215 dividido en 5, lo cual es igual a 43 estudiantes en total.

Ejercicios 4

1. Como $6 = 2 \cdot 3$ y $21 = 3 \cdot 7$, se tiene que $m.c.m(6,21) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$
2. Puesto que $24 = 2^3 \cdot 3$ y $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, se tiene que $m.c.m(24,42) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$.
3. Dado que el $m.c.m(a,b) =$

Si el producto de dos números es 104 y su máximo común divisor es 2, entonces el mínimo común múltiplo será $104/2 = 52$.

4. Primero se calcula el máximo común divisor:

$$\begin{array}{r} 63 \quad \overline{)25} \\ -50 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \quad \overline{)13} \\ -13 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \quad \overline{)12} \\ -12 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \quad \overline{)1} \\ -12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Luego el $m.c.d(63,25) = 1$, y por lo tanto, $m.c.m(63,25) = 63 \times 25 = 1575$.

5. Primero se calcula el máximo común divisor:

$$\begin{array}{r} 64 \quad \overline{)32} \\ -64 \\ \hline 2 \end{array}$$

Luego $m.c.d(64,32) = 32$ y, por lo tanto, $m.c.m(64,32) =$

6. La distancia que se debe medir exactamente con estas tres reglas es el $m.c.m(2,5,8) = 2^3 \cdot 5 = 40\text{cm}$.
7. La menor cantidad de bombones que se debe repartir entre estas tres clases es el $m.c.m(20,25,30) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 = 300$ bombones, y el total de estudiantes es $20 + 25 + 30 = 75$, es decir que cada alumno recibirá $300/75 = 4$ bombone.

Respuestas a la Evaluación - Capítulo 1

1. La respuesta correcta es la b. No son dos números compuestos porque el 7 no es compuesto. No son números primos porque 20 no es primo. Son primos entre sí porque no tienen factores comunes.
2. La respuesta correcta es b. Si $c = a.b$, c es múltiplo de a y de b .
3. La respuesta correcta es b. Si $c = a.b$, a y b son factores de c .
4. La respuesta correcta es a. Si el producto de dos números siempre es múltiplo de 4 no puede asegurarse que siempre, uno de los factores sea múltiplo de 4; por ejemplo $2.6 = 12$ es múltiplo de 4, pero ni 2 ni 6 son múltiplos de 4. Tampoco puede asegurarse que siempre, los dos factores sean pares, por ejemplo $3 \times 8 = 24$ es múltiplo de 4. Sin embargo, es seguro que al menos uno de los factores será par.
5. La respuesta correcta es la c. Las descomposiciones $54 = 6.9$ y $54 = 3.6.3$ no son factores primos, puesto que 6 no es primo.
6. La respuesta correcta es la b. Si el producto de dos números es divisible por 7, por ser primo, alguno de los números le contendrá como factor. Si el producto es divisible por 7, no puede asegurarse que, siempre, los dos números sean divisibles por 7. Por ejemplo, $42.5 = 210$ es divisible por 7 y sólo uno de los factores los es. Tampoco puede asegurarse que la suma de los factores sea divisible por 7, el ejemplo anterior lo muestra: el producto $42.5 = 210$ es divisible por 7, pero la suma de los factores $42 + 5 = 47$ no es divisible por 7.

7. La respuesta correcta es b. Si el número es cuadrado de un número p , tendrá tres divisores: 1, p , y p^2 . El recíproco también es cierto, puesto que si tuviera dos factores distintos, admitiría al menos 4 divisores.
8. La respuesta correcta es c. No son primos entre sí porque tienen factores comunes diferentes de 1. No son primos porque 115 no es primo. Uno es múltiplo del otro porque 23 divide a 115.
9. La respuesta correcta es a. Si $m.c.d(a,b) = 2$, los dos números son pares ya que tienen a 2 como divisor.
10. La respuesta correcta es b. Puesto que $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ y $196 = 2^2 \cdot 7^2$, se tiene $m.c.d(70, 196) = 2 \cdot 7 = 14$.
11. La respuesta correcta es a. Por el algoritmo del cálculo del máximo común divisor, se tiene: $m.c.d(a,36) = m.c.d(36,11)$

Pero 36 y 11 son primos entre sí, por lo tanto $m.c.d(a,36) = 1$.
12. La respuesta correcta es b. Son primos entre sí ya que el máximo común divisor de 13 y 27 es 1.
13. La respuesta correcta es a. El máximo común divisor es el producto de todos los factores primos comunes, elevados al menor exponente con que aparecen en las descomposiciones de cada número. Por tanto $m.c.d(a,b) = p \cdot q$.
14. La respuesta correcta es b. Dos números naturales se dicen primos entre sí si no tienen más divisores que 1. Por lo tanto, su máximo común divisor es 1.
15. La respuesta correcta es c. Ver la respuesta del ejercicio anterior.

16. La respuesta correcta es b. El mínimo común múltiplo de dos números es el menor de los múltiplos comunes.

17. La respuesta correcta es b. Como $9 = 3^2$ y $12 = 3 \cdot 2^2$, se tiene que el $m.c.m(9,12) = 3^2 \cdot 4 = 36$.

18. La respuesta correcta es b. Si el mínimo común múltiplo de dos números es igual al máximo común divisor, los dos números tendrán los mismos factores primos elevados a la misma potencia, luego son iguales.

19. La respuesta correcta es c. Como:

$$m.c.m(a,b) =$$

$$\text{se tiene } m.c.m(a,b) = 144/12 = 12.$$

20. La respuesta correcta es a. Como:

$$m.c.m(a,b) =$$

$$\text{se tiene } m.c.m(a,b) = 180/3 = 60.$$

21. La respuesta correcta es c.

22. La respuesta correcta es c. Si $m.c.m(a,b) = a \cdot b$ entonces $m.c.d(a,b) = 1$. Por lo tanto, son primos entre sí.

23. La respuesta correcta es la c. Como:

$$m.c.d(a,b) =$$

$$\text{si } m.c.m(a,b) = a, \text{ se tiene } m.c.d(a,b) = b.$$

24. La respuesta correcta es b. Como $39 = 3 \cdot 13$ y $52 = 2^2 \cdot 13$ entonces $m.c.m(39,52) = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 = 156$.

25. La respuesta correcta es b. Si son primos entre sí, el máximo común divisor será 1. Luego, su máximo común múltiplo será el producto $a.b$.
26. La respuesta correcta es a. Como $1312/4=328$, el número N será 2.
27. La respuesta correcta es c. Si el producto es positivo, los dos enteros serán positivos o los dos factores serán negativos. Por lo tanto, tienen el mismo signo.
28. La respuesta correcta es a. Si $a^3=1$, el número **a** no puede tener más factores que 1.
29. La respuesta correcta es a. Si a y b son negativos, $a + b$ será negativo, $a^3 + b^3$ será negativo y $a.b$ será positivo.
30. La respuesta correcta es c. Si el producto de tres números enteros es positivo, no puede asegurarse que los tres números sean positivos(puede ser $(-2).(-5).6$). Tampoco puede asegurarse que alguno de los números sea negativo, (pueden ser $2.3.4$). Lo único que siempre se cumplirá es que alguno de los números será positivo, en caso contrario, los tres números serían negativos y el producto también.
31. La respuesta correcta es a. Hace tres horas la temperatura era $3 \times 3^\circ$ más baja, luego estábamos en $5^\circ - 9^\circ = -4^\circ$.
32. La respuesta correcta es a. En los últimos 90 minutos ($=1.5$ hora) hemos recorrido $1.5 \times 90 = 135$ Km; por lo tanto, hace 90 minutos estábamos en el kilómetro $190 - 135 = 55$.
33. La respuesta correcta es a. Tanto si **a** es un número negativo, como si es positivo, se cumple que a^2 es positivo. No debe confundirse $-a^2 = -(a.a)$ con $(-a)^2 = (-a)(-a) = a^2$.

34. La respuesta correcta es b. Si se multiplica de manera ordenada, resultará:

$$\begin{aligned}(a+b^2)^1 &= (a+b^2)(a+b^2) \\ &= a(a+b^2) + b^2(a+b^2) \\ &= a^2 + ab^2 + ab^2 + b^4 \\ &= a^2 + 2ab + b^4\end{aligned}$$

Es un caso particular de la fórmula del cuadrado de un binomio.

35. La respuesta correcta es c. Es análogo al anterior.

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)^1 &= (a^2-b^2)(a^2-b^2) \\ &= a^2(a^2-b^2) - b^2(a^2-b^2) \\ &= a^4 - a^2b^2 - a^2b^2 + b^4\end{aligned}$$

Es también un caso particular del cuadrado de un binomio.

36. La respuesta correcta es la c.

$$\begin{aligned}(a+3b)^2 &= (a+3b)(a+3b) \\ &= a(a+3b) + 3b(a+3b) \\ &= a^2 + 3ab + 3ab + 9b^2 \\ &= a^2 + 6ab + 9b^2\end{aligned}$$

De nuevo es un caso particular del cuadrado de un binomio.

37. La respuesta correcta es la a.

$$\begin{aligned}2^a + 4b &= 2 \cdot a + 2 \cdot 2b \\ &= 2 \cdot (a + 2b)\end{aligned}$$

Observe que un factor que multiplica a una suma multiplica a cada sumando.

38. La respuesta correcta es a.

$$b(b-a) + (-1)(-a)b = b^2 - ab + ab \\ = b^2$$

Observe que $(-1)(-a) = a$.

39. La respuesta correcta es a.

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) \\ = a^2 - ab + ab - b^2 \\ = a^2 - b^2$$

Este resultado se lee: “La suma de dos números por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados.”

40. La respuesta correcta es b. En efecto, se cumple:

$$3 - 5 + 7 - 3 = -1$$

41. La respuesta correcta es a. Para encontrar el peso de cada jabón basta hallar el m.c.d $(1600, 2000, 3392) = 16$ libras.

42. La respuesta correcta es d. Para hallar el tamaño de cada parcela se debe hallar el m.c.d $(3675, 1575, 2275) = 175$.

43. La respuesta correcta es b. Para calcular el tiempo en que vuelven a pasar juntos, basta hallar m.c.m $(10, 11, 12) = 660$ seg.

44. La respuesta correcta es c. Para calcular el tiempo basta hallar el m.c.d $(80, 60) = 240$ seg.

45. La respuesta correcta es c. Si por cada vuelta saca 10 seg, las 10 vueltas serán 2400 seg.

Solución a los Ejercicios del Capítulo 2

Ejercicios 1

1. a) La respuesta correcta es $\frac{1}{2}$. La unidad se divide en dos partes iguales y se sombrea 1.
- b) La respuesta correcta es 4. La unidad se divide en cuatro partes iguales y se sombrea 1.
- c) La respuesta correcta es $\frac{2}{5}$. La unidad se divide en cinco partes iguales y se somborean 2.
- d) La respuesta correcta es $\frac{3}{10}$. La unidad se divide en diez partes iguales y se somborean 3.
- e) La respuesta correcta es $\frac{1}{2}$. La unidad se divide en ocho partes iguales y se somborean 4.
- f) La respuesta correcta es $\frac{1}{6}$. La unidad se divide en seis partes iguales y se somborean 1.
- g) La respuesta correcta es $\frac{3}{4}$. La unidad se divide en cuatro partes iguales y se somborean 3.
- h) La respuesta correcta es $\frac{3}{8}$. La unidad se divide en ocho partes iguales y se somborean 3.
- i) La respuesta correcta es $\frac{1}{2}$. La unidad se divide en 12 partes iguales y se somborean 6.
- j) La respuesta correcta es $\frac{1}{6}$. La unidad se divide en seis partes iguales y se sombrea 1.

- k) La respuesta correcta es $\frac{5}{9}$. La unidad se divide en nueve partes iguales y se somborean 5.
- l) La respuesta correcta es $\frac{1}{3}$. La unidad se divide en 12 partes iguales y se somborean 4.
2. a) La respuesta correcta es $\frac{1}{3}$. La unidad se divide en tres partes iguales y se somborea 1.
- b) La respuesta correcta es $\frac{1}{3}$. La unidad se divide en seis partes iguales y se somborean 2.
- c) La respuesta correcta es $\frac{1}{3}$. La unidad se divide en nueve partes iguales y se somborean 3.
- d) La respuesta correcta es $\frac{1}{3}$. La unidad se divide en 12 partes iguales y se somborean 4.
3. La región sombreada en los tres casos es la misma en todos los casos es decir $\frac{1}{3}$ de la unidad.
4. a) La respuesta es $\frac{1}{2}$. Se divide en dos partes iguales la unidad y se somborea 1.
- b) La respuesta es $\frac{1}{2}$. Se divide en cuatro partes iguales la unidad y se somborean 2.
- c) La respuesta es $\frac{1}{2}$. Se divide en ocho partes iguales la unidad y se somborean 4.
- d) La respuesta es $\frac{1}{2}$. Se divide en 12 partes iguales la unidad y se somborean 6.

Ejercicios 2

1. a) Es un conjunto de fracciones equivalentes.
- b) Es un conjunto de fracciones equivalentes.

2. a) $\left\{ \dots, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \frac{6}{24}, \dots \right\}$ b) $\left\{ \dots, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \dots \right\}$
 c) $\left\{ \dots, \frac{12}{8}, \frac{15}{10}, \frac{18}{12}, \dots \right\}$ d) $\left\{ \dots, \frac{20}{25}, \frac{24}{30}, \frac{28}{35}, \dots \right\}$
 e) $\left\{ \dots, \frac{20}{28}, \frac{25}{35}, \frac{30}{42}, \dots \right\}$

3. a) $2/10, 3/15$ b) $-10/16, -15/24$ c) $-10/-24, -15/-36$
 d) $22/-30, 33/-45$ e) $6/20, 9/30$

4. a) $\frac{4}{3} = \frac{16}{12}$ b) $\frac{5}{7} = \frac{10}{4}$ c) $\frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$
 d) $\frac{14}{12} = \frac{-7}{-6}$ e) $\frac{-121}{144} = \frac{11}{12}$ f) $\frac{-14}{13} = \frac{28}{-26}$

Ejercicios 3

1. a) $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ b) $\frac{-1}{2} = \frac{-12}{24}$ c) $\frac{5}{12} = \frac{-10}{20}$ d) $\frac{-3}{-8} = \frac{9}{24}$

e) $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$ f) $\frac{5}{-6} = \frac{-20}{24}$ g) $\frac{-7}{8} = \frac{-21}{24}$

2. a) $M:C:D(12,18) = 6;$ $\frac{12}{18} = \frac{12 \div 6}{18 \div 6} = \frac{2}{3}$

b) $M:C:D(42,49) = 7;$ $\frac{42}{49} = \frac{42 \div 7}{49 \div 7} = \frac{6}{7}$

c) $M:C:D(20,12) = 4;$ $\frac{-20}{12} = \frac{-20 \div 4}{12 \div 4} = \frac{-5}{3}$

$$d) M:C:D(45,60)=15; \quad \frac{45}{-60} = \frac{45 \div 15}{-60 \div 15} = \frac{3}{-4}$$

$$e) M:C:D(39,52)=13; \quad \frac{39}{52} = \frac{39 \div 13}{52 \div 13} = \frac{3}{4}$$

$$f) M:C:D(48,64)=16; \quad \frac{48}{64} = \frac{48 \div 16}{64 \div 16} = \frac{3}{4}$$

$$3. \quad a) M:C:D(28,36)=4; \quad \frac{28}{36} = \frac{28 \div 4}{36 \div 4} = \frac{7}{9}$$

$$b) M:C:D(54,108)=54; \quad \frac{54}{108} = \frac{54 \div 54}{108 \div 54} = \frac{1}{2}$$

$$c) M:C:D(84,126)=42; \quad \frac{84}{126} = \frac{84 \div 42}{126 \div 42} = \frac{2}{3}$$

$$d) M:C:D(48,64)=16; \quad \frac{48}{64} = \frac{48 \div 16}{64 \div 16} = \frac{3}{4}$$

4. a) El número que falta es -3, ya que por la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que:
 $(-9)8 \div 24 = -3$

- b) El número que falta es -5, ya que por la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que:
 $(10)(-9) \div 18 = -5$

- c) El número que falta es 242 ya que por la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que:
 $(22).88 \div 8 = 242$

- d) El número que falta es -60 ya que por la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que:
 $(20).84 \div (-28) = -60$

- e) El número que falta es 3, ya que por la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que:
 $(24)4 \div 32 = 3$

f) El número que falta es 48, ya que por la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que:

$$(12)595 \div 85 = 48$$

g) El número que falta es 672, ya que por la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que:

$$(91)96 \div 13 = 672$$

h) El número que falta es 2, ya que por la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que:

$$(98)3 \div 147 = 2$$

i) El número que falta es 7, ya que por la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que:

$$(637)3 \div 273 = 7$$

j) El número que falta es 332, ya que por la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que:

$$(415)4 \div 5 = 332$$

5. a) Es verdadera, ya que $(9).(1) = (3).(3)$.
 b) Es falsa, ya que $(2).(2) \neq (5).(5)$.
 c) Es falsa, ya que $(3).(13) \neq (7).(7)$.
 d) Es falsa, ya que $(14).(80) \neq (16).(35)$.
 e) Es verdadera, ya que $(2).(90) = (15).(12)$.
 f) Es verdadera, ya que $(7).(169) = (13).(91)$.
 g) Es falsa, ya que $(5).(48) \neq (6).(45)$.
 h) Es verdadera, ya que $(11).(289) = (17).(187)$.
 i) Es falsa, ya que $(5).(45) \neq (9).(26)$.
 j) Es falsa, ya que $(63).(15) \neq (18).(49)$.

Ejercicios 4

1. a) $\frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$, b) $\frac{-6}{-3} = \frac{6}{3} = 2$ c) $\frac{13}{-15} = -\frac{13}{15}$
 d) $\frac{-12}{-11} = \frac{12}{11}$ e) $\frac{6}{-7} = -\frac{6}{7}$

Ejercicios 5

1.
 - a) Es impropia ya que $8 > 3$
 - b) Es propia ya que $4 < 5$
 - c) Es impropia ya que $9 > 7$
 - d) Es propia ya que $1 < 12$
 - e) Es impropia ya que $8 > 3$
 - f) Es impropia ya que $25 > 8$
 - g) Es impropia ya que $31 > 4$
 - h) Es propia ya que $45 < 96$
 - i) Es impropia ya que $101 > 100$
 - j) Es impropia ya que $70 > 69$

2. En a) la fracción es impropia. $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$
En c) la fracción es impropia. $-\frac{9}{7} = -\left(1\frac{2}{7}\right)$
En f) la fracción es impropia. $\frac{25}{8} = 3\frac{1}{5}$
En g) la fracción es impropia. $-\frac{31}{4} = -\left(7\frac{3}{4}\right)$
En i) la fracción es impropia. $\frac{101}{100} = 1\frac{1}{100}$
En j) la fracción es impropia. $\frac{79}{69} = 1\frac{10}{69}$

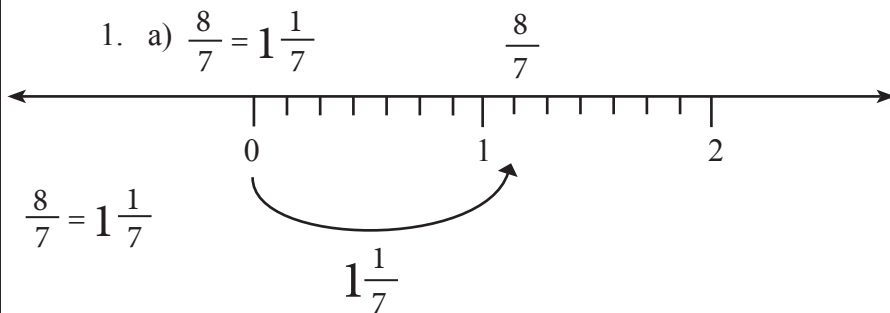
3. a) $15\frac{3}{8} = \frac{123}{8}$ b) $20\frac{3}{19} = \frac{383}{19}$ c) $-\left(17\frac{3}{8}\right) = -\frac{311}{8}$

d) $31\frac{5}{31} = \frac{966}{31}$ e) $-\left(42\frac{7}{25}\right) = -\frac{1057}{25}$ f) $53\frac{9}{17} = \frac{910}{17}$

g) $-\left(80\frac{3}{17}\right) = -\frac{2963}{17}$ h) $5\frac{3}{106} = \frac{2963}{106}$

Ejercicios 6

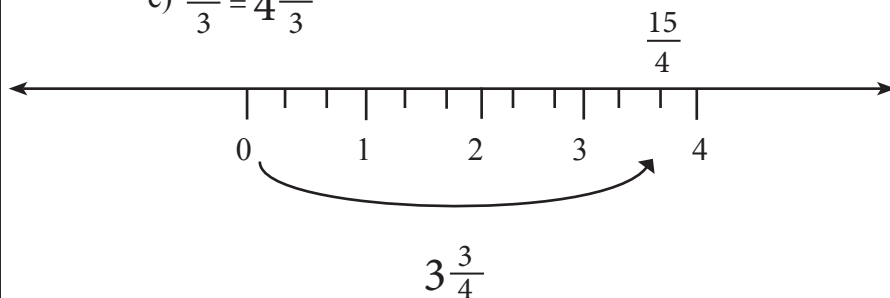
1. a) $\frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$



b) $-\frac{2}{5}$



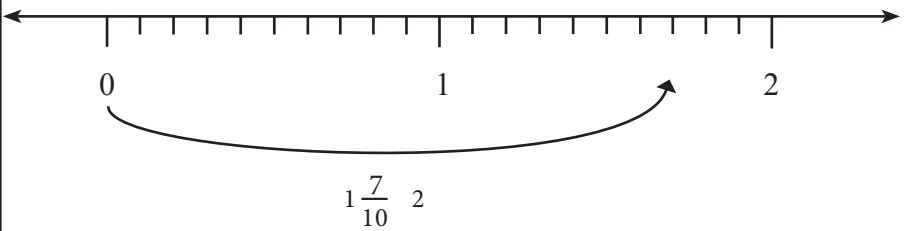
c) $\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$



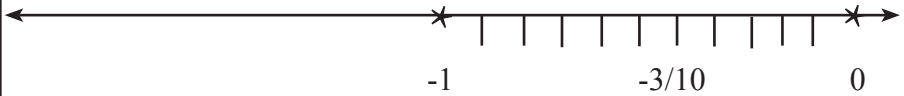
d) $\frac{3}{8}$



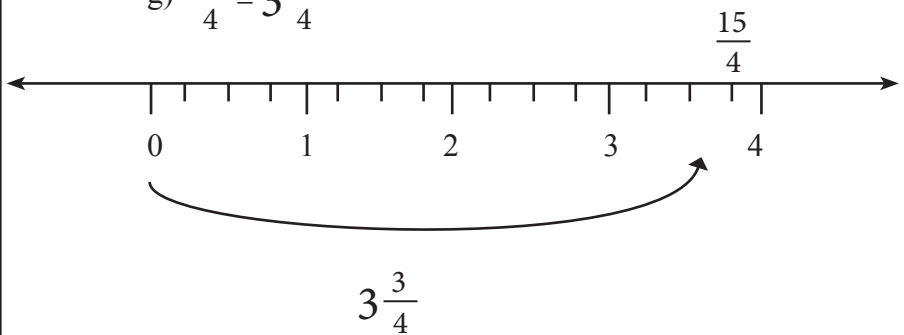
e) $\frac{17}{10} = 1\frac{7}{10}$



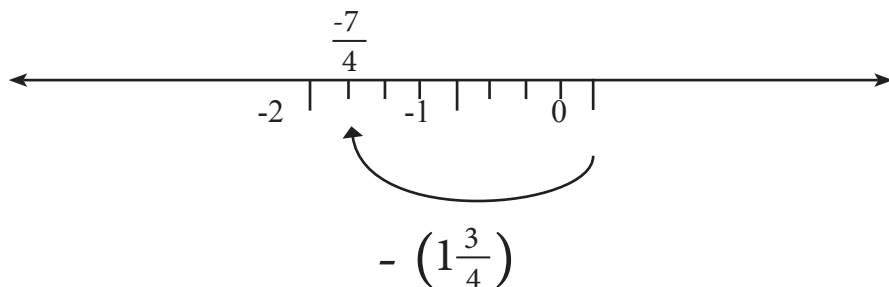
f) $-\frac{3}{10}$



g) $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$



$$h) \frac{-7}{4} = 1\frac{3}{4}$$



2. a) Cada unidad está dividida en 4 partes, luego:

$$\begin{array}{llll} A = -17/4 & B = -11/4 & C = -3/4 & D = 1/4 \\ F = 6/4 & Q = 11/4 & & \end{array}$$

b) Cada unidad está dividida en 3 partes iguales, luego:

$$\begin{array}{lllll} A = -8/3 & B = -4/3 & C = -2/3 & D = -2/3 & E = 5/3 \\ F = 8/3 & G = 19/3 & & & \end{array}$$

3. La unidad está dividida en sextos, luego:

$$\begin{array}{lll} A = -7/6 & B = 1/6 & C = 11/6 \\ A = -11/7 & B = 2/6 & D = 6/4 \quad E = 8/3 \end{array}$$

Ejercicios 7

1. a) $\frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{9+3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ b) $\frac{11}{3} + \frac{7}{3} = \frac{11+7}{3} = \frac{18}{3} = 6$
- c) $\frac{7}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{7+(-3)}{4} = \frac{4}{4} = 1$ d) $\frac{-3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{(-3)+4}{16} = \frac{1}{16}$
- e) $\frac{12}{19} + \frac{(-12)}{19} = \frac{19+(-19)3}{19} = \frac{0}{16} = 0$ f) $\frac{-3}{10} + \frac{(-9)}{10} = \frac{(-3)+(-9)}{10} = \frac{-12}{10} = -\frac{6}{5}$
- g) $\frac{(-7)}{5} + \frac{2}{5} = \frac{(-7)+5}{5} = \frac{-5}{5} = -1$ h) $\left(-\frac{11}{12}\right) + \frac{2}{12} = \frac{(-11)+2}{12} = \frac{-9}{12} = -\frac{3}{4}$
- i) $\frac{(-54)}{100} + \frac{14}{100} = \frac{(-54)+14}{100} = \frac{40}{100} = -\frac{2}{45}$ j) $3\frac{1}{4} + 5\frac{3}{9} = \frac{13}{4} = \frac{23}{4} = \frac{13+23}{4} = \frac{36}{4} = 9$
- k) $-\left(4\frac{1}{10}\right) + 9\frac{3}{10} = -\left(\frac{41}{10}\right) + \frac{93}{10} = \frac{(-41)+93}{10} = \frac{52}{16} = \frac{26}{10}$
- l) $-\left(7\frac{1}{24}\right) + 3\frac{5}{24} = -\frac{169}{24} + \frac{79}{24} = \frac{(-169)+79}{24} = \frac{-90}{24} = \frac{15}{4}$

2. a) Teniendo en cuenta que el perímetro de un rectángulo es la suma de las longitudes de los lados, entonces se tiene que:

$$\text{Perímetro} = \frac{7}{8} * \frac{7}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

- b) Sumando las distancias entre las dos ciudades se tiene:

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

Ejercicios 8

a) $\text{m.c.m}(20,25)=100$ entonces $\frac{7}{20} + \frac{11}{25} = \frac{35+44}{100} = \frac{79}{100}$

b) $\text{m.c.m}(14,36)=252$ entonces $\frac{-5}{14} + \frac{2}{36} = \frac{-90}{252} + \frac{14}{252} = \frac{-90+14}{252} + \frac{-76}{252} = \frac{19}{63}$

c) $\text{m.c.m}(4,5)=20$ entonces $3\frac{3}{4} + 2\frac{2}{5} = \frac{15}{4} + \frac{12}{5} = \frac{75+48}{20} = \frac{123}{20}$

d) $\text{m.c.m}(10,100)=100$ entonces $22\frac{1}{10} + 3\frac{1}{100} = \frac{21}{10} + \frac{301}{100} = \frac{210+301}{100} = \frac{511}{100}$

e) $\text{m.c.m}(34,51)=102$ entonces $\frac{5}{34} + \left(-\frac{2}{51}\right) = \frac{15+(-4)}{102} = \frac{11}{102}$

f) $\text{m.c.m}(1,7)=7$ entonces $13 + \left(\frac{1}{7}\right) = \frac{(7+1)}{7} = \frac{8}{7}$

g) $\text{m.c.m}(91,77)=1001$ entonces $\frac{(-6)}{91} + \left(-\frac{5}{77}\right) = \frac{-66+(-65)}{1001} = -\frac{131}{1001}$

h) $\text{m.c.m}(33,55)=165$ entonces $\frac{4}{33} + \frac{4}{55} = \frac{20+12}{165} = \frac{32}{165}$

i) $\text{m.c.m}(5,10)=10$ entonces $-\left(44\frac{3}{5}\right) + \left(66\frac{9}{10}\right) = -\frac{223}{5} + \frac{669}{10} = \frac{-223+669}{10} = -\frac{446}{10} = -\frac{223}{5}$

j) $\text{m.c.m}(2,16)=16$ entonces $\left(43\frac{1}{2}\right) + \left(-19\frac{5}{16}\right) = \frac{87}{2} + \left(-\frac{305}{16}\right) = \frac{174+(-305)}{16} = \frac{131}{16}$

Ejercicios 9

1. a) Propiedad del Inverso aditivo.
 b) Propiedad Asociativa de la suma.
 c) Propiedad Modulativa de la suma.
 d) Propiedad Conmutativa de la suma.

2. a) $-3/8$ b) $5/6$ c) $1/4$
 d) $11/5$ e) $37/45$

3. a) $n = -3/4$ b) $n = -11/4$ c) $n = 7/8$
 d) $n = -2$ e) $n = 0$ f) $n = 0$
 g) $n = 4/5$ h) $n = 0$ i) $n = 4$
 j) $n = 0$ k) $n = -5/2$ l) $n = 0$

4. a) $\text{m.c.m}(6,4) = 12$, luego

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2+10-3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

 b) $\text{m.c.m}(8,4) = 8$, luego

$$\frac{3}{8} + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3-6-2}{12}$$

 c) $\text{m.c.m}(11,9) = 99$, luego

$$\frac{7}{11} + \frac{5}{9} + \left(\frac{4}{11}\right) = \frac{63+55+36}{99} = \frac{154}{99}$$

 d) $\text{m.c.m}(4,8,16) = 16$, luego

$$\frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{1}{16} = \frac{20+18+1}{16} = \frac{39}{16}$$

 e) $\text{m.c.m}(5,15,60) = 60$, luego

$$\left(-\frac{7}{5}\right) + \left(-\frac{8}{15}\right) + \frac{11}{60} = \frac{-84+(-32)+11}{60} = \frac{-105}{60} = \frac{35}{12}$$

f) $\text{m.c.m}(4,8,5,10) = 80$, luego

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{3}{10}\right) = \frac{60 + 50 + (-32) + (-24)}{80} = \frac{24}{80} = \frac{3}{10}$$

$\text{m.c.m}(5,5,5) = 5$, luego

g)

$$5\frac{4}{5} + \left(-\left(6\frac{2}{5}\right)\right) + \left(8\frac{3}{5}\right) = \frac{29}{5} + \left(-\frac{32}{5}\right) + \frac{43}{5} = \frac{29 + (-32) + 43}{5} = \frac{39}{5}$$

$\text{m.c.m}(9,9,9) = 9$, luego

h)

$$8\frac{1}{9} + \left(10\frac{7}{9}\right) + \left(-\left(16\frac{1}{9}\right)\right) = \frac{73}{9} + \left(\frac{97}{9}\right) + \frac{145}{9} = \frac{73 + 97 - 145}{9} = \frac{425}{9}$$

i) $\text{m.c.m}(4,5,15,60) = 60$, luego

$$1\frac{1}{5} + \left(-\left(3\frac{1}{4}\right)\right) + \left(2\frac{1}{15}\right) + \frac{65}{60} = \frac{6}{5} + \left(-\frac{13}{4}\right) + \frac{31}{15} + \frac{65}{60} =$$

$$\frac{72 + (-195) + 124 + 65}{60} = \frac{66}{60} = \frac{11}{10}$$

j) $\text{m.c.m}(2,3,16) = 48$, luego

$$1\frac{1}{2} + \left(2\frac{1}{2}\right) + \left(1\frac{1}{16}\right) = \frac{3}{2} + \left(\frac{5}{2}\right) + \frac{17}{16} = \frac{72 + 120 + 15}{48} = \frac{207}{48} = \frac{69}{16}$$

k) $\text{m.c.m}(90,1,100) = 900$, luego

$$7\frac{1}{90} + (-18) + \frac{45}{100} = \frac{631}{90} + (-18) + \frac{45}{100} =$$

$$\frac{6310 + (-16200) + 405}{900} = \frac{-9485}{900} = \frac{1897}{180}$$

5. a) Para saber cuánto ha caminado basta realizar la suma de:

$$4\frac{1}{2} + 8\frac{2}{3} + \frac{5}{8} = \frac{9}{2} + \frac{26}{3} + \frac{3}{8} = \frac{108 + 208 + 9}{24} = \frac{325}{24} = 13\frac{13}{24} \text{ Km}$$

b) Para encontrar el lado que no se conoce basta sumar las dos longitudes dadas y se resta al perímetro, es decir:

$$6\frac{3}{8} - \left(2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4}\right) = \frac{51}{8} - \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{4}\right) = \frac{51}{8} - \frac{17}{4} = \frac{17}{8} \text{ cm}$$

Ejercicios 10

$$1. \text{ a) } \frac{9}{16} - \frac{5}{16} = \frac{9}{16}$$

$$\text{b) } \frac{24}{35} - \frac{10}{35} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

$$\text{c) } \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{d) } \frac{11}{8} - \frac{7}{24} = \frac{26}{24} = \frac{13}{12}$$

$$\text{e) } \frac{3}{8} - \frac{1}{12} = \frac{9-2}{24} = \frac{7}{24}$$

$$\text{f) } \frac{7}{62} - \frac{3}{155} = \frac{35-6}{310} = \frac{29}{310}$$

$$\text{g) } \frac{7}{80} - \frac{1}{90} = \frac{63-8}{720} = \frac{55}{720} = \frac{11}{144}$$

$$\text{h) } \frac{7}{36} - \frac{1}{100} = \frac{11}{1000} = \frac{1000-360-11}{36000} = \frac{889}{36000}$$

$$\text{i) } \frac{19}{36} - \frac{7}{80} = \frac{11}{90} = \frac{380-63-88}{720} = \frac{229}{720}$$

$$\text{j) } 19\frac{5}{7} - \left(12\frac{8}{105}\right) = \frac{138}{7} - \frac{1280}{105} = \frac{14490-8960}{735} = \frac{8960}{735} = \frac{1792}{147}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad a) \quad & \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} = \frac{28+24+14-12}{168} = \frac{6}{8} = \frac{1}{28} \\
 b) \quad & 80 - \left(3\frac{3}{5}\right) - \left(4\frac{3}{10}\right) = 80 - \frac{18}{5} - \frac{43}{10} = \frac{800+180+86}{10} = \frac{534}{10} = \frac{267}{5} \\
 c) \quad & \frac{7}{20} + \left(3\frac{1}{16}\right) - \left(4\frac{3}{10}\right) = \frac{7}{20} - \frac{49}{10} = \frac{800+180+86}{10} = \frac{534}{10} = \frac{267}{5} \\
 d) \quad & 6 + 5\frac{1}{3} - \left(4\frac{1}{6}\right) - \left(1\frac{1}{2}\right) = 6 + \frac{16}{3} - \frac{25}{6} - \frac{3}{2} = \frac{36+32-25-9}{6} = \frac{34}{6} = \frac{17}{3} \\
 e) \quad & 25\frac{7}{30} + 4\frac{1}{20} - \frac{1}{50} - \frac{1}{6} - 3 = 25 - \frac{7}{30} + \frac{81}{20} - \frac{1}{50} - \frac{1}{6} - 3 = - \\
 & = \frac{7500 - 700 + 1215 - 50 - 900}{300} = \frac{365}{300} = \frac{73}{60}
 \end{aligned}$$

3. Para saber el largo total de los dos cables, hacemos la suma de sus longitudes, es decir:

$$50\frac{2}{3} + 45\frac{5}{8} = \frac{152}{3} + \frac{365}{8} = \frac{1216+1095}{24} = \frac{2311}{24} \text{ metros}$$

Para saber cuánto le falta a cada uno de ellos para tener 80 metros le restamos a 80 cada longitud del cable.

$$80 - 50\frac{2}{3} = 80 - \frac{152}{3} = \frac{240-152}{3} = \frac{88}{3} = 29\frac{1}{3} \text{ metros y,}$$

$$80 - 45\frac{5}{8} = 80 - \frac{365}{8} = \frac{640-365}{8} = \frac{275}{8} = 34\frac{3}{8} \text{ metros}$$

4. Para saber que parte del día le queda libre, sumamos las partes ocupadas y se las restamos a la unidad, así:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{9+6+2}{36} = \frac{17}{36}$$

Es decir que tiene ocupado el $\frac{17}{36}$ del día, por lo tanto:

$$1 - \frac{17}{36} = \frac{36-17}{36} = \frac{19}{36} \text{ del día le queda libre. Más del 50\%.}$$

5. Si conocemos el sustraendo y el resultado entonces el minuendo se obtiene sumando al resultado el sustraendo, así:

$$\frac{11}{16} + \frac{7}{8} + \frac{11+14}{16} = \frac{25}{16}$$

Ejercicios 11

1. a) Si $\left(-\frac{3}{4}\right) + y = \left(-\frac{1}{2}\right)$ entonces $y = \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{-2+1}{4} = -\frac{1}{4}$
- b) Si $y + \frac{1}{3} = -1$ entonces $y = -1 + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-3-1}{3} = -\frac{4}{3}$
- c) Si $\frac{4}{3} + y = \left(-\frac{4}{5}\right)$ entonces $y = \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{1}{4} = \frac{-16-5}{20} = \frac{21}{20}$
- d) Si $\frac{43}{30} + y = \frac{51}{40}$ entonces $y = \frac{51}{40} - \frac{43}{70} = \frac{357-172}{280} = \frac{185}{280} = \frac{37}{56}$
- e) Si $y + \frac{81}{350} = \left(-\frac{77}{50}\right)$ entonces $y = \left(-\frac{77}{50}\right) - \frac{81}{350} = \frac{-539-81}{350} = -\frac{620}{350} = \frac{62}{35}$
- f) Si $-\left(3\frac{5}{7}\right) + y = \left(-\frac{11}{15}\right)$ entonces $y = \left(3\frac{5}{7}\right) - \frac{11}{15} = \frac{26}{7} - \frac{11}{15} = \frac{390-77}{105} = \frac{313}{105}$
- g) Si $y - \left(16\frac{2}{3}\right) = \left(9\frac{11}{8}\right)$ entonces $y = \left(9\frac{11}{8}\right) + 16\frac{2}{3} = \frac{83}{8} + \frac{50}{3} = \frac{249+400}{24} = \frac{649}{24}$

2. La ecuación correspondiente es:

$$y + \frac{28}{105} = -\frac{32}{35} \text{ entonces } y = -\frac{32}{35} - \frac{28}{105} = \frac{-96-28}{105} = -\frac{124}{105}$$

3. La ecuación correspondiente es:

$$y + \left(-4\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{4} \text{ entonces } y = 6\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} = \frac{25}{4} + \frac{9}{2} = \frac{25+18}{4} = \frac{43}{4}$$

4. La ecuación correspondiente es:

$$y - \frac{2}{7} = \frac{5}{14} \text{ entonces } y = \frac{5}{14} + \frac{2}{7} = \frac{5+4}{14} = \frac{9}{14}$$

Ejercicios 12

1. a) $\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$ b) $-\frac{1}{5} \times 4 = -\frac{4}{5}$

c) $-\frac{1}{7} \times 8 = -\frac{8}{7}$ d) $\frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$

2. a) $7 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ b) $3 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{8}$

3. a) $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ b) $-12 \times \frac{1}{7} = \frac{12}{7}$ c) $10 \times \frac{1}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

d) $5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ e) $(-7) \times \frac{1}{1000} = -\frac{7}{1000}$

Ejercicios 13

1. a) $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ es decir $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

b) $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{4}$ es decir $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

c) $\frac{1}{2}$ de 1 es decir $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

$$2. \quad \begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{72} & \text{b)} \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{21} & \text{c)} \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \\ \text{d)} \quad \frac{1}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{60} & \text{e)} \quad \frac{1}{12} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{180} & \end{array}$$

Ejercicios 14

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \text{a)} \quad \left(-\frac{3}{8}\right) \times \frac{3}{2} = -\frac{9}{16} & \text{b)} \quad \frac{5}{7} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{21} \\ \text{c)} \quad \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12} & \text{d)} \quad \frac{3}{8} \times \frac{8}{3} = \frac{24}{24} = 1 \\ \text{e)} \quad \frac{5}{2} \times (-1) = -\frac{5}{2} & \text{f)} \quad \left(-\frac{7}{8}\right) \times \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{14}{56} = \frac{1}{4} \\ \text{g)} \quad 5 \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{10}{5} = -2 & \text{h)} \quad (-4) \times \left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{20}{9} \\ \text{i)} \quad \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} & \text{j)} \quad 8\frac{1}{3} \times 5\frac{3}{4} = \frac{25}{3} \times \frac{23}{4} = \frac{275}{12} \end{array}$$

2. Basta realizar la multiplicación, es decir: $\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$

3. De nuevo basta realizar la multiplicación:

$$3\frac{3}{4} \times 12 = \frac{15}{4} \times \frac{12}{1} = \frac{180}{4} = 45 \text{ cm}$$

4. De nuevo basta realizar la multiplicación:

$$2\frac{3}{4} \times 60 = \frac{11}{4} \times 60 = \frac{165}{1} \text{ KM/h}$$

5. De nuevo basta realizar la multiplicación $\frac{3}{7} \times 5 = \frac{15}{7}$ minutos.

En medio día: $\frac{3}{7} \times 12 = \frac{36}{7}$

En una semana sería $\frac{3}{7} \times 24 \times 7 = \frac{504}{7} = \frac{72}{1} = 72$ minutos.

Ejercicios 15

1. a) $\frac{5}{2}$ b) $-\frac{3}{1}$ c) $-\frac{8}{7}$
- d) $\frac{15}{16}$ e) $\frac{7}{3}$ f) $-\frac{6}{11}$
- g) $\frac{5}{37}$ h) $\frac{1}{10}$ i) $-\frac{100}{1}$
- j) $\frac{10}{37}$

2. Encontrar el valor de n:

- a) $n = \frac{4}{5}$ b) $n = -\frac{7}{12}$ c) $n = -\frac{9}{4}$
- d) $n = \frac{2}{5}$ e) $n = -\frac{7}{8}$

Ejercicios 16

1. a) $n = 2$ b) $n = \frac{64}{25}$ c) $n = -\frac{3}{4}$
- d) $n = -\frac{63}{160}$ e) $n = \frac{8}{1}$

Ejercicios 17

$$1. \quad a) \frac{8}{7} \div \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{32}{21} \quad b) \left(-\frac{3}{4}\right) \div \frac{4}{3} = -\frac{9}{16}$$

$$c) \frac{9}{24} \div \frac{3}{8} = \quad d) -\frac{16}{4} \div \left(-\frac{4}{10}\right) = \frac{160}{20} = 8$$

$$e) (-1) \div \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} \quad f) \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$$

$$g) (-348) \div (-21) = \frac{348}{21} = \frac{116}{7} \quad h) 17 \div (-4) = \frac{17}{4}$$

$$i) (-335) \div 5 = -\frac{335}{5} = -67 \quad j) 1622 \div 30 = \frac{1622}{30} = \frac{811}{15}$$

$$2. \quad a) \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{2} \div \frac{3}{8} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$b) \frac{-\frac{5}{9}}{\frac{1}{5}} = -\frac{5}{9} \div \frac{1}{5} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$c) \frac{\frac{7}{6}}{\frac{-3}{7}} = \frac{7}{6} \div \frac{-3}{7} = -\frac{21}{42} = -\frac{1}{2}$$

$$d) \frac{4\frac{1}{2}}{\frac{9}{9}} = \frac{9}{2} \div \frac{9}{9} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$e) \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{-9}{4}} = -\frac{3}{4} \div \frac{-9}{4} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$f) \frac{-\left(4\frac{2}{5}\right)}{-\left(2\frac{3}{4}\right)} = \frac{-\frac{22}{5}}{-\frac{11}{4}} = -\frac{22}{5} \div -\frac{11}{4} = \frac{88}{55} = \frac{8}{5}$$

$$g) \frac{-\frac{7}{14}}{\frac{3}{3}} = -\frac{7}{14} \div \frac{14}{3} = -\frac{21}{14} = -\frac{3}{2}$$

$$h) \frac{2\frac{1}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{5}{2} \div \frac{10}{10} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$i) \frac{37\frac{1}{3}}{\frac{100}{100}} = \frac{112}{3} \div \frac{100}{1} = \frac{112}{300} = \frac{28}{75}$$

$$j) \frac{3\frac{1}{3}}{12\frac{1}{3}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{37}{3}} = \frac{10}{3} \div \frac{37}{3} = \frac{10}{37}$$

$$3. \text{ a) } \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{30}}{\frac{23}{30}} = \frac{\frac{10+12+1}{30}}{\frac{23}{30}} = \frac{23}{23} = 1$$

$$\text{b) } \left(2 \times \frac{6}{5}\right) \div \left(2 + \frac{3}{8}\right) = \frac{12}{5} \div \frac{19}{8} = \frac{96}{95}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{6}}{\frac{7}{5} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{28}{6}}{\frac{15}{3} - \frac{1}{1}} = \frac{\frac{12+420}{90}}{\frac{2}{1}} = \frac{432}{2} = \frac{432}{180} = \frac{12}{5}$$

$$\text{d) } \left(150\frac{1}{8} \div \frac{1}{8}\right) \div \left(4 \times 2\frac{7}{8}\right) = \left(\frac{1201}{8} \div \frac{1}{8}\right) \div \left(\frac{92}{8}\right) = \frac{1201}{1} \div \frac{92}{8} = \frac{9608}{92} = \frac{2402}{23}$$

4. a) Para saber cuanto tiempo se demora en llenar el depósito basta hacer la división de:

$$90\frac{3}{4} \div 8\frac{1}{4} = \frac{363}{4} \div \frac{33}{4} = \frac{363}{33} = \frac{121}{11} = 11 \text{ minutos.}$$

- b) Para resolver este problema debemos encontrar una fracción tal que:

$$\frac{32}{5} \div n = 3, \text{ esto es } n = \frac{32}{5} \div 3 = \frac{32}{15} =$$

Ejercicios 18

1. a) $\frac{3}{2} \cdot x = \frac{7}{8}$, luego $x = \frac{7}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$
- b) $-\frac{1}{2} \cdot y + 5 = -\frac{4}{7}$, luego $-\frac{1}{2} \cdot y = -\frac{4}{7} - 5$, $-\frac{1}{2} \cdot y = \frac{-39}{7}$, $y = \frac{-39}{7} \times -\frac{2}{1} = \frac{78}{7}$
- c) $\frac{1}{2} \cdot x + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$, luego $\frac{1}{2} \cdot x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{7}{12}$, $x = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$
- d) $-\frac{4}{5} \cdot z + \frac{2}{7} = \frac{4}{9}$, luego $-\frac{4}{5} \cdot z = -\frac{4}{9} - \frac{2}{7}$, $-\frac{4}{5} \cdot z = \frac{10}{63}$, $-z = \frac{10}{63} \times \frac{-5}{4}$, $z = \frac{-25}{126}$
- e) $3 \cdot x + 8 = -17$, luego $3 \cdot x = -17 - 8$, $3 \cdot x - 25$, $x = -\frac{25}{3}$

Ejercicios 19

1. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1^7}{2^7} = \frac{1}{128}$
- b) $\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5^4}{7^4} = \frac{625}{2401}$
- c) $\left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{1^8}{3^8} = \frac{1}{6561}$
- d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{3^3} = -\frac{8}{27}$
- e) $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{(-3)^2}{7^2} = \frac{9}{49}$
- f) $\left(1\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{7}{5}\right)^4 = \frac{7^4}{5^4} = \frac{2401}{128}$
- g) $\left(4\frac{2}{3}\right)^0 = 1$
- h) $\left(-\frac{3}{2}\right)^6 = \frac{(-3)^6}{2^6} = \frac{729}{64}$
- i) $\left(\frac{6}{5}\right)^5 = \frac{6^5}{5^5} = \frac{7776}{3125}$
- j) $\left(\frac{9}{4}\right)^3 = \frac{9^3}{4^3} = \frac{729}{64}$
2. a) $\frac{49}{100} = \frac{7^2}{10^2} = \left(\frac{7}{10}\right)^2$
- b) $-\frac{125}{216} = -\frac{5^3}{6^3} = \left(-\frac{5}{6}\right)^3$
- c) $\frac{64}{729} = \frac{4^3}{9^3} = \left(\frac{4}{9}\right)^3$
- d) $-\frac{729}{1000} = \frac{9^3}{10^3} = \left(\frac{9}{10}\right)^3$
- e) $\frac{256}{625} = \frac{4^4}{5^4} = \left(\frac{4}{5}\right)^4$
- f) $\frac{1}{27} = \frac{1^3}{3^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

3. a) Como el área de un cuadrado es igual a la longitud del lado elevado al cuadrado, entonces:

$$A = \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{12^2}{13^2} = \frac{144}{169} \text{ unidades cuadradas}$$

- b) El volumen de un cubo es igual a la longitud de lado elevado al cubo. Entonces:

$$V = \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3} = \frac{125}{343} \text{ unidades cúbicas}$$

Ejercicios 20

1. a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{8+5} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{13}$
- b) $\left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{10}\right)^{2+3+4} = \left(\frac{1}{10}\right)^9$
- c) $(-3)^4 \times (-3)^7 \times (-3)^1 = (-3)^{4+7+1} = (-3)^{12}$
- d) $(5)^2 \times (5)^2 \times (5)^2 \times (5)^2 \times (5)^1 = (5)^{2+2+2+2+1} = (5)^9$
- e) $\left(-\frac{7}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{7}{3}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(-\frac{7}{3}\right)^{2+3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{4+6} = \left(-\frac{7}{3}\right)^5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$

Ejercicios 21

$$1. \text{ a) } \left(\left(\frac{3}{5} \right)^4 \right)^3 = \left(\frac{3}{5} \right)^{4 \times 3} = \left(\frac{3}{5} \right)^{12} \quad \text{b) } \left(\left(-\frac{2}{3} \right)^3 \right)^4 = \left(-\frac{2}{3} \right)^{3 \times 4} = \left(-\frac{2}{3} \right)^{12}$$

$$\text{c) } \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^5 \right)^2 = \left(-\frac{1}{2} \right)^{5 \times 2} = \left(-\frac{1}{2} \right)^{10} \quad \text{d) } \left((-8)^2 \right)^6 = (-8)^{2 \times 6} = (-8)^{12}$$

$$\text{e) } \left((2^2)^2 \right)^2 = 2^{2 \times 2 \times 2} = 2^2$$

Ejercicios 22

$$1. \text{ a) } \left(\frac{5}{4} \right)^3 \times \left(\frac{8}{5} \right)^3 = \left(\frac{5}{4} \times \frac{8}{5} \right)^3 = (2)^3 = 8$$

$$\text{b) } \left(-\frac{2}{7} \right)^2 \times \left(\frac{49}{7} \right)^2 \times \left(-\frac{10}{98} \right)^2 = \left(-\frac{2}{7} \times \frac{49}{7} \times \frac{10}{98} \right)^2 = (2)^3 = 8$$

$$\text{c) } (-6)^3 \times (-3)^3 \times ((-6) \times 3)^3 = (-18)^3$$

$$\text{d) } \left(\frac{1}{3} \right)^7 \times (-3)^7 \times \left(\frac{2}{3} \right)^7 = \left(\frac{1}{3} \times (-3) \times \frac{2}{3} \right)^7 = \left(-\frac{2}{3} \right)^7 = \frac{128}{2187}$$

$$\text{e) } \left(\frac{2}{3} \right)^4 \times \left(\frac{3}{2} \right)^4 = \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \right)^4 = 1^4 = 1$$

Ejercicios 23

1. a) $(-4)^3 = -64$ b) $-5^3 = -125$ c) $-2^4 = -16$

d) $(-2)^5 = -32$ e) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

2. a) $5^2 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$ b) $\frac{6^8}{6^3} = 6^{8-3} = 6^5$

c) $\frac{11^8}{11^9} = 11^{8-9} = 11^{-1} = \frac{1}{11}$ d) $\frac{5^4}{5^{-2} 5^3} = \frac{5^4}{5^1} = 5^{4-1} = 5^3$

e) $(3^3)^3 = 3^9$ f) $(2^{-3})^{-2} = 2^{(-3) \times (-2)} = 2^6$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$ h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(-\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{(-5)^4}{2^4} = \frac{5^4}{2^4} = \frac{625}{16}$

3. a) $y^3 y^4 = y^{3+4} = y^7$ b) $b^5 b^1 = b^{5+1} = b^6$

c) $z^{-5} z^{-3} = z^{-5+3} = z^{-2} = \frac{1}{z^2}$ d) $x^{-5} x^{-2} = x^{(-5)+(-2)} = x^{-7} = \frac{1}{x^7}$

e) $\frac{y^8}{y^4} = y^{8-4} = y^4$ f) $\frac{b^5}{b^{-1}} = b^{5-(-1)} = b^{5+1} = b^6$

g) $\frac{x^5}{x^{-7}} = x^{5-(-7)} = x^{5+7} = x^{12}$ h) $\frac{x^{-3}}{x^{-4}} = x^{(-3)-(-7)} = x^{-3+4} = x^1 = x$

$$\text{i)} (y^4)^3 = y^{12}$$

$$\text{j)} (x.y)^3 = x^3 y^3$$

$$\text{k)} (5m)^3 = 5^3 m^3$$

$$4. \text{ a)} (2y^{-2}x)^{-4} = 2^{-4} (y^{-2})^{-4} x^{-4} = \frac{1}{2^4} y^8 \frac{1}{x^4} = \frac{y^8}{16x^4}$$

$$\text{b)} (-64y^5)^{-3} = \frac{1}{(-64y^5)^3} = -\frac{1}{64^3 y^{15}}$$

$$\text{c)} (-8b^{-3}a^2)(2b^5a^{-4}) = -16b^2a^{-2} = \frac{16b^2}{a^2}$$

$$\text{d)} (-8b^{-3}a^2)(2b^5a^{-4}) = -16b^{-3+5}a^{2-4} = -16b^2a^{-2} = \frac{16b^2}{a^2}$$

$$\text{e)} (4y^{-2}) \div (y^{-1}x^2) = 4y^{-2-(-1)}x^{-2} = 4y^{-1}x^{-2} = \frac{4}{y^1x^2} = \frac{4}{yx^2}$$

$$\text{f)} (-8x^{-3}y^2z) \div (2x^5y^4) = -4x^{-3-5}y^{2-4}z = -4x^{-8}y^{-2}z = -\frac{4z}{x^8y^2}$$

$$\text{g)} \left(\frac{y^2}{x^{-2}}\right)^{-3} = \left(\frac{x^{-2}}{y^2}\right)^3 = \frac{x^{-6}}{y^6} = \frac{1}{x^6y^6}$$

$$\text{h)} \left(\frac{y^{-2}}{x}\right)^{-3} = \left(\frac{x}{y^{-2}}\right)^3 = \frac{x^3}{y^{-6}} = x^3y^6$$

$$\text{i)} \left(\frac{x^{-2}y^{-1}z^{-1}}{x^4y^{-3}z^0}\right)^{-3} = \left(\frac{x^4y^{-3}}{x^{-2}y^{-1}z^{-1}}\right)^3 = \frac{x^{12}y^{-9}}{x^{-6}y^{-3}z^{-3}} = x^{12-(-8)}y^{-2-(-8)}z^{-(-3)} = x^{20}y^6z^3$$

$$\text{j)} \left(\frac{4a^{-1}b^{-30}}{2^{-2}a^4b^{-10}}\right)^{-2} = \left(\frac{2^{-2}a^4b^{-10}}{4a^{-1}b^{-30}}\right)^2 = \frac{2^{-4}a^8b^{-20}}{16a^{-2}b^{-60}} = \frac{a^{10}b^{40}}{256}$$

Ejercicios 24

1. a) $-\frac{3}{10} > -\frac{1}{3}$

b) $-\frac{2}{3} < \frac{9}{4}$

c) $\frac{3}{16} > \frac{1}{6}$

d) $\frac{5}{12} < \frac{7}{16}$

e) $-\frac{11}{15} < -\frac{17}{10}$

f) $\frac{3}{8} > -\frac{2}{5}$

g) $\frac{11}{4} = \frac{22}{8}$

h) $-\frac{7}{3} > -\frac{5}{2}$

i) $\frac{11}{14} > \frac{11}{15}$

j) $-\frac{30}{100} = -\frac{3}{10}$

2. a) El fraccionario menor es $\frac{1}{6}$, y el fraccionario mayor es $\frac{1}{2}$.

b) El fraccionario menor es $-\frac{6}{7}$, y el fraccionario mayor es $-\frac{2}{3}$.

c) El fraccionario menor es $\frac{7}{12}$, y el fraccionario mayor es $\frac{3}{4}$.

d) El fraccionario menor es $\frac{3}{5}$, y el fraccionario mayor es $\frac{7}{5}$.

e) El fraccionario menor es $-\frac{3}{9}$, y el fraccionario mayor es $-\frac{3}{5}$.

3. Observe que estas fracciones son equivalentes a:

$\frac{45}{60}, \frac{36}{60}, \frac{50}{60}, \frac{40}{60}$ por lo tanto la fracción menor es $\frac{36}{60}$ y la fracción mayor es $\frac{50}{60}$.

4. Observemos que la fracción $\frac{3}{4}$ es una fracción propia donde el numerador es menor que el denominador; si se agrega 1 al numerador y 3 al denominador, se hace más grande el denominador que el numerador, por lo tanto, la fracción disminuye, es decir, que:

$$\frac{3}{4} > \frac{4}{7}$$

Ejercicios 25

1. Al dividir el entero 2 entre el entero 5 se obtiene 0.4, luego, $2/5=0.4$.
2. Al dividir el entero 25 entre el entero 4 se obtiene 6.25, luego, $25/4=6.25$.
3. Al dividir el entero 70 entre el entero 15 se obtiene 4.666..., luego, $70/15=4.666\ldots$
4. Al dividir el entero 6 entre el entero 11 se obtiene 0.545454..., luego, $6/11=0.545454\ldots$
5. Al dividir el entero 226 entre el entero 405 se obtiene 0.5580246913580246913... luego, $226/405=0.5580246913580246913\ldots$
6. Al dividir el entero 1 entre el entero 55 se obtiene 0.0181818..., luego, $1/55=0.0181818\ldots$
7. Al dividir el entero 29 entre el entero 9 se obtiene 3.2222... luego, $29/9=3.2222\ldots$

8. Se tiene que $1.73 = 173/100$.
9. Se tiene que $41.7 = 417/10$.
10. Se tiene que $0.1701 = 1701/10000$.
11. Se tiene que $3.7 = x$. Luego como el período tiene una sola cifra decimal entonces $37.777... = 10x$; restando de esta ecuación la anterior se tiene que $37 = 9x$, por lo tanto, $x = 37/9$.
12. Se tiene que $15.4 = x$. Luego, como el período tiene una sola cifra decimal entonces $154.444... = 10x$, restando de esta ecuación la anterior se tiene que $139 = 9x$, por lo tanto $x = 139/9$.
13. Se tiene que $5.(13) = x$. Luego, como el período tiene dos cifras decimales entonces $513.1313... = 100x$, restando de esta ecuación la anterior se tiene que $508 = 99x$, por lo tanto $x = 508/99$.
14. Se tiene que $8.9(12) = x$. Luego, como el período empieza un lugar después de la coma, multiplico por diez obteniendo $89.(12) = 10x$; y como el periodo tiene dos cifras decimales multiplico por 100 esta ecuación, es decir $8912.(12) = 1000x$. Restando de esta ecuación la anterior se tiene que $8823 = 990x$ por lo tanto $x = 8823/990$.
15. Se tiene que $0.0(56) = x$. Luego, como el período empieza un lugar después de la coma, multiplico por diez obteniendo $0.(56) = 10x$, y como el periodo tiene dos cifras decimales multiplico por 100, esta ecuación, es decir $56.(12) = 1000x$. Restando de esta ecuación la anterior se tiene que $56 = 990x$, por lo tanto $x = 56/990$.

Ejercicios 26

$$30\% = \frac{30}{100} \quad 55\% = \frac{55}{100} \quad 26\% = \frac{26}{100} \quad 15\% = \frac{15}{100}$$

$$1. \quad 75\% = \frac{75}{100} \quad 230\% = \frac{230}{100}$$

$$2. \quad \frac{7}{10} \quad 0.7 = 70\% \quad \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.6\%$$

$$\frac{9}{16} = 0.5625\% \quad \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$$

3. $1/4 = 0.25 = 25\%$ de los alumnos tienen caries.
4. Decir que por cada accidente de automóvil con muertos hay 20 accidentes sin muerto, equivale a afirmar que por cada 21 accidentes hay uno con muertos; es decir, que los accidentes con muertos suponen una fracción igual a $1/21$ del total de accidentes. Como $1/21 \approx 0.0476$, puede asegurarse que aproximadamente, el 4.76% de los accidentes tienen consecuencias fatales.
5. Decir que por cada seis declaraciones de renta positivas hay siete negativas equivale a asegurar que de cada 13 declaraciones 6 son positivas; esto es, que una fracción igual a $6/13$ del total de declaraciones positivas. Como $6/13 \approx 0.4615$, puede asegurarse que aproximadamente, el 46.15% de las declaraciones son positivas.
6. Para hallar los porcentajes se calculan los subtotales de cada clase, como aparece en la tabla siguiente:

	Ramírez	Pérez	En blanco	Total
Hombres	120	140	40	300
Mujeres	60	80	10	150
Total	180	220	50	450

a) Entonces, el porcentaje de hombres entre los votantes es:

$$\frac{\text{Número de hombres votantes}}{\text{Número de votantes}} \times 100\% = \frac{300}{450} \times 100\% = 66.6\%$$

b) El porcentaje de votos en blanco es:

$$\frac{\text{Número de votos en blanco}}{\text{Número de votantes}} \times 100\% = \frac{50}{450} \times 100\% = 11.1\%$$

c) El porcentaje de hombre que votaron por Ramírez es:

$$\frac{\text{Número de hombres que votaron por ramírez}}{\text{Número de votantes}} \times 100\% = \frac{120}{450} \times 100\% = 40\%$$

d) El porcentaje de mujeres que votaron por Pérez es:

$$\frac{\text{Número de mujeres que votaron por perez}}{\text{Número de votantes}} \times 100\% = \frac{80}{450} \times 100\% = 53.3\%$$

7. Si por cada tres alumnos que aprueban hay uno que pierde, la fracción de alumnos que aprueban con respecto a los que se presentan es de $\frac{3}{4}$; luego, el porcentaje de alumnos que aprueban respecto de los que se presentan será de 75%.

Como se presenta una fracción de alumnos igual a $\frac{80}{100}$ respecto de los matriculados, la fracción de alumnos que aprueban respecto de los matriculados es:

$$\frac{80}{100} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{10}$$

Por lo tanto, el porcentaje de alumnos que aprueban respecto de los matriculados es de 60%.

8. Por cada peso que tiene invertido, 0.25 pesos están al 11%, 0.35 pesos al 12.5% y 0.4 pesos al 15%; luego por cada peso invertido recibe un interés igual a:

$$(0.25 \times 0.11) + (0.35 \times 0.125) + (0.4 \times 0.15) = 0.0275 + 0.04375 + 0.06 = 0.13125.$$

Por lo tanto, por cien pesos invertidos recibirá 13.125 y el interés total es del 13.125%.

9. El 0.5% de una cantidad C es igual a: $0.5/100 \times C$

Por lo tanto, el 0.5% de 11 será: $0.005 \times 11 = 0.055$.

Entonces, el interés ofrecido por la banca de Colombia será el 11% más el 0.05% del 11%, es decir $(11 + 0.055)\% = 11.055\%$.

Solución a la Evaluación del Capítulo 2

1. La respuesta correcta es la a. Puesto que se tiene:

$$\frac{117}{63} = \frac{3^2 \cdot 13}{3^2 \cdot 7} = \frac{13}{7}$$

La fracción 117/63 es equivalente a 13/7

2. La respuesta correcta es la c. El cociente $2 \div a/b$ es igual al cociente $2/1 \div a/b$, luego será $(2.b) / (1.a) = 2b/a$.
3. La respuesta correcta es c. Como las fracciones tienen el mismo denominador se suman los numeradores y se divide por el denominador común, esto es: $1/2 + a/2 = (1+a)/2$.

4. La respuesta correcta es la c. El producto de dos fracciones es igual a otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores, por lo tanto $3/2 \cdot 2/6 = 6/12 = 4/8$.
5. La respuesta correcta es la c. El producto de dos fracciones es igual a otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador, el producto de los denominadores, por lo tanto $3/2 \cdot 2/6 = 6/12 = 4/8$.
6. La respuesta correcta es b. El cociente de $1 \div a/b$ es igual al cociente de $1/1 \div a/b = b/a$.
7. La respuesta correcta es la b. Para calcular la suma de $2 + a/2$ se reduce a común denominador, es decir

$$\frac{2}{1} + \frac{a}{2} = \frac{4}{2} + \frac{a}{2} = \frac{4+a}{2}$$

8. La respuesta correcta es la a. Primero se calcula el paréntesis:

$$1/2 - 1/6 = 3/6 - 1/6 = 2/6 = 1/3$$

Luego, se multiplica por 3:

$$3(1/2 - 1/6) = 3 \cdot 1/3 = 1$$

Por lo tanto, $1.5 + 3(1/2 - 1/6) = 1.5 + 1 = 2.5$

9. La respuesta correcta es la a. Para calcular la diferencia se reduce a común denominador:

$$\frac{7}{8} - 2\frac{7}{8} - \frac{16}{8} = \frac{7-16}{8} = -\frac{9}{8}$$

10. La respuesta correcta es la c. Primero se calcula el paréntesis:

$$(1/a + 1/b) = b/ab + a/ab = a+b/ab$$

Luego, se eleva al cuadrado:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{ab}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{(ab)^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2b^2}$$

11. La respuesta correcta es la b. Basta dividir 75 entre 6 para obtener este resultado.

12. La respuesta correcta es la c. Como:

$$91/65 = 13.7/13.5 = 7/5$$

Luego las fracciones 7/5 y 91/65 son equivalentes.

13. La respuesta correcta es la b. Se tiene que $0.23 = x$. Luego, como el período empieza un lugar después de la coma multiplico por 10 obteniendo $2.3 = 10x$, y como el periodo tiene una cifra decimal multiplico por 10 esta ecuación, es decir $23.3 = 100x$, restando de esta ecuación la anterior se tiene que $21 = 90x$, por lo tanto $x = 21/90$.

14. La respuesta correcta es la a. El 20% de cualquier cantidad C es igual a $0.2C$; en particular, el 20% de \$100000 será $0.2 \cdot 100000 = 20000$.

15. La respuesta correcta es la b. Basta pasar cada fracción a su forma decimal.

16. La respuesta correcta es la c. El agua ocupa una fracción igual a $9/10$ de la fracción del vaso ocupada por el jugo; en total, ocupa una parte del vaso igual a $2/3 \cdot 9/10 = 18/30 = 3/5$; es decir que ocupa las tres quintas partes del vaso.

17. La respuesta correcta es la a. La fracción del precio del costo total que se destina a pagar por la comercialización será:

$$1 - 2/9 - 2/5 = (45 - 10 - 15)/45 = 17/45$$

Luego las $17/45$ partes del precio se dedican a pagar los costos de comercialización.

18. La respuesta correcta es la b. Los dos primeros niños reciben una cantidad igual a:

$$1/2 + 1/4 = (2+1)/4 = 3/4$$

El tercero recibe lo que queda, es decir $(1 - 3/4) = 1/4$ la cuarta parte.

19. La respuesta correcta es la c. Las proteínas y los lípidos constituyen las $2/3 + 1/6 = 5/6$ partes de la dieta; el resto son hidratos de carbono, que supondrán $1 - 5/6 = 1/6$; es decir la sexta parte o bien $3/18$ partes.

20. La respuesta correcta es la c. El abogado recupera el 90% de \$20'000000, es decir $0.90 \cdot 20'000000 = 18'000000$ pesos. Luego cobra el 20% de estos \$18'000000, es decir $0.20 \cdot 18'000000 = 3'600000$ pesos. El cliente recibe $18'000000 - 3'600000 = 14'400000$ pesos.

21. La respuesta correcta es la b. Si 1 mm del plano equivale a 2m en la realidad, entonces 1mm^2 del plano equivaldrá a 4m^2 en la realidad. Luego, $5\text{cm}^2 = 500\text{mm}^2$, 500mm^2 equivalen a $4 \times 500 = 2000\text{m}^2$

22. La respuesta correcta es la c. Han leído “El Quijote” 3 de cada 15 colombianos, es decir $3/15$ partes de la población. 5 de cada 6 que usan gafas han leído “El Quijote” luego, los que han leído “El Quijote” y usan gafas son:

$$3/15 \cdot 5/6 = 1/6$$

Esto es, la sexta parte de la población.

23. La respuesta correcta es c. La fracción de la población que es partidaria de conservar la naturaleza es de $4/5$. Luego el porcentaje es del $4/5$. $100\% \cdot 4/5 = 80\%$.

24. La respuesta correcta es a. Si por cada 5 alumnos que aprueban hay 2 que reprueban, los alumnos que aprueban suponen una fracción igual a $\frac{5}{7}$ de los que presentan la prueba. Como los que se presentan suponen los $\frac{3}{5}$ partes de los matriculados, los alumnos que aprueban suponeN las $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{7}$ partes de los matriculados.

25. La respuesta correcta es la a. El beneficio será:
 $1'800.000 - 1'500.000 = 300.000$.

El porcentaje de beneficio será:

$$\frac{\text{beneficio}}{\text{cantidad invertida}} \times 100\% = \frac{300000}{1'500000} \times 100\% = 0.20\% \times 100\% = 20\%$$

26. La respuesta correcta es la c. Por los primeros \$100000 pesos recibe $100000 \cdot 0.02 = 2000$. Por los restantes \$900000 pesos recibe $900000 \cdot 0.09 = 81000$. Luego, el interés total recibido es de \$83000 pesos. El porcentaje de interés recibido será

$$\frac{\text{interés total}}{\text{capital invertido}} \times 100\% = \frac{830000}{1'000000} \times 100\% = 8.3\%$$

Recibe 8.3%

27. La respuesta correcta es la b. Si el 80% del medio litro de zumo es agua, la cantidad de agua que contiene será $0.5 \cdot 0.8 = 0.4$ litros. Cuando añada el medio litro de agua habrá 0.9 litros de agua. El porcentaje de agua en la mezcla será:

$$\frac{\text{volumen de agua}}{\text{volumen total}} \times 100\% = \frac{0.9}{1} \times 100\%$$

Es decir, el 90% del volumen de la mezcla es agua.

28. La respuesta correcta es la c. La empresa compre $147000/140 = 10500$ litros de gas. Si el precio fuera \$160 pesos, gastaría $10'500 \cdot 160 = 1'680.000$ pesos.

29. La respuesta correcta es la c. Si por cada siete colombianos que trabajan hay tres que no trabajan, la fracción de personas que trabajan es de $7/10$ partes del total; luego, los que no trabajan suponen las $3/10$ partes del total.
30. La respuesta correcta es la b. Entre el mayor y el mediano reciben las $4/9 + 2/7 = 46/63$ partes de la herencia; luego el menor recibe una fracción igual a $17/63$.
31. La respuesta correcta es b. Cuando un dólar valía \$1.850 pesos con 1 peso se compraban $1/1850$ dólares. Si el dólar vale ahora \$1820 pesos con un peso se compre $1/1820$ dólares. El incremento del valor del peso será igual a:

$$\begin{aligned}\text{Incremento} &= \text{valor actual} - \text{valor anterior} \\ &= 1/1820 - 1/1850 \\ &= \frac{1850 - 1820}{(1820)(1850)} = \frac{30}{(1820)(1850)}\end{aligned}$$

Y el porcentaje de incremento será:

$$\frac{\text{incremento}}{\text{valor anterior}} \times 100\% = \frac{\frac{30}{(1820)(1850)}}{\frac{1}{1850}} \times 100\% = \frac{30}{1820} \times 100\% = 0.0164835 \times 100\%$$

Luego, se devalúa en 1.64835%.

32. La respuesta correcta es b. El primer mes gastó las $40/100 = 2/5$ partes de la herencia. En los dos primeros meses gastó las $2/5 + 1/5 = 3/5$ partes de la herencia. Al comienzo del tercer mes le quedaban las $2/5$ partes y gastó la mitad. Es decir, $1/5$. En total ha gastado las $2/5 + 1/5 + 1/5 = 4/5$ partes de la herencia y conserva la quinta parte.
33. La respuesta correcta es la a. El IVA es un impuesto proporcional. Por 3500 gramos pagaremos 3.5 veces más que por un kilo, es decir, $3.5 \cdot 1200 = 4200$.

34. La respuesta correcta es la a. La fracción de asientos del avión que están ocupados es igual a:

$$25/100.1/5 + 85/100.4/5$$

Luego, el porcentaje de asientos ocupados es del 72%.

35. La respuesta correcta es c. Si P es el precio de una rueda el costo de las cuatro ruedas será $4P$. Como solo pagamos $3P$, nos han descontado $4P - 3P = P$ pesos. El porcentaje de descuento será:

$$\frac{\text{cantidad descontada}}{\text{precio sin descuento}} \times 100\% = \frac{P}{4P} \times 100\% = \frac{1}{4} \times 100\%$$

Esto es, del 25%.

36. La respuesta correcta es b. Si P es el precio de las entradas antes de la subida y N era el número de entradas vendidas antes de la subida, después de la subida el precio será $1.1P$ y el número de entradas será $0.95N$. La recaudación antes de la subida era:

$$P.N \text{ pesos}$$

Y después de la subida es:

$$1.1P.0.95N \text{ pesos}$$

Luego, el incremento de la recaudación ha sido:

$$1.1P.0.95N - P.N = 0.045P.N \text{ pesos}$$

El porcentaje de incremento será:

$$\frac{\text{incremento de la recaudación}}{\text{recaudación anterior}} \times 100\% = \frac{0.045P.N}{P.N} .100\%$$

Por tanto, la recaudación ha subido un 4.5%.

37. La respuesta correcta es la c. Primero me rebajan un 10%. Luego, un 2% sobre el precio ya rebajado que era el 90% del precio original; esta segunda rebaja supone $0.02 \cdot 0.9 \cdot 100\% = 1.8\%$ de rebaja sobre el precio original. En total me han rebajado el 11.8%.

38. La respuesta correcta es la c. Considere que el equipo de trabajadores está formado por N personas. Puesto que todas trabajan por igual, si trabajase sólo uno de ellos, tardaría N veces más. Esto es $10N/3$ horas. Puesto que trabajan $5N/6$ personas, tardarían:

$$\frac{\frac{10N}{3}}{\frac{5N}{6}} \text{ horas.}$$

Es decir, 4 horas.

39. La respuesta correcta es la a. Por el mismo argumento que el ejercicio anterior, se tardará:

$$\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{4}}$$

Es decir, 6 horas.

40. La respuesta correcta es la b. El agua que hay en el zumo ocupa una fracción del vaso igual a $4/6 \cdot 90/100 = 18/25$. El agua que hay en el vodka ocupa una fracción del vaso igual a $1/5 \cdot 40/100 = 2/25$. En total, el agua ocupa una fracción igual a $20/25$; es decir, el 80%.

41. La respuesta correcta es la c. Si P fue la producción del año 1989, la de 1990 ha sido $1.5P$. El incremento de producción de un año al otro fue:

$$\begin{aligned}\text{Incremento} &= \text{producción 1990} - \text{producción 1989} = \\ &1.5P - P = 0.5P\end{aligned}$$

Y el porcentaje de incremento respecto de la producción de 1989 será:

$$\frac{\text{incremento}}{\text{producción de 1989}} \times 100\% = \frac{0.5P}{P} \times 100\%$$

Luego, el incremento es del 50%.

42. La respuesta correcta es la b. Si se trabajan 25 horas a \$1.500 pesos la hora, se cobra \$37.500 pesos. Si se trabaja 30 horas a \$1350 pesos la hora (un 10% menos) se cobra \$40500 pesos.

43. La respuesta correcta es a. El primer mes pagó $1/3$ del precio del carro. El segundo mes pagó $(30/100) \cdot (2/3)$ del precio del carro. El total pagado es:

$$1/3 + 30/100 \cdot 2/3 = 8/15$$

Luego, le restan por pagar las $7/15$ partes del carro.

44. La respuesta correcta es a. El incremento del número de fallecidos es de $0.203500 = 700$. Luego, en 1990 murieron $3500 + 700 = 4200$ personas.

45. La respuesta correcta es la b. La fracción de los alumnos que votan por Pedro Pérez será $0.4 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.7 = 0.5$. Luego, el porcentaje de votos que ha recibido es del 50%.

46. La respuesta correcta es a. En su manutención emplea una fracción del total de su sueldo igual a:

$$3/4 \cdot 2/3 = 1/2$$

Como $1/2 > 1/3$, gasta más en manutención.

47. La respuesta correcta es b. A pastos se dedican las $18/55$ pastos de la finca. Como $3/11 < 18/55 < 2/5$, la ordenación de los cultivos por su extensión es la de la alternativa b.

48. La respuesta correcta es b. El 15% de un queso de 2.5 kilos pesa:

$$15.2500/100 = 37500/100 = 375 \text{ gramos.}$$

La tercera parte de un queso de 2.1 kilos pesa:

$$2100/3 = 700 \text{ gramos}$$

Y las cuatro quintas partes de un queso de 750 gramos pesan:

$$4750/5 = 600 \text{ gramos}$$

Luego, pesa más la tercera parte de un queso de 2.1 kilos.

49. La respuesta correcta es b. Cuatro botellas de tercio contienen $4/3$ de litro. Nueve botellas de un quinto cada una contienen $9/5$ litros. Como $9/5 > 4/3$, tienen más capacidad nueve botellas que cuatro botellas.

50. La respuesta correcta es c. Si el precio en 1989 era de **p** pesos, el precio en 1990 habrá sido de:

$$p + 1\%p = 1.01p$$

Por el mismo motivo, el precio en 1991 sería:

$$\text{Precio de 1990} + 2\%\text{precio de 1990}$$

Es decir:

$$1.01p + 2\%.0.1p = 1.01p + 0.02.1.01p = 1.0302\%$$

El porcentaje de incremento es:

$$\frac{\text{precio de 1991} - \text{precio de 1989}}{\text{precio de 1989}} \times 100\% = \frac{1.0302p - p}{p} \times 100\% = 3.03\%$$

51. La respuesta correcta es c. Jaime ha comido una fracción de su pastel igual a:

$$1/2 + 1/3 \cdot 1/2 = 4/6$$

Antonio ha comido:

$$1/3 + 1/2 \cdot 1/3 = 4/6$$

Es decir que a ambos le queda la misma cantidad del pastel.

52. La respuesta correcta es c. Se puede razonar sin necesidad de números. Basta razonar de la siguiente forma: el agua que falta del tonel de agua es ahora vino y es igual al agua que hay en el tonel de vino. Luego, hay tanto vino en el tonel de agua como agua en el tonel del vino.

53. La respuesta correcta es b. El anillo de Isabel contiene:

$$10 \cdot 0.6 = 6 \text{ gramos de oro}$$

El anillo de Diego contiene:

$$15 \cdot 0.5 = 7.5 \text{ gramos de oro}$$

Así al fundir los anillos se tendrán 25 gramos de aleación que contiene 13.5 gramos de oro. Por lo tanto, la riqueza en oro de la aleación es:

$$\frac{\text{peso del oro que contiene}}{\text{peso total}} \times 100\% = 54\%$$

Obsérvese que, aunque los nuevos anillos tengan distinto peso, como sucederá si uno es más grande que otro, el porcentaje de oro es igual en ambos.

Solución a los Ejercicios del Capítulo 3

Ejercicios 1

c) Por definición de raíz cuadrada y por la justificación dada en los encisos a y b, no pueden existir raíces cuadradas de números negativos.

Ejercicios 2

1. a) $\sqrt{196 \times 25} = \sqrt{196} \times \sqrt{25} = 14 \times 5 = 70$

b) $\sqrt{625 \times 26} = \sqrt{625} \times \sqrt{26} = 25 \times 4 = 100$

c) $\sqrt{\frac{361}{81}} = \frac{\sqrt{361}}{\sqrt{81}} = \frac{19}{9}$

d) $\sqrt{\frac{169}{64 \times 9}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{64} \sqrt{9}} = \frac{13}{9 \times 3} = \frac{13}{24}$

e) $\sqrt{\frac{4 \times 25 \times 36}{121 \times 49}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{25} \times \sqrt{36}}{\sqrt{121} \times \sqrt{49}} = \frac{2 \times 5 \times 6}{11 \times 7} = \frac{60}{77}$

f) $\sqrt{\frac{64 \times 81 \times 100}{361 \times 169}} = \frac{\sqrt{64} \times \sqrt{81} \times \sqrt{100}}{\sqrt{361} \times \sqrt{169}} = \frac{8 \times 9 \times 10}{19 \times 13} = \frac{720}{247}$

2. a) Esta expresión es falsa, ya que si $a = 9$ y $b = 16$, se tiene que:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{y} \quad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

$$\text{luego } \sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

- b) Esta expresión es falsa, ya si $a = 25$ y $b = 16$, se tiene que:

$$\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{y} \quad \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$$

$$\text{luego } \sqrt{25-16} \neq \sqrt{25} - \sqrt{16}$$

3. a) $\sqrt{1296} = \sqrt{2^4 3^4} = \sqrt{2^4} \sqrt{3^4} = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

b) $\sqrt{2304} = \sqrt{2^8 \cdot 3^2} = \sqrt{2^8} \cdot \sqrt{3^2} = 2^4 \cdot 3^1 = 16 \cdot 3 = 48$

c) $\sqrt{\frac{4624}{5625}} = \frac{\sqrt{4624}}{\sqrt{5625}} = \frac{\sqrt{2^4 17^2}}{\sqrt{3^2 5^4}} = \frac{\sqrt{2^4} \sqrt{17^2}}{\sqrt{3^2} \sqrt{5^4}} = \frac{2^2 17^1}{3^1 5^2} = \frac{34}{75}$

4. Se pueden colocar formando un cuadrado si 2024 es un cuadrado perfecto. Para esto se extrae la raíz de 2024 y si es exacta entonces sí se puede formar un cuadrado.

$$\sqrt{2024} = \sqrt{2^3 11^1 23^1} = \sqrt{2^3} \sqrt{11} \sqrt{23}$$

Es decir, que 2024 no es un cuadrado perfecto, luego no se pueden organizar en un cuadrado.

Ejercicios 3

1. Simplificar:

a) $\sqrt{64} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

b) $\sqrt{120} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^1 \cdot 5^1} = \sqrt{2^2} \sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{5} = 2\sqrt{30}$

c) $\sqrt{1000} = \sqrt{2^3 \cdot 5^3} = \sqrt{2^2} \sqrt{5 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5 \sqrt{10} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt{340} = \sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot 17} = \sqrt{2^2} \sqrt{5 \cdot 17} = 2\sqrt{85}$

e) $\sqrt{1056} = \sqrt{2 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 11} = \sqrt{2^4} \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 11} = 2^2 \sqrt{66} = 4\sqrt{66}$

f) $\sqrt{2187} = \sqrt{3 \cdot 3^2 \cdot 61} = \sqrt{3^2} \sqrt{3 \cdot 61} = 3\sqrt{243}$

g) $\sqrt{11979} = \sqrt{3^2 \cdot 11 \cdot 11^2} = 3 \cdot 11 \cdot \sqrt{11} = 33\sqrt{11}$

h) $\sqrt{972} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 61} = \sqrt{2^2} \sqrt{3 \cdot 61} = 2\sqrt{243}$

i) $\sqrt{3750} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^4} = \sqrt{2 \cdot 3} \sqrt{5^4} = 5^2 \sqrt{6} = 25\sqrt{6}$

j) $\sqrt{39800} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2 \cdot 151} = \sqrt{2 \cdot 2^2} \sqrt{5^2} \sqrt{151} = 2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 151} = 10\sqrt{302}$

k) $\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$

l) $\sqrt{2304} = \sqrt{2^8 \cdot 3^2} = \sqrt{2^8} \sqrt{3^2} = 2^4 \cdot 3 = 48$

2. Simplificar:

$$a) \frac{\sqrt{289 \times 49}}{169 \times 4} = \frac{\sqrt{289} \sqrt{49}}{\sqrt{169} \sqrt{4}} = \frac{17 \times 7}{13 \times 2} = \frac{119}{26}$$

$$b) \frac{\sqrt{64 \times 25}}{121 \times 9} = \frac{\sqrt{64} \sqrt{25}}{\sqrt{121} \sqrt{9}} = \frac{8 \times 5}{11 \times 3} = \frac{40}{33}$$

$$c) \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5}$$

$$d) \sqrt{\frac{625}{10000}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{10000}} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$e) \sqrt{\frac{125}{49}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{49}} = \frac{5\sqrt{5}}{7}$$

$$f) \sqrt{\frac{256}{225}} = \frac{\sqrt{256}}{\sqrt{225}} = \frac{\sqrt{2^8}}{\sqrt{3^2 5^2}} = \frac{2^4}{3^1 5^1} = \frac{16}{25}$$

Ejercicios 4

1. a) $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$

b) $\sqrt[3]{-0.027} = \sqrt[3]{(-0.3)^3} = -0.3$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{512}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^9}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{3}\right)^3} = -\frac{1}{3}$

e) $\sqrt[3]{8 \times 216} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{216} \times 125 \times 64} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^3 3^3} \cdot 5^3 \cdot 4^3} = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot 5 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$

g) $\sqrt[3]{0.001} = \sqrt[3]{(0.1)^3} = 0.1$

h) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{4}\right)^3} = -\frac{3}{4}$

2. a) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

b) $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = 4$

c) $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

d) $\sqrt[10]{1} = 1$

e) $\sqrt[5]{-\frac{3125}{343}} = \sqrt[5]{\left(-\frac{5}{3}\right)^5} = -\frac{5}{3}$

f) $\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{\frac{216}{343}} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

g) $\sqrt[3]{-1} = -1$

h) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

3. Utilizar la descomposición en factores primos y las propiedades dadas anteriormente para calcular:

a) $\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} = 2^2 \cdot 3 = 12$

b) $\sqrt[3]{3375} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3} = 3 \cdot 5 = 15$

c) $\sqrt[5]{-0.00243} = \sqrt[5]{(-0.3)^5} = -0.3$

d) $\sqrt[5]{\frac{59049}{1024}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

e) $\sqrt[8]{\frac{256}{6561}} = \sqrt[8]{\left(\frac{2}{3}\right)^8} = \frac{2}{3}$

f) $\sqrt[4]{0.2401} = \sqrt[4]{(0.7)^4} = 0.7$

4. a) ¿Qué número real elevado a la 4 da -81?
No hay ningún número real que elevado a la cuarta nos dé -81.

b) ¿Qué número real elevado a la 6 da -64 ?

No hay ningún número real que elevado a la cuarta nos dé -64 .

c) ¿Existe la raíz cuarta de -81 ?

Como no hay un número real que elevado a la cuarta potencia nos de -81 entonces no existe la raíz cuarta de -81 .

d) ¿Existe la raíz sexta de -64 ?

Como no hay un número real que elevado a la cuarta potencia nos de -81 entonces no existe la raíz cuarta de -64 .

e) ¿Existen raíces de índice par de números reales negativos? ¿por qué?

En general como todo número real elevado a una potencia par siempre da positiva, entonces no pueden existir las potencias pares de números negativos.

Ejercicios 5

$$a) \sqrt[3]{8000} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 5 = 20$$

$$b) \sqrt[4]{15625} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 5^2} = 5 \cdot \sqrt[4]{25}$$

$$c) \sqrt[5]{54432} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3^5 \cdot 7} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[5]{7} = 10 \sqrt[5]{7}$$

$$d) \sqrt[3]{216000} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$e) \sqrt{405} = \sqrt{3^4 \cdot 5} = 3^2 \sqrt{5} = 9\sqrt{5}$$

Ejercicios 6

1. a) $a = 1$, $b = 1$, como $a^2 + b^2 = c^2$, entonces: $1^2 + 1^2 = c^2$, $c = \sqrt{2}$

b) $a = 36$, $b = 1$, como $a^2 + b^2 = c^2$, entonces: $36^2 + 1^2 = c^2$,
 $c = \sqrt{1296 + 1} = \sqrt{1297}$

c) $a = \frac{1}{12}$, $b = \frac{1}{8}$, como $a^2 + b^2 = c^2$, entonces: $\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 =$
 $c = \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{4+9}{576}} = \sqrt{\frac{13}{576}} = \sqrt{\frac{13}{2^6 \cdot 3^2}} = \sqrt{\frac{13}{8 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{13}{72}}$

2. a) $c = 15$, $a = 9$, como $a^2 + b^2 = c^2$, entonces: $b = \sqrt{c^2 - a^2} =$
 $\sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$

b) $c = \frac{2}{3}$, $a = \frac{1}{6}$, como $a^2 + b^2 = c^2$, entonces: $b = \sqrt{c^2 - a^2} =$
 $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{16-1}{36}} = \sqrt{\frac{15}{36}} = \sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$

3. a) $c = 15$, $a = 9$, como $a^2 + b^2 = c^2$, entonces: $b = \sqrt{c^2 - a^2} =$
 $\sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$

b) $c = \frac{2}{3}$, $a = \frac{1}{6}$, como $a^2 + b^2 = c^2$, entonces: $b = \sqrt{c^2 - a^2} =$
 $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{16-1}{36}} = \sqrt{\frac{15}{36}} = \sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$

c) $c = 39$, $a = 36$, como $a^2 + b^2 = c^2$, entonces: $b = \sqrt{c^2 - a^2} =$
 $\sqrt{39^2 - 36^2} = \sqrt{1521 - 1296} = \sqrt{225} = 15$

4. En el primer rectángulo se tiene que: $d^2 = 42 + 72 = 16 + 49 = 65$, entonces $d = \sqrt{65}$.

En el segundo rectángulo se tiene que: $d^2 = 42 + 42 = 16 + 16 = 32$, entonces $d = \sqrt{32} = \sqrt{(2^4 \cdot 2)} = 4\sqrt{2}$.

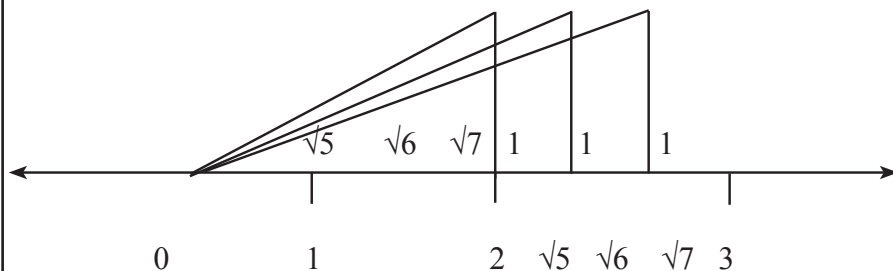
En el paralelogramo se tiene que: $h^2 = 42 - 32 = 16 - 9 = 7$, entonces $h = \sqrt{7}$. Luego $d^2 = 42 + (\sqrt{7})^2 = 16 + 7 = 23$, luego $d = \sqrt{23}$.

5. a) 30; 40; 60. Como $60^2 \neq 30^2 + 40^2$, entonces no corresponde a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.
- b) $\frac{3}{4}$; 1; $1\frac{1}{4}$.
Como $(\frac{5}{4})^2 = 1^2 + (\frac{3}{4})^2$, entonces si corresponde a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.
- c) 1.4; 4.8; 5. Como $5^2 = (1.4)^2 + (4.8)^2$, entonces si corresponde a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.
- d) $\frac{12}{3}$; $\frac{22}{3}$; $\frac{31}{3}$. Como $(\frac{10}{3})^2 \neq (\frac{5}{3})^2 + (\frac{8}{3})^2$, entonces no corresponde a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

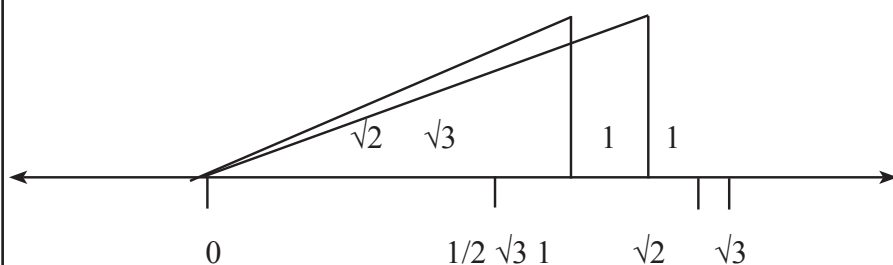
Ejercicios 7

- $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$. Representan números racionales. El resto son números irracionales.
- $\sqrt{7}$; el opuesto es $-\sqrt{7}$
 - $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; el opuesto es $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 - $-3\sqrt{5}$; el opuesto es $3\sqrt{5}$
 - $\sqrt{112}$; el opuesto es $-\sqrt{112}$

3. a) Para localizar $\sqrt{7}$ en la recta numérica se procede tal como indica en la siguiente figura:



- b. Para localizar $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, se procede similarmente al ejercicio anterior pero se debe partir de $\sqrt{2}$.



- c. Para localizar $-3\sqrt{5}$, se localiza $\sqrt{5}$, tal como se hizo en el ejercicio de la parte a) y este se toma menos tres veces el segmento de longitud $\sqrt{5}$.

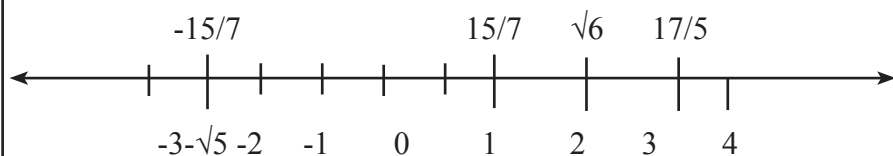
- d. Para localizar $\sqrt{112}$ se tiene en cuenta simplificando que $\sqrt{112}=4\sqrt{7}$. Luego, teniendo en cuenta el inciso a) en donde localizamos $\sqrt{7}$, tomamos cuatro veces la longitud de este segmento en el sentido positivo.

4. a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$;
 b) $(-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = \sqrt{9} = 3$;
 c) $\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = \sqrt{1} = 1$;
 d) $(\sqrt{11})^2 = \sqrt{11^2} = 11$;
 e) $(\sqrt{7})^3 = \sqrt{7^3} = \sqrt{7^2 \cdot 7} = 7\sqrt{7}$;
 f) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{na} (n > a)$
5. a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$
 d) $\sqrt{4} = 2$ e) $\sqrt{5}$ f) $\sqrt{6}$
 g) $\sqrt{7}$ h) $\sqrt{8}$ i) $\sqrt{9} = 3$

Ejercicios 8

1. a) $3\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$ b) $-2\frac{1}{7} = -\frac{15}{7}$
 c) $\sqrt{6}$ d) $\frac{15}{7}$
 e) $-\sqrt{5}$ f) $-\frac{7}{3}$
 g) 1.7 h) 1.732
 i) π (aproximadamente) = 3.141
 j) e (aproximadamente) = 2.718

2.



a) -3

b) -2.8

c) $-\sqrt{3}$

d) $-\sqrt{2}$

e) $-1/5$

f) 1

g) $\sqrt{2}$

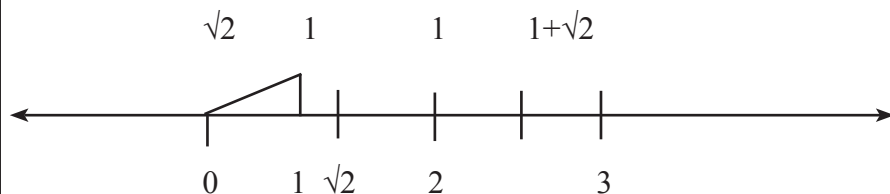
h) $\sqrt{3}$

i) $5/2$

j) π

b) El punto medio entre 2.7 y 2.8 es $M = (2.7+2.8)/2=2.75$.

3.



4. a) P.

b) P

c) R.

d) Q

e) Q

Ejercicios 9

1. a) $|9| = 9$

b) $|(-8) - 2| = |-10| = 10$

c) $\left|\frac{3}{4}\right| - \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

d) $|-6| = 6$

e) $|-4| + |-4| = 4 + 4 = 8$

f) $|0,5| - |-0,3| = 0,5 - 0,3 = 0,2$

g) $|- \pi| = \pi$

h) $|-1,5| - |-1,5| = 1,5 - 1,5 = 0$

i) $\left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$

j) $|4| + |4| = 8$

k) $\left|\frac{1}{2}\right| - \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

l) $|\sqrt{11}| = \sqrt{11}$

m) $|-4| - |-4| = 4 - 4 = 0$

n) $| -(-7) - 5| + |-4| = |7 - 5| = 2 + 4 = 6$

o) $|8 - 3| = 5$

p) $|4| - |-4| = 4 - 4 = 0$

q) $| -(-7) - 5| + |-10| = |7 - 5| + 10 = 2 + 10 = 12$

r) $|7 - 9| = 2$

s) $\left|-\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

t) $| -(-5) - 1| - |-3| = |5 - 1| - 3 = 4 - 3 = 1$

2.
 - a) $|x|=2$, implica $x = 2$ o $x = -2$
 - b) $|x| = 3$, implica $x = 3$ o $x = -3$
 - c) $|x-2|=1$, implica $x-2 = 1$ o $x-2 = -1$, es decir $x=3$ o, $x = 1$
 - d) $|x-7|=0$, implica $x - 7=0$, es decir $x = 7$.
3.
 - a) $|3-7|=4$ y $|7-3|=4$
 - b) $|1/2 - 1/3|=1/6$ y $|1/3 - 1/2|=1/6$
 - c) $|0.75-0.25|=0.5$ y $|0.25-0.75|=0.5$
 - d) Se puede concluir que $|a-b|=|b-a|$
 - e) Si $|a-b|=0$, entonces $a=b$
4.
 - a) $|6|>|4|$
 - b) $|7|<|-8|$
 - c) $|-6| > |4|$
 - d) $|-9| > |-2|$
 - e) $|-6|>|-4|$
 - f) $|3|<|5|$
 - g) $|2| < |-3|$
 - h) $|4|>|2|$
 - i) $|2|>|1|$
 - j) $|-2|=|2|$

Ejercicios 10

1. a) $|0-8|=8$ b) $|2\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}|=1$
c) $|5-0|=5$ d) $|1/2-1/3|=1/6$
e) $|-3-2|=5$ f) $|3/5-2/9|=17/45$
g) $|2-(-3)|=5$ h) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$
i) $|-1-1|=2$ j) $|\sqrt{3}-(-\sqrt{(5)})|=\sqrt{3}+\sqrt{5}$
2. a) Coordenada de B = 4, coordenada de H = 5
b) Coordenada de D = -2

c. $d(G,C) = |0-(-2)|=2$

$$d(D,B) = |-2-4|=6$$

$$d(A,E) = |2-(-4)|=6$$

$$d(D,E) = |-2-(-4)|=2$$

d. Este punto es el punto F.

e. La coordenada de dicho punto es 1 y el punto es E.

f. El punto situado a 6 unidades de E es el punto de coordenada 7.

g. El punto es E.

h. Es punto de coordenada 2 o de coordenada 7?

i. La distancia siempre debe ser un número positivo.

3. La coordenada de A es 13 y la coordenada de B es 5.

4. a) No se podría decir qué pueblo estaría entre los otros dos.

b) La distancia de A a C puede ser 6 o 22, según C esté a una distancia de 4 o de 18 unidades de A.

c) Si la distancia de A a C es de 6 unidades, entonces, A estará entre C y B.

Ejercicios 11

$$1. \quad \text{a) } 3^3 9^4 = 3^3 (3^2)^4 = 3^2 3^8 = 3^{10} \quad \text{b) } (5^2 5^3)^3 = (5^5)^3 = 5^{15}$$

$$\text{c) } (6^4 \cdot 36)^2 = ((2 \cdot 3)^4 (2^2 3^2))^2 = (2^4 3^4 2^2 3^2)^2 = (2^6 3^6)^2 = 2^{12} 3^{12}$$

$$\text{d) } (3^2)^3 (4^3)^2 = 3^6 4^6 = 3^6 \cdot (2^2)^6 = 3^6 2^{12}$$

$$2. \quad \text{a) } (10^{-1})^3 \cdot (10^2)^3 = 10^{-3} 10^6 = 10^3 \quad \text{b) } (2^3)^{-2} (5^6)^{-1} = 2^{-6} 5^{-6} = \frac{1}{2^6 5^6}$$

$$\text{c) } (x^2)^{-3} (x^{-1})^{-5} = x^{-6} x^5 = x^{-1} \frac{1}{x} \quad \text{d) } (x^3 y^2)^{-2} x^8 y^2 = x^6 y^{-4} x^8 y^2 = x^{14} y^{-2} \frac{x^{14}}{y^2}$$

$$3. \quad \text{a) } \frac{9^2 3^{-2}}{(9^{-2})^3} = \frac{9^2 9^2}{3^2 3} = \frac{9^4}{3^3} = \frac{(3^2)^4}{3^3} = \frac{3^8}{3^3} = 3^5$$

$$\text{b) } \frac{2^5 3^2 5^4}{3^{-1} 10^4} = \frac{2^5 3^2 5^4}{3^{-1} (2 \cdot 5)^4} = \frac{2^5 3^2 5^4}{3^{-1} 2^4 5^4} = \frac{23^3}{1} = 2 \cdot 3^5$$

$$\text{c) } \frac{(a^3)^{-1} (b^{-1})^3 a^{-2}}{\left(\frac{1}{a}\right)^6 b^4} = \frac{a^{-3} b^{-3} a^{-2}}{\frac{1}{a^6} b^4} = \frac{a^6}{a^3 b^3 a^2 b^4} = \frac{a}{b^7}$$

$$\text{d) } \frac{(4^{-3})^{-2} + 16^3}{4^4} = \frac{a^6 + (2^4)^3}{(2^2)^4} = \frac{a^6 + 2^{12}}{2^8}$$

$$4. \quad \text{a) } x^{\frac{5}{3}} (x^2)^{\frac{1}{6}} \left(x^{\frac{1}{12}}\right)^{-16} = x^{\frac{5}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}} = x^{\frac{1}{3}} \quad \text{b) } 3^{-1} (3^2)^5 = 3^{-1} 3^{10} = 3^9$$

$$\text{c) } \left(\pi^{\frac{5}{6}} \pi^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{5}} = \left(\pi^{\frac{19}{12}}\right)^{\frac{4}{5}} = \pi^{\frac{19}{15}}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{4\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \left(\left(4\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(2\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{8}} = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{12}}$$

$$5. \quad a) \quad \frac{3^{-\frac{2}{3}} 9^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{1}{6}}} = \frac{3^{-\frac{2}{3}} \cdot (3^2)^{\frac{2}{3}}}{(3^4)^{\frac{1}{6}}} = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{4}{3}}} = \frac{(3)^{\frac{4}{3}}}{3^2} \cdot \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}$$

$$b) \quad \frac{a^{\frac{3}{4}} b^2}{a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\frac{3}{4}} a^{\frac{1}{2}} b^2}{(3^4)^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{5}{4}} b^{2+\frac{3}{4}}}{1} = a^{\frac{5}{4}} b^{\frac{11}{4}}$$

$$c) \quad \frac{\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{7}{6}}}{x^{-1} y^{13}} = \frac{x^{-\frac{1}{6}} y^{\frac{7}{6}}}{x^{-1} y^{18}} = \frac{x^{\frac{5}{6}}}{y^{\frac{101}{6}}}$$

$$d) \quad \left(a^{\frac{1}{2}} a a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = (a^3)^{\frac{1}{3}} = a$$

$$6. \quad a) \quad \sqrt{28} + \sqrt{63} - 5\sqrt{7} = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = 0$$

$$b) \quad \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75} = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$c) \quad \sqrt{2}(\sqrt{10} + \sqrt{40}) = \sqrt{2}(\sqrt{2}\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\sqrt{5}) = 2\sqrt{2+4\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$$

$$d) \quad \sqrt{540} - \sqrt{135} - \sqrt{60} = 6\sqrt{3}\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$$

Ejercicios 12

1. Utilizando la ecuación cuadrática con $a = 12$; $b = -5$; $c = -2$; se tiene:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(12)(-2)}}{2(12)} = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{24} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{24} =$$

$$\frac{5 \pm 11}{24} = \frac{16+11}{24} \quad \text{ó} \quad \frac{16-11}{24} \quad \text{esto es } x = \frac{25}{24}, \quad \text{ó} \quad \frac{5}{24}$$

2. Utilizando la ecuación cuadrática con $a = 3$; $b = -5$; $c = 3$; se tiene:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(3)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 36}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{6} \text{ es decir no tiene raíces reales.}$$

3. Utilizando la ecuación cuadrática con $a = 4$; $b = 4$; $c = 1$; se tiene:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(1)}}{2(4)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 64}}{8} = \text{es decir que la ecuación no tiene}$$

$$(-4 \pm 42)(1)2(4) = -4 \pm 16 - 168 = -48 = -12$$

4. Solución real. Como en toda ecuación cuadrática se cumple que $x^1 + x^2 = -b/a$ y $x^1 x^2 = c/a$, entonces la suma de las raíces de esta ecuación será $-10/10 = -1$ y el producto será $c/a = 6/10 = 3/5$.

5. Resolver la ecuación $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

Si se hace $y = x^2$, y reemplazamos se tiene: $y^2 + y - 6 = 0$.

Luego, $a = 1$, $b = 1$ y $c = -6$. Por la fórmula cuadrática tenemos:

$$y = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} =$$

$$\frac{-1 \pm 5}{2} \text{ luego } \frac{-1 + 5}{2} \text{ ó } \frac{-1 - 5}{2} \text{ entonces } y = \frac{4}{2} = 2, \text{ ó } \frac{-5}{2}.$$

Como $y = x^2$, entonces $x = \sqrt{y}$, es decir que $x = \sqrt{2}$, ó

$x = \sqrt{-\frac{5}{2}}$, esta última igualdad no corresponde a un número real

6. Si llamamos x a la edad actual de Juan, se tiene que hace 20 años él tendría $x - 20$ cuando fue a la primaria; y si se multiplica por la edad actual, se tendría $x(20 - x)$, es decir $20x - x^2$ y dice que este producto es igual a 684. Luego la ecuación es:

$20x - x^2 = 684$, de donde $x^2 - 20x + 684 = 0$. Si aplicamos la ecuación cuadrática con $a = 1$, $B = -20$ y $c = 684$, se tiene:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(1)(684)}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 2736}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{3136}}{2} = \frac{20 \pm 56}{2}$$

en este caso sólo nos sirve la cantidad positiva, es decir $x = 18$. El tiene 18 años de edad.

7. Como los lados difieren en 7, si llamamos el ancho x entonces su largo tendría que ser $x + 7$ y su área $x(x + 7) = x^2 + 7x = 198$.

Tendremos, entonces, que resolver la ecuación cuadrática con $a = 1$, $b = 7$ y $c = -198$.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-198)}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 792}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{841}}{2} = \frac{7 \pm 29}{2}$$

Se toma la respuesta positiva pues se trata de una longitud es decir que $x = 22/2 = 11$. Entonces, los lados del rectángulo miden 11 cm y 18 cm.

8. Si llamamos x la longitud del largo y y al ancho, entonces, tenemos que:

$2x + 2y = 38$, ó $x + y = 19$; $y, x \cdot y = 84$, por lo tanto, despejando de esta ecuación última se tiene que $y = 84/x$, de donde de la primera ecuación se tiene $x + 84/x = 19$, de donde se tiene la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 19x + 84 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática con $a = 1$; $b = 19$; y $c = 84$

Se tiene:

$$x = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4(1)(84)}}{2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 336}}{2} = \frac{19 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{19 \pm 5}{2}$$

se toma $x = 12$; o $x = 7$.

9. Si llamamos x la distancia del punto en donde está enterrado el tesoro a la casa, entonces $17 - x$ será la distancia del punto al árbol. Luego, tenemos que: $x \cdot (17 - x) = 52$. Dando origen a la ecuación cuadrática:

$$17x - x^2 = 52 \text{ ó } x^2 - 17x + 52 = 0. \text{ Cuyas soluciones son: } x = 13 \text{ ó } x = 4.$$

10. Si llamamos x el número de compañeros que inicialmente aportan para el regalo, cada uno tendrá que dar $1260000/x$.

Ejercicios 13

- Calcular $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ $\log_a a^2 = 2$.
- Escriba en forma logarítmica la expresión dada:

a) $4^2=64$ equivale a, $2 = \log_4 64$

b) $12^2=144$, equivale a $2 = \log_{12} 144$

c) $5^4=625$ equivale a, $4 = \log_5 625$

- Evalué los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_3 9=2$

c) $\log_5 (1/25)=-2$

4. Use propiedad de los logaritmos para calcular:

a) $\log_4 4^3=3$

b) $\log_e e^x=x$

c) $2^{\log_2 4}=4$

d) $e^{\log e x}=x$

e) $\log_2 (4.16)=6$

f) $\log_{10} 100.10^3)=5$

g) $\log_3 (9/27)= -1$

h) $\log_{10} (10/1000)= -2$

5. a) Si llamamos $x = \frac{7^{\frac{5}{3}} \cdot 10^{\frac{3}{7}}}{3^{\frac{11}{4}}}$, entonces, por las propiedades de los logaritmos se tiene:

$$\log x = \log \left(\frac{7^{\frac{5}{3}} \cdot 10^{\frac{3}{7}}}{3^{\frac{11}{4}}} \right) = \log 7^{\frac{5}{3}} + \log 10^{\frac{3}{7}} - \log 3^{\frac{11}{4}} =$$

$$\frac{5}{3} \log 7 + \frac{3}{7} \log 10 - \frac{11}{4} \log 3 \approx \frac{5}{3}(0.8451) + \frac{3}{7}(1) - \frac{11}{4}(0.47712) =$$

$$\frac{5}{3}(0.8451) + \frac{3}{7} - \frac{11}{4}(0.47712) = 0.5249847$$

b) Si llamamos: $x = 9^{-3.8} 11^{5.21}$, entonces por las propiedades de los logaritmos se tiene

$$\log x = \log(9^{-3.8} 11^{5.21}) = \log 9^{-3.8} + \log 11^{5.21} = (-3.8) \log 9 + (5.21) \log 11 \approx$$

$$(-3.8)(0.95424) + (5.21)(1.04139) = -3.626112 + 5.4256419 =$$

$$1.7995344. \text{ Luego } x = 9^{-3.8} 11^{5.21} \approx 10^{1.7995344} \approx 63.02812$$

c) Como:

$$4^{7.53} = 10^{7.53 \log_{10} 4} = 10^{(7.53)(0.6020599)} = 10^{4.5335117} \approx 34159.517$$

$$\text{de manera similar } 5^{-0.49} = 10^{-0.49 \log_{10} 5} \approx 10^{(0.49)(0.69897)} = 10^{-0.3424953} \approx 0.4544694$$

$$4^{7.53} = 5^{-0.49} = 34159.517 + 0.4544694 = 34159.971$$

d) De manera similar al ejercicio:

$$0.32^{2.3} = 10^{2.3 \log_{10} 0.32} = 10^{2.3(-0.49485)} = 10^{-1.138155} \approx$$

$$0.072752, \text{ de manera similar } 0.18^{-4.65} = 10^{-4.65 \log_{10} 0.18} \approx 10^{-4.65(-0.7447274)} =$$

$$10^{3.4629829} \approx 2903.908$$

$$\text{Luego } 0.32^{8.3} - 0.18^{-4.65} = 0.072752 - 2903.908 = 2903.8352$$

6. Si $x > 0$ entonces, para que se cumpla la igualdad:

$$\log_a(x+y) = \log_a x + \log_b y$$

Debe ser:

$$\log_a(x+y) = \log_a(xy)$$

Es decir que:

$$x+y = x \cdot y$$

o, bien

$$(x-1)y = x$$

Con lo cual

$$y = \frac{x}{x-1}$$

7. a) Como:

$$\log_a = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ (Fórmula de cambio de base)}$$

Si hacemos $x = \log_a b$, resulta:

$$\frac{\log_b \log_a b}{\log_b a} = \log_a \log_a b$$

Por lo tanto:

$$a^{\log_b(\log_a b)/\log_b a} = a^{\log_a \log_a b} = \log_a b$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^{\log_a y} y^{\log_a \frac{1}{x}} &= x^{\log_a y} y^{-\log_a x} = (a^{\log_a x})^{\log_a y} (a^{\log_a y})^{-\log_a x} = \\ &= a^{\log_a x \log_a y} a^{-\log_a y \log_a x} = a^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \log_a \left[\log_a a^{(a^2)} \right] = \log_a \left[a^2 \log_a a \right] = 2 \log_a a = 2$$

8. Dados a y b hallar el valor de x que verifica:

a) Si $\log_x a + \log_x b = 1$, se tiene $x^{\log_x a + \log_x b} = x$

Es decir que $x^{\log_x a + \log_x b} = x$

Pero $x^{\log_x a} = a$, y $x^{\log_x b} = b$, así que, resulta $x = a \cdot b$

b) Como $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$ se cumple: $\log_a x + \log_a x \log_b a = 1$

o bien $\log_a x (1 + \log_b a) = 1$ de donde se sigue que:

$$\log_a x = \frac{1}{1 + \log_b a}$$

9. Si se toma logaritmo en cualquier base, la ecuación se transforma en: $\sqrt{x} \log x = x \log x$

y puesto que $\sqrt{x} \log x = x \log x$ se tiene:

$$\sqrt{x} \log x = x \frac{1}{2} \log x$$

Si se divide cada miembro de la igualdad por $\sqrt{x} \log x$, resultará:

$$2 = \sqrt{x}$$

De donde $x = 4$. Si reemplazamos en la ecuación inicial se tienen:

$$4^{\sqrt{4}} = \sqrt{4^4}$$

10. Si tomamos logaritmos en base 2, resulta:

$$\log_2 4 + x^2 \log_2 2 = x \log_2 8$$

Es decir: $2 + x^2 = 3x$

Como $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$, esta última ecuación cuadrática tiene dos soluciones:

$$x_1 = 2, \text{ y } x_2 = 1$$

Solución a la Evaluación Capítulo 3

1. La expresión decimal de los dos primeros números no es finita ni periódica. Por lo tanto, se tratan de números irracionales.
2. En cambio el tercero y cuarto números son decimales infinitos, pero tienen periodo 3 y 35 por lo tanto, son números racionales.
3. La expresión decimal que es infinita y no periódica es el número correspondiente al inciso a. Luego, este es el único número irracional.
4. La respuesta correcta es la c. Es decir, depende de los valores de x e y .
5. La respuesta correcta es la a. La desigualdad es cierta puesto que al término más pequeño (x) se le quita la cantidad más grande ($2/5$).

La respuesta correcta es la c.

Por ejemplo, para $x = -2$, $y = -1$ se tienen:

$$-2 + 1/2 = -3/2 > -1 + 1/4 = -3/4$$

En cambio, si $x = 2$, $y = 17/8$, será

$$2 + 1/2 = 5/2 > 17/8 + 1/4 = 19/8$$

Luego, depende de los valores de x e y .

6. La respuesta correcta es b. Basta recordar las propiedades de la desigualdad.
7. La respuesta correcta es b. Basta recordar las propiedades de la desigualdad.
8. La respuesta correcta es b. Como $a^3 a^4 = a^3 + 4 = a^7$
9. La respuesta correcta es a. $x^{-2} x^5 = x^{-2+5} = x^3$

10. La respuesta correcta es b. $x^{-3}x^{-2}=x^{-3-2}=x^{-5}$

11. La respuesta correcta es c. $3^k7^k=(3.7)^k=21^k$

12. La respuesta correcta es b. $6^n3^n=(2^n3^n).3^n=2^n3^{2n}$

13. La respuesta correcta es a. Ya que:

$$4^p6^p=(2^2)^p(2.3)^p$$

De donde:

$$4^p6^p=2^{2p}2^p3^p$$

Es decir que $4^p6^p=2^{3p}3^p$

14. La respuesta correcta es a. $32^n=(2^5)^n=2^{5n}$

15. La respuesta correcta es c. Ya que:

$$\frac{36^p}{9^p}=\left(\frac{36}{9}\right)^p=4^p=2^{2p}$$

$$\text{Se tiene } \frac{36^p}{9^p}=2^{2p}$$

16. La respuesta correcta es b. Ya que:

$$\frac{18^r}{3^r}=\left(\frac{18}{3}\right)^r=6^r=2^r3^r$$

Se tiene que:

$$\frac{18^r}{3^r}=2^r3^r$$

17. La respuesta correcta es b. Ya que: $15^{-r}.5^r=3^{-r}5^{-r}5^r=3^{-r}$

18. La respuesta correcta es b. Ya que: $(a^2)^3=a^{2.3}=a^6$

19. La respuesta correcta es a. $(x^5)^{-2}=x^{5.(-2)}=x^{-10}$

20. La respuesta correcta es c. $(x^{-4})^3 = x^{(-4) \cdot 3} = x^{-12}$

21. La respuesta correcta es a. $(a^6)^2 = a^{6 \cdot 2} = a^{12}$

22. La respuesta correcta es a. $(b^2)^{-2} (b^3)^2 = b^{-4} b^6 = b^2$

23. La respuesta correcta es b.

$$\frac{a^5}{(a^2)^4} = \frac{a^5}{a^8} = a^{5-8} = a^{-3}$$

24. La respuesta correcta es a.

$$\frac{(x^{-2})^{-3}}{(x^3)^{-2}} = \frac{x^6}{x^{-6}} = x^{6+6} = x^{12}$$

25. La respuesta correcta es b.

$$\frac{3^2}{(3^4)^2} = \frac{3^2}{3^8} = \frac{1}{3^6}$$

26. La respuesta correcta es c. Ya que:

$$\frac{(4^2)^2}{2^6} = \frac{4^4}{2^6} = \frac{2^8}{2^6} = 2^2$$

27. La respuesta correcta es c. Ya que:

$$\frac{6^3}{2^4 3^2} = \frac{(2 \cdot 3)^2}{2^4 3^2} = \frac{2^3 3^3}{2^4 3^2} = \frac{3}{2}$$

28. La respuesta correcta es b. Ya que:

$$\frac{12^4}{18^4} = \left(\frac{12}{18}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 2^4 3^{-4}$$

29. La respuesta correcta es b. Si se multiplica la desigualdad
 $0 < a < 1$

Por el número a positivo, se tendrá $0 < a^2 < a$; luego $a^2 < a$.

30. La respuesta correcta es b. $y^{\frac{1}{n}} = (x^n)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{n}{n}} = x$

31. La respuesta correcta es a. $9^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$

32. La respuesta correcta es c. $12^{\frac{1}{2}} = (4 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

33. La respuesta correcta es a. $2^{\frac{9}{12}} = 2^{\frac{3}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{4}} = 8^{\frac{1}{4}}$

34. La respuesta correcta es c. $9^{\frac{5}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 3^5$

35. La respuesta correcta es a. $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = (a)^{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4}} = a^{\frac{1}{2}}$

36. La respuesta correcta es c. $x^{\frac{5}{3}} x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{5}{3} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{11}{6}}$

37. La respuesta correcta es b. $\frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$

38. La respuesta correcta es a. $(a^3) - \frac{3}{6} = a^{\left(\frac{1}{6}\right)^3} = a^{-\frac{5}{2}}$

39. La respuesta correcta es c.

$$27^{\frac{1}{2}} - 12^{\frac{1}{2}} + 75^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 5 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 6 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

40. La respuesta correcta es la b.

$$128^{\frac{1}{3}} + 2.54^{\frac{1}{3}} - 4.16^{\frac{1}{2}} = (4^3 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot (3^3 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot (2^3 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} =$$

$$4.2^{\frac{1}{3}} + 2.3.2^{\frac{1}{3}} - 4.2.2^{\frac{1}{3}} = (4 + 6 - 8)2^{\frac{1}{3}} = 2.2^{\frac{1}{3}}$$

41. La respuesta correcta es a. Si se añade un número real a cada miembro de una desigualdad, la desigualdad se mantiene.

42. La respuesta correcta es a. $b^2 - 4a.c = (-5)^2 + 4.3.(-12) = 169$. Luego, el discriminante es positivo y tiene dos soluciones.

43. La respuesta correcta es c. $b^2 - 4a.c = (6)^2 - 4.(-2).(-5) = -4$. Luego, el discriminante es negativo y no tiene solución.

44. La respuesta correcta es c. $b^2 - 4a.c = (-1)^2 - 4.8.4 = -127$. Luego, el discriminante es negativo y no tiene solución.

45. La respuesta correcta es a. $b^2 - 4a.c = (-66)^2 - 4.36.25 = 756$. Luego, el discriminante es mayor que cero y tiene dos soluciones reales:

46. La respuesta correcta es a. Las soluciones están dadas por:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{8} \quad \text{Es decir } x_1 = 2, \quad x_2 = -3$$

47. La respuesta correcta es c. Las soluciones están dadas por:

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{8} \quad \text{Es decir } x_1 = 5/2, \quad x_2 = 3/2$$

48. La respuesta correcta es la a. Como la ecuación es $2x^2 + 3x - 8 = 0$, el discriminante es: $b^2 - 4ac = 3^2 - 4.2.(-8) = 73$. Por lo tanto, hay dos soluciones reales. Su suma es $-b/a = -3/2$.

49. La respuesta correcta es la c. Como la ecuación es $3x^2 - 5x + 2 = 0$, el discriminante es: $b^2 - 4ac = 5^2 - 4.2.2 = 1$. Por lo tanto, hay dos soluciones reales. Su suma es $c/a = 2/3$.

50. La respuesta correcta es b. Ya que:

$$\sqrt{16+36} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

51. La respuesta correcta es b. Ya que

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}$$

52. La respuesta correcta es b. Como $0.0025 = 25 \cdot 10^{-4} = 5^2 \cdot 10^{-4}$

$$\sqrt{0.0025} = \left(5^2 \cdot 10^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 10^{-2}$$

53. La respuesta correcta es a. Ya que:

$$\sqrt{2\sqrt{3}} = \left(2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \sqrt[4]{3}$$

54. La respuesta correcta es d. Ya que:

$$(x-1)^2+3 = x^2-2x+1+3 = x^2-2x+4$$

Y el discriminante es $(-2)^2-4 \cdot 4 < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

55. La respuesta correcta es b. La suma de las soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

es igual a $-b/a$. por lo tanto, la suma es 3.

56. La respuesta correcta es b. Si c es positivo, se cumple. Si c es cero, entonces $ac = bc$. Si c es negativo, se cumple lo contrario $ac < bc$.

57. La respuesta correcta es b. La solución de la ecuación está dada por:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2}$$

luego, $x^1=2$, $y x^2=3$; por lo tanto, la mayor de las soluciones es 3.

58. La respuesta correcta es c. Si $a < 0$, entonces $a^2 > 0$; luego, $a^2 > a$. Por otra parte, si $a > 1$ y se multiplica por a cada miembro de la desigualdad, se tendrá $a^2 > a$ ya que a es positivo. Por último, si $0 < a < 1$, se tiene $a^2 < a$, por lo tanto, sólo se cumple cuando $a < 0$ ó $a > 1$.

59. La respuesta correcta es b. Puesto que $0 < a < b$, si se multiplica cada miembro de la desigualdad por $b > 0$, resulta:

$$0 < ab < b^2$$

Como $a^2 < ab$, se tiene $a^2 < b^2$

60. La respuesta correcta es b. Ya que:

$$\sqrt{125} = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2} \sqrt{5} = 5\sqrt{5} \quad y$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

De donde se tiene

$$\sqrt{125} - \sqrt{20} = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

61. La respuesta correcta es c. ya que:

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1$$

62. La respuesta correcta es a.

$$\text{Ya que } \sqrt{216} - \sqrt{150} = \sqrt{2^3 3^3} - \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} = 6\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

63. La respuesta correcta es a. Ya que:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$$

64. La respuesta correcta es c. Ya que:

$$(1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

65. La respuesta correcta es c.

$$\left[\left(\frac{x^{-2}y^3t}{x^{-3}y^{-2}t^2} \right)^2 \right]^{-1} = \left(\frac{y^2y^3}{x^{-3}x^2t} \right)^{-2} = \left(\frac{y^5}{x^{-1}t} \right)^{-2} = \left(\frac{x^{-1}t}{y^5} \right)^2 = \frac{x^{-2}t^2}{y^{10}} = \frac{t^2}{x^2y^{10}}$$

66. La respuesta correcta es a.

$$\left(\frac{2^2x^2y^0}{8x^{-1}} \right)^{-2} = \left(\frac{x^{-3}}{x^{-5}} \right)^3 = \left(\frac{2^2x^2}{2^3x^{-3}} \right)^{-2} x^6 = \left(\frac{x^3}{2} \right)^{-2} x^6 = \left(\frac{2}{x^3} \right)^2 x^6 = \frac{2^2}{x^6} x^6 = 4$$

67. La respuesta correcta es c.

$$\left(\frac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}} \right)^{-1} = \left(\frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-1}} \right) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{1}{x}} = \frac{y-x}{y}$$

68. La respuesta correcta es a. Basta recordar la definición de logaritmo como inversa a la exponencial.

69. La respuesta correcta es b. Basta recordar la definición de logaritmo como inversa a la exponencial.

70. La respuesta correcta es c. Ya que $\log 3x^2 - \log 9x = 2$, entonces por propiedades de los logaritmos se tiene: $\log (3x^2/9x) = 2$. Luego: $\log(x/3) = 2$, por definición de logaritmo se tiene: $x/3 = 10^2$, es decir que: $x = 300$.

Bibliografía

- Castro, L. y Castro, E. (1992). Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar. Matemática Cultura y Aprendizaje 2. Editorial síntesis.
- Mason, J., Burton, L. & Kaye, S. (1998). Pensar matemáticamente. Editorial Labor.
- _____. (1988). Matemáticas 7. Aritmética y geometría. Editorial Pime.
- Obonaga, E., Pérez, J. y Caro, V. (1987). Matemáticas 6. Aritmética y geometría. Editorial Pime.
- OCDE. (2006). Pisa. Recuperado de: <http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf>
- Pérez, J. (1988). Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué? Matemática, cultura y aprendizaje 5. Editorial síntesis.
- Socas, M., Camacho, M., Palares M., Hernández, J. (1992). Iniciación al Algebra. Matemática, cultura y aprendizaje 23. Editorial síntesis.
- Steen, L. (1998.). La enseñanza agradable de las matemáticas. Colección textos Politécnicos. Serie Matemática. Editorial Limusa.

Sierra, M., González, M., García, A., González, M. Divisibilidad. (1989). Fundamentos para una aritmética escolar. Matemática Cultura y Aprendizaje 7. Editorial síntesis.

Universidad EAN. (s.f.). Misión. Recuperado de: <http://institucion.ean.edu.co/seccion/mision-vision-y-filosofia.html>

Vargas, I., Jimeno, M., Iriarte, M. et al. (1992). Números enteros. Matemática, cultura y aprendizaje 6. Editorial síntesis.

Villanueva, G. (s.f.). Las matemáticas por competencias. Recuperado de: http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/Foro3/Memorias/Ponencia_67.pdf

Villaveces. (2008). Las competencias matemáticas genéricas de los egresados de educación superior. Recuperado de: http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-189357_archivo_pdf_matematica_1C.pdf

Guía de referencia rápida para una buena práctica ambiental en publicaciones.



**La acción más pequeña es mejor
que la intención más grande**

La Universidad EAN, comprometida con el desarrollo social, económico y ambiental sostenible, invita a los lectores a:

- Hacer uso razonable de sus impresiones.
Antes de imprimir, piense si es necesario hacerlo. Por ejemplo, lecturas, revisiones y comentarios pueden realizarse en formato digital.
- Visualizar la impresión de los documentos.
Tenga en cuenta los elementos que pueden variar la extensión de sus impresiones como: formato, tamaño de letra y ambas caras de la página.
- Utilizar papel reciclado.
Dependiendo de su uso final, algunos documentos pueden imprimirse en papel reciclado; recuerde que ya es una tendencia actual.
- Ahorrar energía eléctrica.
Emplee fuentes de luz de bajo consumo y revise el buen funcionamiento de equipos eléctricos en el trabajo y el hogar, para evitar el gasto innecesario de la energía.
- Practicar el consumo responsable.
Tenga en cuenta los materiales de origen, la sostenibilidad en la producción y la disposición final que dará a los productos que lleva en sus compras.
- Reducir, reutilizar y reciclar sus recursos.
Recuerde optimizar el uso de los recursos que empleamos diariamente (papel, energía eléctrica, agua, etc.) y genere un sano hábito ecológico.

Mayor información:
Buenas prácticas ambientales en el contexto editorial
<http://bit.ly/1Q5wEvG>



**¡Hagamos posible la
conservación de nuestro
medio ambiente!**



Misión

Contribuir a la formación integral de la persona y estimular su aptitud emprendedora, de tal forma que su acción coadyuve al desarrollo económico y social de los pueblos.

Visión

Ser líder en la formación de profesionales, reconocidos por su espíritu empresarial.

Telefono: 5936464
El Nogal: Calle 79 # 11- 45
Bogotá D.C. - Colombia - Sur América
www.universidadean.edu.co



Papel 100% reciclado, 100% reciclable,
libre de ácido y libre de cloro elemental.

Características comprobadas por el Departamento
de Servicio Técnico Colombiana Kimberly Colpapel S.A.



<http://edicionesan.edu.co>